El Riesgo Sistemático β, Desde la Perspectiva de Pensamiento de Linner, Sharpe, Merton Y Miller

Juan Sergio Cruz profesor e investigador (CESA) y
Christian Vargas Ingeniero Financiero

Resumen

Este artículo unifica la matemática de Linner y Sharpe, para determinar la rentabilidad exigida por un accionista conocida en el modelo Capital Asset Price Model,-CAPM_ y las proposiciones fundacionales de las finanzas Corporativas, a partir de los estudios de Franco Modigliani y Merton. A través de las diversas ecuaciones, el lector podrá construir y matematizar el concepto de Riesgo Sistemátio **β**, *para diversas aplicaciones de las finanzas modernas. Se hace una precisión de las diferentes medidas de Riesgo Sistemático como es Beta del activo,* (**βa**) *Beta de la deuda* (**βd**), *Beta del accionista* (**βe**) *y beta de un accionista sin deuda* (**βu**) *en diversos escenarios de análisis*

Palabras Clave

Riesgo Sistemático, CAPM, Costo de Capital, tasa de descuento, riesgo sistemático

Abstract

*This article unifies the mathematics used by Linner and Sharpe in order to determine the rate of return demanded by the shareholder´s known in the Capital Asset Pricing Model –CAPM- as well as the fundamental propositions of Corporate Finance, derived from the work of Franco Modigliani and Robert Merton. Through diverse equations, the reader will be able to construct mathematically the concept of systematic risk β, for diverse applications of modern finance. A perception is made of the different measurements of systematic risk like the asset beta (***βa***), the debt beta (***βd***), the equity beta (***βe***), and the unleveraged beta (***βu***) in different analysis scenarios.*

Keywords

Systematic Risk, Capital Asset Price Model (CAPM), Cost of Capital, Risk Adjust Discount Rate, Cost of Capital.

1. Introducción

El objetivo de este artículo es presentar el concepto de Riesgo Sistemático β y su formulación matemática, desde la línea de pensamiento de Linner, Sharpe, y las proposiciones de M-M (Merton y Modigliani). Cada vez más, los financistas requieren implementar una capacidad analítica, en el uso del concepto de riesgo sistemático, para el descuento de cantidades monetarias en virtud de la teoría del costo de capital, en diversos campos de las finanzas (pricing, valoración, asignación de recursos en ambientes de incertidumbre, tasación de tarifas, operaciones estructuradas, etc.). En consecuencia, se requiere la elaboración conceptual y matemática, de una tasa de descuento ajustada al riesgo, cuya notación en adelante es **RADR**- Risk Adjust Discount Rate-.

Y para el ejercicio de estas actividades, se cuenta con el respaldo de desarrollos teóricos, formulados por economistas financieros de la década del 50 y 60 del siglo pasado, en cabeza de Linner y Sharpe, y por el otro lado, de Miller y de Merton (57) y de sus aclaraciones posteriores.

Con la presentación del artículo, el lector podrá darse cuenta de la coherencia de estas dos escuelas de pensamiento y la posibilidad de combinar estos modelos en un ejercicio matemático para usos modernos en finanzas.

2. Las escuelas de pensamiento como punto de partida para explicar el riesgo sistemático y su uso

2.1. ¿Que aportaron Linner y Sharpe al tema que nos ocupa?

William Sharpe tomó como punto de partida los resultados de Markowitz y desarrollo sus implicaciones en los precios de los activos. Agregó la suposición de que en todo momento los precios de los activos se ajustarán para igualar la oferta y la demanda de todo activo riesgoso, demostró que debe existir una estructura muy específica entre las tasas esperadas de rendimiento sobre los activos riesgosos. Hoy la estructura propuesta por la teoría de Sharpe constituye comúnmente la base para efectuar los ajustes del riesgo en muchas áreas de la teoría y de la práctica financiera[1]

[1] Bodie Zvi, Robert C. Merton, (1999) FINANZAS. Mexico, Mc. Graw Hll

El modelo matemático del Capital Asset Price Model es:

$$E(r) = r_f + \beta_j E(r_P - r_f) \qquad [1]$$

Donde

$E(r_j)$: Tasa de rendimiento esperada del activo

r_P : Rendimiento de Mercado

r_f : Rendimiento libre de riesgo

$Bj: \frac{Cov(r, r_P)}{Var(r_P)}$ Riesgo del accionista

$r_p = r_m - r_f$: Risk Premiun. La prima que exige el inversionista por asumir un nivel de riesgo sistemático **β**. El modelo supone que el inversionista es averso al riesgo y en consecuencia exige una compensación.

Para cuantificar el grado de aversión al riesgo de un inversionista[2], suponemos que el inversor elige carteras basadas tanto en la rentabilidad esperada, E(r_P) como en la volatilidad de la rentabilidad evaluado por la desviación estándar, σ_P^2. Si apreciamos que la rentabilidad sin riesgo de las letras del Tesoro es (r_f), entonces la prima de riesgo de una cartera es E(r_P)- r_f. Los inversores con aversión al riesgo demandaran rentabilidades esperadas más altas para colocar sus recursos con carteras con mayor volatilidad; esa prima de riesgo será mayor cuanto mayor es la aversión al riesgo. Por tanto, si cuantificamos el riesgo de aversión con el parámetro A, tiene sentido afirmar que la prima de riesgo que solicita un inversor en una cartera dependerá tanto de la aversión al riesgo A como del riesgo de la cartera σ_P^2.

Escribiremos la prima de riesgo que solicita un inversor de una cartera como una función de su riesgo:

$$E(r_p) - r_f = \frac{1}{2} A \sigma_p^2 \qquad [2]$$

La ecuación anterior describe la forma en que los inversores desean relacionar el riesgo con la rentabilidad esperada. (La ecuación requiere que

[2] Bodie Zvi, Alex Kane, Alan J. Marcus(2004) PRINCIPIOS DE INVERSIONES. Quinta Edición. España, Mc. Graw Hill

pongamos tasas de rentabilidad en decimales). Como criterio de referencia, sabemos que la rentabilidad tiene que ser igual solo a la tasa sin riesgo. Es necesaria una prima de riesgo de $\frac{1}{2}A\sigma_p^2$ para inducir a los inversores a establecer una cartera general que tenga una volatilidad positiva. El termino 1/2 es solo un factor de escala escogido por conveniencia y no tiene impacto real en el análisis.

Ocurre que si el inversor considera el riesgo frente a la rentabilidad en la forma especificada en la ecuación anterior, entonces podemos deducir su aversión al riesgo si observamos primas de riesgo y volatilidad de las carteras reales. Solucionamos la ecuación por A como:

$$A = \frac{[E(r_p) - r_f]}{\frac{1}{2}\sigma_p^2} \qquad [3]$$

Las **derivadas parciales de A** respecto a sigma y respecto al rendimiento del portafolio

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma} = -\frac{[E(r_p) - r_f]}{\frac{1}{4}\sigma_p^3} \qquad [4]$$

$$\frac{\partial A}{\partial E(r_p)} = \frac{2}{\sigma_p^2} \qquad [5]$$

Por ejemplo, si un inversor cree que la prima de riesgo de la cartera es del 8% y la desviación típica es del 20%, podremos deducir la aversión al riesgo como:

$$A = \frac{0.08}{(0.5 * 0.2^2)} = 4$$

¿Cómo interpreto 4?

En la práctica no podemos observar la prima de riesgo que los inversores esperan obtener. Solo podemos observar la rentabilidad real después del hecho. Además, los diferentes inversores pueden tener distintas expectativas sobre el riesgo y la rentabilidad de varios activos. Para finalizar las ecuaciones solo se aplican a la varianza de la cartera general de la cartera de un inversor, no a los activos individuales mantenidos en esa cartera. No podemos observar la cartera total de activos de un inversor. Mientras que la relación exacta entre riesgo y rentabilidad en los mercados de capitales no se conoce con exactitud, muchos estudios concluyen que la aversión de los inversionistas al riesgo está probablemente en un intervalo de 2-4.

2.2. ¿Que aportaron Merton y Miller al tema que nos ocupa?

Las contribuciones de Merton y Miller son la base de la teoría de las finanzas corporativas modernas. Junto con Franco Modigliani (galardonado anteriormente con el Premio Nobel de economía) estudió las políticas de las empresas relativas a dividendos y a la obtención de préstamos, en una serie de artículos comenzando con "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment", artículo publicado en la revista American Economic Review en 1958.

En concreto el desarrollo conceptual de Miller y Merton (M-M) se puede resumir en lo que se conoce como las 4 proposiciones:

3. Medición del costo de capital[3]

3.1. Costo de capital sin impuestos

Una de las formas iníciales para entender el concepto de Costo de capital es el costo de capital contable. Para tal efecto, comencemos con la preposición I de M-M e incluyeron como supuestos, una empresa *sin crecimiento ni nuevas inversiones.*

La ecuación afirma que el valor de mercado de la empresa o proyecto está dado por "la capitalización de sus rendimientos esperados descontados por una tasa k apropiada para su clase. Esto es lo que MM se refiere cuando afirma que las empresas en una clase de riesgo tendrían la misma tasa aplicable de descuento"[4]

3.2. Definición y cálculo:

El valor de la empresa (V) con las restricciones planteadas sería:

$$V = \frac{NOI}{k} \qquad [6]$$

Donde:

V= Valor de mercado de la empresa o proyecto
NOI= Ingreso Neto esperado en operación
k= Tasa de descuento

[3] CRUZ, JUAN SERGIO. (2001) Lógicas y Dialécticas en las decisiones de inversión. Colombia. 3R Editores.
[4] Ibid,.1

Con los supuestos de MM el valor de la empresa en este escenario no se vería afectado por el apalancamiento financiero. ***Es decir, que el valor de la empresa es independiente de su estructura de capital.*** Se puede escribir lo anterior en términos de k y resultaría:

$$k = k_u = \frac{X}{V} \quad [7]$$

Donde k_u entendido como costo de capital, es la capitalización de una corriente pura de capital contable de su misma clase riesgo.

3.3. Costo de capital con impuestos

En el primer escenario se reflexiono sobre el concepto de costo de capital sin impuesto. Para el segundo caso se incluye los efectos de los impuestos en el valor de mercado de una empresa o proyecto y/o actividad. Se mantienen la restricción de una empresa no apalancada.

Por lo tanto la ecuación inicial sería:

$$V_u = \frac{X(1-T)}{k_u} \quad [8]$$

Que se puede escribir en términos del costo de capital como:

$$k_u = \frac{X(1-T)}{V_u} \quad [9]$$

Por otro lado, el valor del mercado de la empresa apalancada es:

$$VI = V_u + TB \quad [10]$$

Donde,

VI =Valor de mercado de la empresa apalancada
V_u =Valor de mercado de la empresa no apalancada
T=Tasa impositiva
B=Valor de mercado de la deuda
TB=Es el valor presente de las ventajas tributarias por la deuda

Debido al subsidio fiscal representado por la deducibilidad fiscal del interés sobre la deuda, el valor de una empresa apalancada está dado por el valor de la empresa no apalancada más el valor de la deuda por la tasa de fiscal.

3.4. Costo de capital de una empresa apalancada

Para una corriente perpetua de ingresos el valor de las acciones es:

$$S = \frac{NI}{k_s} \quad [11]$$

Donde el costo de capital contable es igual:

$$k_s = \frac{NI}{S} \quad [12]$$

Las variables representan:

NI=Ingreso Neto Operativo esperado después de intereses e impuestos
S=Valor de las acciones
k_s =Costo de capital contable
k_b =Tasa de interés sobre el nuevo pasivo para el proyecto o actividad antes e impuestos
$k_b(1-T)$=Tasa de interés del pasivo después de impuestos
T=Tasa marginal tributaria
k_{ps} =Costo de las acciones preferentes
k_r =Costo de utilidades retenidas o de capital interno
k_e =Costo de las nuevas emisiones de acciones comunes
k_s =Tasa requerida de rendimiento sobre capital común en general cuando no se hace distinción entre k_e y k_r.
k=Costo de capital compuesto o ponderado. Si una empresa obtiene nuevo capital para financiar porcentaje de pasivos su estructura de capital en equilibrio (es decir, si ha de mantener el mismo porcentaje de pasivos, de acciones preferentes y de capital común), entonces obtendrá parte de los nuevos fondos como pasivos, parte como acciones preferentes y parte como capital común. Además k es un costo marginal; es la proporción del incremento de costos de financiamiento al incremento de los fondos obtenidos por periodo para financiar un programa de inversión.

Demostración de la ecuación de capital contable con apalancamiento:

$$NI = (X - k_b B) - (X - K_b B)T \quad [13]$$

$$= X - k_b B - XT + k_b BT$$

$$= X(1-T) - k_b B(1-T)$$

NOI después de intereses e impuestos, si factorizamos T, teniendo en cuanta la ecuación.

$$V_u = \frac{X(1-T)}{k_u} \qquad [14]$$

$$= k_u V_u - k_b B(1-T)$$

Si tenemos en cuenta $VI = V_u + TB$,

$$= k_u(VI - TB) - k_b B(1-T)$$

$$= k_u VI - k_u TB - k_b B(1-T)$$

Si reescribimos,

$$= k_u S - k_u B - k_u TB - k_b B(1-T)$$

Ahora bien si multiplicamos a los dos lados de la ecuación por 1/S y si VI=S=B, entonces:

$$\left(\frac{N_i}{S}\right) = k_s = \frac{k_u S}{S} + \frac{k_u B}{S} - \frac{k_u TB}{S} - \frac{k_b B\,(1-T)}{S}$$

Si factorizamos,

$$k_s = k_u + (k_u - k_b)(1-T)\frac{B}{S} \qquad [15]$$

¿Qué significa esta ecuación de costo de capital contable?

El costo de capital contable de una empresa apalancada estaría constituido por el costo de capital de una empresa no apalancada mas la diferencia entre el costo de una empresa apalancada y el costo marginal de la deuda, por la razón entre el valor de mercado de la deuda y el valor de mercado del capital contable por la diferencia entre uno menos la tasa impositiva.

Si recordamos la ecuación de la recta es $f(x) = a + bx$ donde:

a=La constante
b=La pendiente de la recta
x=La variable independiente
f(x)=La variable dependiente

Entonces, si reescribimos la ecuación del Costo de Capital Contable de una empresa, actividad o proyecto en estos términos de la ecuación de la recta tendríamos que:

- k_u es a
- $(k_u - k_b)(1-T)$ es la pendiente de la recta
- B/S es x

La representación gráfica de la función del costo de capital es:

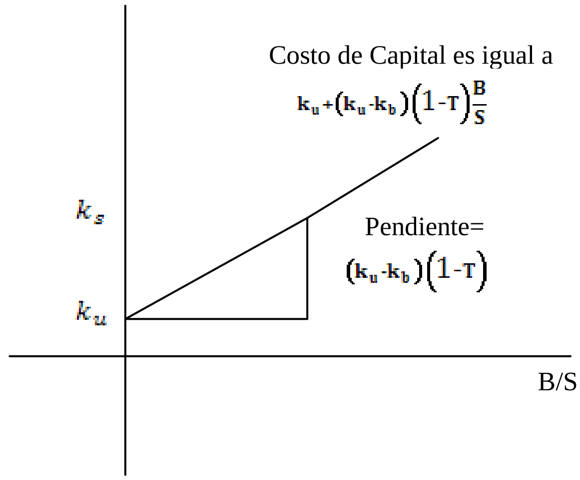

Grafico 1. Función de costo de capital

Interpretación de la gráfica: De la gráfica anterior se concluye;

1. El costo de capital k_s, se incrementa en la medida en que el porcentaje de la deuda sobre el total de capital es mayor.
2. La que define el signo de la pendiente no es la política fiscal ni la política de financiamiento sino el diferencial entre el costo del capital sin deuda menos el costo marginal de la deuda ($k_u - k_b$).
3. El grado de sensibilidad de un incremento de la deuda en la estructura de capital respecto al costo de capital está determinada por $(k_u - k_b)(1-T)$
4. Cuando hay altos niveles impositivos hay incentivos económicos para que las empresas contraten deuda para capitalizar los ahorros provenientes por el ahorro fiscal.

Recuérdese que si definimos desde el modelo CAPM a k_u y:

$$k_u = r_f + \beta_u(r_p)$$
$$k_d = r_f + \beta_d(r_p)$$

Si partimos de que el signo es positivo, se requiere que:

$$k_u > k_d$$

Y dado que r_f y r_p son iguales en las dos ecuaciones, entonces:

$$\beta_u > \beta_d$$

Entonces, se concluye que para que k_e sea sensible de forma positiva a la deuda, se requiere que el riesgo sistémico de los accionistas, sea mayor que el riesgo sistémico de los tenedores de los contratos de deuda.

3.5. Promedio ponderado del costo de capital marginal denominado WACC

Definición tradicional del costo de capital marginal (Weighted average Cost Capital WACC).

Una de las formas tradicionales de plantear el costo de capital es un promedio ponderado de los costos individuales de las fuentes de capital por los pesos porcentuales de cada fuente de capital sobre el total. Esto se expresaría como:

$$K = WACC = k_b(1-T)\frac{B}{VI} + k_s\frac{S}{VI} \qquad [16]$$

Esta es una ecuación que se usa con frecuencia en el cálculo del costo de capital, empero, tiene deficiencias en la medida que no registra los cambios del WACC a partir de cambios de apalancamiento financiero.

¿Qué significa WACC para la toma de decisiones?

Si recordamos la definición dada de costo de capital como el costo de capital marginal -WACC- seria el rendimiento requerido sobre los activos, con un nivel de apalancamiento, para aumentar la riqueza de los accionistas.

Uno de los aportes de Modigliani-Miller es demostrar que el costo de capital marginal (WACC) cambia ante cambios de la estructura financiera.

$$k = WACC = k_u\left(1 - T\frac{B}{B+S}\right) \qquad [17]$$

Donde está claro que el costo de capital está determinado por la estructura financiera (B/B+S). Esta ecuación además tiene las siguientes implicaciones:

Si el rendimiento de los proyectos es mayor que su WACC deben estar incrementando la riqueza de los accionistas porque la variación de S sobre la variación de I es mayor que cero.

Cuando los flujos de efectivo de la nueva inversión son descontados al WACC, se definen como los flujos de efectivo en operaciones después de impuestos que la empresa tendría si no tuviera dudas, es decir, que los flujos de efectivo son CF=X(1-T).

Formulación equivalente a WACC

A continuación se plantean tres formulaciones equivalentes del WACC.

$$WACC = k_b(1-T)\frac{B}{V} + k_s\frac{S}{V} \qquad [18]$$

$$WACC = \frac{X(1-T)}{VI} \qquad [19]$$

$$WACC = k_u(1-TL)\ donde\ L = \frac{B}{V} \qquad [20]$$

3.6. El costo de capital como una función de la razón de deudas a capital contable sin impuesto y con impuestos

Con el objetivo de ejercitar los conceptos planteados en los numerales anteriores, se desarrollará un ejercicio con sus respectivas gráficas. Para tal efecto, se toman dos escenarios con impuestos y sin impuestos.

Primer escenario

La ecuación del costo de capital contable sin impuestos de una empresa apalancada es:

$$k_S = k_u + (k_u - k_b)\frac{B}{S} \qquad [21]$$

Entonces para hacer la gráfica del costo de capital contable habría que calcular los diferentes componentes de la ecuación donde:

k_u = Costo de Capital sin Deuda
B = Valor de Mercado de la Deuda
S = Valor de las Acciones
k_b = Es el costo marginal de la deuda

Entonces la gráfica seria:

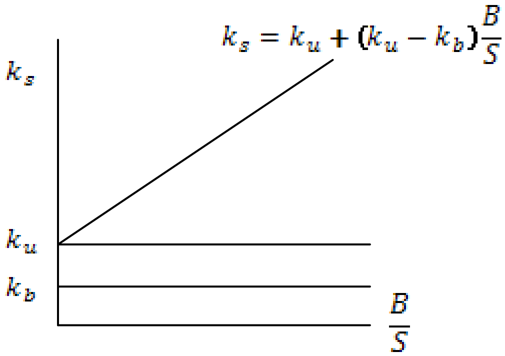

Grafico 2. Función de costo de capital contable sin impuestos

Análisis de la gráfica

El costo de capital contable es una ecuación lineal y crece con el apalancamiento. Cuando la deuda es igual a cero el costo promedio de capital promedio es igual al costo de capital de una empresa no apalancada.

Segundo escenario

El costo de capital contable con impuestos es:

$$k_s = k_u + (k_u - k_b)(1 - T)\frac{B}{S} \qquad [22]$$

Y teniendo en cuenta la siguiente definición de WACC $WACC = k_u\left((1 - T)\frac{B}{B + S}\right)$

Entonces podemos visualizar el comportamiento de cada uno de los costos en función de la variación de la estructura financiera:

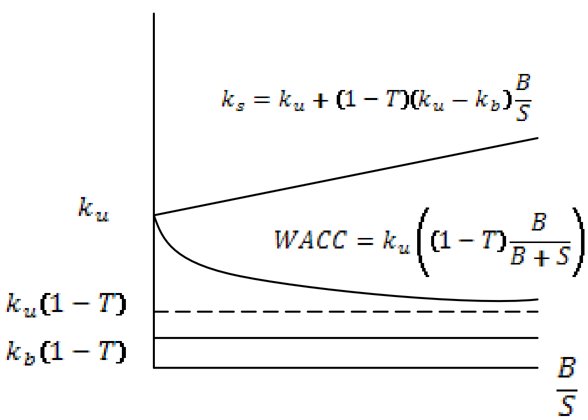

Grafico 3. Función de costo de capital contable con impuestos

Análisis de la gráfica

- El costo de capital contable crece lineal mente, y es una función con pendiente positiva, frente a la deuda.

- El costo de capital (WACC) decrece a medida que la razón D/E crece.

- El límite inferior del costo de capital es $k_u(1 - T)$. ¿Por qué? .Partamos que el WACC es igual a $k_u\left((1 - T)B/_{B + S}\right)$. Cuando S toma el valor de cero entonces $B/_{B + S}$ es igual a uno, con lo cual WACC es igual a $k_u(1 - T)$.

Los estudios prácticos después de Modigliani-Miller revisaron la tesis que se sugiere en la gráfica anterior en el sentido, que el costo promedio ponderado de capital disminuía permanentemente hasta acercarse al costo de una empresa apalancada menos 1-T. El razonamiento de esta tesis, subyace en la observación de la realidad en el sentido que el comportamiento de la relación entre el efecto de apalancamiento que el costo del componente de la deuda. Cuanta más deuda tenga una empresa mayores serán los requerimientos de intereses; y si son más altos los cargos por intereses, mayor será la probabilidad de que las ganancias (EBIT) no sean suficientes para cubrir estos cargos. Los acreedores percibirán este riesgo creciente a medida que aumente la razón de endeudamiento y entonces empezaran a cargar una prima de riesgo más alta y por arriba de la tasa libre de riesgo, ocasionando que se eleve la tasa de interés de la empresa.

4. ¿Qué se entiende por riesgo sistemático?

Se entiende como el coeficiente de volatilidad –beta- de un activo financiero e indica cuánto varía el rendimiento de dicho activo en función de las variaciones producidas en el rendimiento del mercado en el que aquél se negocia.[5]

El modelo CAPM recoge este definición de riesgo sistemático y se constituye en la medida riesgo que debe ser recompensado al accionista a través de una prima de Riesgo denominada Risk Premiun. En este documento vamos a trabajar diferentes medidas de

---

[5] William Sharpe, (1964) Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. Journal of Finance, Septiembre, P. 425-442

Riesgo que son operadas desde el modelo CAPM y depende si la empresa esta apalancada o no.

1. CAPM Empresa no apalancada $K_u = R_f + \beta_u P_m$
2. CAPM Empresa Apalancada $Kl = R_f + \beta_l P_m$
3. CAPM para la deuda $K_d = R_f + \beta_d P_m$

Donde,

Ku= El rendimiento exigido por los accionistas cuando la empresa no está apalancada
Kl= El rendimiento exigido cuando la empresa esta apalancada
Kd = El rendimiento exigido por la deuda
β_d = Beta de la deuda
β_u = Beta de los recursos propios
β_l = Beta de los recursos propios de la empresa apalancada
β_a = Beta de los activos (Nota después se explicara de donde proviene el concepto).
R_f = Tasa de interés sin riesgo de default
P_m = Prima de Mercado= Valor esperado de la rentabilidad del mercado por encima de R_f

4.1. Principio de conservación o distribución del riesgo

R (β_f) FIRMA = R (β_a) ACTIVOS [23]

Al igual que se puede pensar la firma como un portafolio de proyectos o activos o bien como un portafolio de deuda y/o equity se puede conceptualizar el riesgo de la firma desde estas dos perspectivas. El riesgo de portafolio de los activos o proyectos o el riesgo del portafolio de instrumentos de financiamiento (riesgo de los instrumentos de la deuda y riesgo de los instrumentos del patrimonio-equity).

De la teoría del portafolio podemos definir que el beta de un portafolio es la suma de los betas individuales por su valor en el portafolio. Esa idea se puede expresar como:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} \beta_i W_i \quad [24]$$

Entonces, y recogiendo el principio de la conservación del riesgo podemos anotar que el Beta de la empresa es igual al Beta de los activos o que es lo mismo decir que el beta de la firma es igual al beta de la deuda β_d mas el Beta del Patrimonio.

$$\beta_a = \beta_l = \beta_d + \beta_e \quad [25]$$

La matemática del beta de un financista moderno para diversos propósitos

Se definirá $k_u = f(k_e, k_d, D, E, T)$. Para tal efecto, partimos de dos ecuaciones:

1. $$WACC = \frac{Ek_e + Dk_d(1-T)}{E+D} \quad [26]$$

2. $$WACC = \frac{k_u[E + D(1-T)]}{E+D} \quad [27]$$

La ecuación anterior permite definir el k_u en términos de E, D y T sin incluir k_e y k_d. Con esta ecuación se indica que el k_u >WACC siempre y cuando haya deuda que pueda ser desgravable fiscalmente.

Para llegar a nuestro propósito de definir k_u reemplacemos la primera definición del WACC en la segunda y despejamos k_u. Entonces,

$$\frac{Ek_e + Dk_d(1-T)}{E+D} = k_u \frac{E + D(1-T)}{E+D}$$

$$k_u = \frac{Ek_e + Dk_d(1-T)}{E + D(1-T)} \quad [28]$$

Y se llega a la ecuación que define Ku como variable dependiente y esta explicada en la parte derecha de la ecuación, por la suma de los rendimientos del patrimonio y la deuda por sus pesos porcentuales.

A través de la ecuación que establece una relación entre k_e, k_u y k_d se puede establecer una relación de los betas β_e, β_u y β_d que están implícitos en los rendimientos exigidos por el modelo del CAPM.

Esto se puede reescribir al incluir el concepto del valor de la empresa sin deuda Vu, que va en el denominador de la segunda ecuación

$$K_u = \frac{EK_e + DK_d(1-T)}{E + D(1-T)} = \frac{EK_e + DK_d(1-T)}{V_u}$$

Se puede expresar $en\ terminos\ K_e$:

$$K_e = K_u + \frac{[(K_u - K_d)D(1-T)]}{E}$$

Si sustituimos,

$$K_e = K_u + {[(K_u - K_d)D(1-T)]}/{E} \qquad [29]$$

Si usamos el modelo CAPM para cada uno de los rendimientos y usamos las definiciones matemáticas dadas en la introducción del aporte de Linner y Sharpe al concepto de Beta, se concluye que:

$$\beta_e = \frac{\beta_u[E + D(1-T)] - \beta_d D(1-T)}{E} \qquad [30]$$

Por otro lado y si desarrollamos el concepto de la conservación del riesgo o como se distribuye el riesgo podemos definir el beta del patrimonio en función del beta de los activos y de la deuda. Este concepto es muy usado en algunos desarrollos prácticos.

$$\beta_l = \left[\beta_d \times \frac{D}{D+E}\right] + \left[\beta_e \times \frac{E}{D+E}\right]$$

$$\beta_l = \left[\beta_d \times \frac{D}{D+E}\right] + \left[\beta_e \times \frac{D}{D+E}\right] \qquad [31]$$

$$\beta_e = \frac{\left[\beta_l \times \frac{D}{D+E}\right] + \left[\beta_d \times \frac{D}{D+E}\right]}{\frac{E}{D+E}} \qquad [32]$$

$$\beta_e = \beta_l \times \frac{D+E}{E} - \beta_d \times \frac{D}{E} \qquad [33]$$

Otra forma de derivar el Beta del patrimonio –equity de una empresa apalancada- es desde la una de las ecuaciones de MM. Si retomamos la proposición de Modigliani-Miller en cuanto a definir que el Valor de una empresa apalancada es la suma del valor de una empresa apalancada más el valor presente de una serie finita de los ahorros fiscales preveniente de la palanca financiera.

$$V(L) = V(D) + V(E) = V_u + TD$$

$$V_u = V_e + V_d - TD = E + (1-T)D$$

$$\beta_l = \beta_u \times \frac{E(1-T)D}{E+D} + \beta_d \times \frac{TD}{E+D} \qquad [34]$$

Igualmente de la ecuación de Modigliani y Miller:

$$V_{Leverage\ Assets} = V_{Unlevereage\ Assets} + PVTS$$

$$PVTS(\infty) = \frac{GF \times T}{r} \Rightarrow \frac{r \times D \times T}{r} = TD$$

$$\beta_l = \left[\beta_u \times \frac{\beta_u}{\beta_u + TD}\right] + \left[\beta_d \times \frac{TD}{\beta_u + TD}\right]$$

Ahora bien reemplazando:

$$\beta_e = \left[\beta_u \times \left[\frac{E + (1-T)D}{D+E}\right] + \beta_d \times \frac{TD}{E+D}\right] \times \frac{D+E}{E} - \left[\frac{D}{E} \times \beta_d\right]$$

Simplificando

$$\beta_u = \frac{(1-T)D}{E + (1-T)D} \times \beta_d + \frac{E}{E + (1-T)} \times \beta_e \qquad [35]$$

Tres formulas muy importantes de estructura y costo de capital con impuestos corporativos:

$$\beta_e = \beta_u + (\beta_u - \beta) \times \frac{(1-T)D}{E}$$

$$WACC = \frac{D}{D+E} \times (1-T)K_d + \frac{E}{D+E} \times K_e$$

$$CAPM = r_f (1-T) + (r_p - r_f)\beta_l$$

Note que ahora tenemos cuatro Betas:

1. β_e = Beta del Equity con deuda
2. β_d =Beta de la Deuda
3. β_u = Beta de los activos Des-apalancados o beta desapalancada (All Equity Firm)
4. β_l = Beta de los activos

BIBLIOGRAFÍA.

Bodie Zvi, Kane Alex, Marcus Alan. –*Principios de Inversiones*-. España: Mc. Graw Hill, 2004. –578 p.– ISBN 84-481-4075-3

Bodie Zvi, Merton Robert. –*Finanzas*-. Mexico: Prentice Hall, 1999. – 464 p.- ISBN 970-17-0273-5

Cruz Merchán Juan Sergio. –*Lógicas y Dialécticas en las decisiones de Inversion*-.Colombia: #R Editores, 2001. -520 p.- ISBN 958-80-1767-x

Franco Modigliani, Merton H. Miller. The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment, American Economic Review. Vol 48. No 3, Junio de 1958: p. 261-297.

Mascareñas Juan. La Beta Apalancada. Universidad Complutense de Madrid. Diciembre de 2002.

Weston J. Fred, Copeland Thomas. -*Finanzas En Administración*-.Mexico: Mc. Graw Hill, 1995. - 1670 p.- ISBN 968-25-1101-1

Rufano Augusto. Riesgo de las Acciones: El modelo CAPM y el Factor Beta. Tactica Empresarial. Vol 3. Abril de 2003: p. 3-6

Sharpe William, Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. Journal of Finance. Septiembre de 1964: p. 425-442