

Una comparación de algunos métodos para cuantificar riesgo operativo

Andrés Mora Valencia

Borrador de investigación # 39

Colegio de Estudios Superiores de Administración

Bogotá, junio de 2010

Andrés Mora Valencia

Bogotá, D.C., junio de 2010

Corrección de estilo: Jenny A. Jiménez M.

Diagramación y diseño: Diego E. Romero V.

Impresión:

Comunicaciones

Cra. 6 No. 35 - 28 Casa Lleras

comunicaciones@cesa.edu.co

Todos los derechos reservados. Esta obra no puede ser reproducida sin el permiso previo escrito de la Editorial.

Impreso y hecho en Colombia

Printed and made in Colombia

Contenido

Resumen	5
Introducción.....	5
1. Modelos LDA.....	7
2. Metodología	8
3. Métodos a comparar	9
3.1. Distribución g-and-h.....	9
3.2. Estimación del OpVaR – método BK	15
3.3. Estimación del OpVaR – método MLE-W	19
3.4. Método MLE para ERM (maximum likelihood estimation for exponential regression model)	19
4. Simulación.....	21
5. Caso colombiano.....	24
6. Conclusiones.....	27
Referencias bibliográficas	28
Anexo 1. Estimación de parámetros de g-and-h para el caso Danish Fire data.....	30
Anexo 2. Resultados de la Simulación	33
Anexo 3. Ajuste de las pérdidas por riesgo operativo a una función de distribución.	34

Una comparación de algunos métodos para cuantificar riesgo operativo¹

Andrés Mora Valencia*

Resumen

Este artículo utiliza el enfoque de distribución de pérdidas LDA (*Loss Distribution Approach*) para cuantificar riesgo operativo y, mediante simulación Monte Carlo, se compararán tres métodos de cuantificación. Como complemento a un artículo anterior (Mora 2009b), se presenta el método g-and-h empleado por Dutta y Perry (2007) para calcular capital regulatorio al 99.9% en riesgo operativo. Los otros enfoques son: uno propuesto por Böcker y Klüppelberg (2005), quienes obtienen una fórmula analítica para estimar OpVaR cuando la distribución de los datos exhibe colas largas. El otro enfoque está basado en la teoría del valor extremo y utiliza el método de Beirlant et ál (1999) para estimar el índice de valor extremo de la distribución de pérdidas, con este valor se calcula el OpVaR mediante el estimador de Weissman (enfoque MLE-W). Finalmente se aplica el enfoque g-and-h y MLE-W a las pérdidas por riesgo operativo reportadas por las entidades financieras colombianas en 2008 para estimar OpVaR al 99.9% para 2009.

Palabras clave: Distribución g-and-h, Enfoque de Distribución de Pérdidas (LDA), Teoría de Valor Extremo (EVT), Índice de Valor Extremo (IVE), VaR Operativo (OpVaR).

JEL Classification: C15, G20, G21

Introducción

Teniendo en cuenta la definición del Comité de Basilea y de la Superintendencia Financiera de Colombia, riesgo operativo se puede definir como la pérdida potencial que resulta de fallas en los procesos internos, personas y sistemas, así como de eventos externos. Sin embargo existen algunas diferencias entre las dos definiciones. Por ejemplo, el regulador colombiano incluye riesgo legal y reputacional en su definición de riesgo operativo; mientras que Basilea II excluye riesgo estratégico y reputacional. Asimismo Basilea definió ocho líneas de negocio y siete tipos de eventos para registrar los datos de pérdida; mientras que la regulación colom-

¹ Agradezco de manera especial los comentarios y sugerencias realizados por el profesor José Alfredo Jiménez

* Profesor investigador del Colegio de Estudios Superiores de Administración –CESA–.

biana incluye diecinueve líneas de negocio (también llamadas líneas operativas) y siete tipos de evento (también conocidos como tipos de riesgo); aunque no necesariamente una entidad financiera debe contar con todas las diecinueve líneas operativas.

El acuerdo de Basilea II requerirá que las instituciones financieras (en especial las grandes) empleen el enfoque de medición avanzada AMA (Advanced Measurement Approaches) para modelar sus exposiciones por riesgo operativo. Dentro de los modelos AMA se describen tres metodologías que son: enfoque de medición interna (Internal Measurement Approach, IMA), enfoque de distribución de pérdidas (Loss Distribution Approach, LDA) y cuadros de mando (scorecards). Actualmente la regulación colombiana parece estar encaminada a que los bancos adapten el enfoque LDA dentro de sus sistemas de cálculo de capital regulatorio para este tipo de riesgo. Este documento se enfocará en el modelo LDA para calcular riesgo operativo. Sin embargo, una dificultad existente es la falta de información y datos históricos para obtener una medida de riesgo.

Bajo modelos LDA, Dutta y Perry (2007) emplean nuevas técnicas para medir riesgo operativo, entre ellas utilizan la distribución g-and-h para modelar las severidades por este tipo de riesgo. Aunque los autores señalan que esta distribución no es la única disponible para modelar datos de pérdida operativa, ellos encuentran que es la que mejor se desempeña en su estudio (usando *the 2004 Loss Data Collection Exercise for Operational Risk – 2004 LDCE*). La idea de este artículo es comparar mediante simulaciones Monte Carlo, medidas de riesgo calculadas utilizando el enfoque g-and-h, una aproximación analítica obtenida por Böcker y Klüppelberg (2005) y un enfoque basado en la teoría de valores extremos EVT (Extreme Value Theory).

EVT ha sido empleado en varios tipos de riesgo financiero con buenos resultados de ajuste y para riesgo operativo. Moscadelli (2004) analiza los datos de pérdida (*The 2002 Operational Risk Loss Data Collection Exercise – 2002 LDCE*), y compara la sensibilidad de análisis tradicionales comúnmente utilizados en el campo de actuaría con métodos de valores extremos para estimar las distribuciones de severidades. Moscadelli encuentra que EVT se desempeña mejor que los métodos tradicionales en todas las ocho líneas operativas.

Sin embargo, Degen, et ál (2007) encuentran que si los datos de pérdida son bien modelados por una distribución g-and-h, la estimación de cuantiles altos mediante el método POT (la técnica más comúnmente usada en EVT), por lo general convergerá muy lentamente y por consiguiente su estimación mediante EVT será imprecisa.

Este documento se divide en: sección 1, describe brevemente los modelos LDA; sección 2, presenta la metodología del artículo; sección 3, introduce los tres métodos a comparar; sección 4, presenta las simulaciones aplicando los tres métodos, descritos en la sección anterior, a pérdidas agregadas cuando las severidades se distribuyen Pareto; sección 5, aplica el enfoque g-and-h y MLE-W para estimar OpVaR con datos de pérdidas por riesgo operativo reportados por las instituciones financieras en Colombia para 2008; y finalmente la sección 6 concluye.

1. Modelos LDA

Los modelos LDA tienen sus raíces en la teoría de riesgo de seguros (insurance risk theory). Se revisará entonces el modelo Standard LDA que comprende los modelos Poisson compuesta y binomial negativa como casos especiales. Los modelos LDA se componen de tres elementos principalmente: (i) el componente de frecuencia, es decir, el número de pérdidas, (ii) el componente de severidad, es decir, la cantidad de las pérdidas individuales y (iii) las pérdidas totales, que se obtienen de “componer” la distribución de la frecuencia con la de la severidad. Las siguientes definiciones y ejemplos son tomados de Böcker y Klüppelberg (2005).

Definición 1 (Standard LDA)

El proceso de severidad:

Las severidades $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas (iid) que describen la magnitud de cada evento de pérdida.

1. El proceso de frecuencia:

El número $N(t)$ de eventos de pérdida en el intervalo de tiempo $[0, t]$ para $t \geq 0$ es aleatorio. El *proceso de conteo* resultante $(N(t))_{t \geq 0}$, es generado por una sucesión de puntos $(T(n))_{n \geq 1}$ de variables aleatorias no negativas que satisfacen:

$$0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$$

y

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

2. El proceso de severidad y el proceso de frecuencia se asumen ser independientes.

3. El proceso de pérdida agregada:

La pérdida agregada $S(t)$ al tiempo t constituye un proceso:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0. \square$$

Esta definición no requiere que la media y/o la varianza de las severidades X_k , sea finita; Moscadelli (2004) encuentra que distribuciones usadas para modelar severidades en riesgo operativo, exhiben colas muy largas donde tales momentos no se pueden calcular.

Las medidas de riesgo se calculan como un cuantil de la distribución de S . Para la mayoría de las distribuciones de severidades y frecuencia, esta distribución no puede ser calculada de manera analítica. Existen métodos de aproximación para solucionar este problema como el algoritmo recursivo de Panjer, simulación Monte Carlo y la transformada rápida de Fourier (FFT, Fast Fourier transform). En este documento se usará la simulación Monte Carlo.

Ejemplo 2 (Poisson-LDA y binomial-negativa-LDA)

- a. El Poisson-LDA es un Standard LDA, donde $(N(t))_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$, en particular,

$$P(N(t) = n) = p_t(n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

- a. El binomial-negativa-LDA es un Standard LDA, donde $(N(t))_{t \geq 0}$ está dado por un proceso binomial negativa que para $\beta, \gamma > 0$, satisface:

$$P(N(t) = n) = p_t(n) = \binom{\gamma + n - 1}{n} \left(\frac{\beta}{\beta + t} \right)^\gamma \left(\frac{t}{\beta + t} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \square$$

- a. La distribución binomial negativa es una mezcla gamma de una distribución de Poisson, es decir, que esta puede ser vista como una distribución Poisson donde el parámetro de intensidad λ , es una variable aleatoria que se distribuye gamma. \mathbb{N}_0 denota el conjunto de los enteros no negativos.

2. Metodología

Este artículo compara medidas de OpVaR estimadas por tres enfoques y mediante simulaciones Monte Carlo de pérdidas por riesgo operativo se comparan con su cuantil empírico. La metodología usada para estimar los parámetros de la distribución g-and-h, que se ajusten a los datos, es la formulada por Hoaglin (1985), el cual es un método basado en cuantiles. Varios autores argumentan que un método de estimación de parámetros mediante máxima verosimilitud asigna pesos iguales a todos los datos usados en el ajuste, mientras que el método basado en cuantiles puede poner más peso en las colas de la distribución. Hoaglin (1985) y el Apéndice C de Dutta Perry (2007) describen en detalle el procedimiento de estimación de los parámetros de la distribución g-and-h. Con los parámetros estimados se calcula el cuantil como la inversa de la función de distribución acumulada para hallar el OpVaR. El segundo enfoque utiliza la aproximación analítica encontrada por Bökler y Klüpelberg (2005) para datos de pérdida con colas largas; en especial distribuciones subexponenciales. El tercer enfoque basado en EVT, estima el índice de valor extremo de la distribución de pérdidas mediante la metodología propuesta por Beirlant et ál (1999) y con este valor se calcula el OpVaR mediante el estimador de Weissman.

3. Métodos a comparar

Esta sección describe brevemente los tres métodos a comparar para cuantificar riesgo operativo. Se comienza con el enfoque g-and-h, seguido por el enfoque BK descrito en Böcker y Klüppelberg (2005) y brevemente en Mora (2009b), terminando con un método basado en la teoría del valor extremo.

3.1. Distribución g-and-h

La distribución g-and-h ya ha sido aplicadas a finanzas, como por ejemplo Badrinath and Chatterjee (1988), Mills (1995), y Badrinath and Chatterjee (1991), quienes usaron g-and-h para modelar el retorno en un índice accionario, así como el retorno en acciones en varios mercados. Dutta y Babbel (2002) y Dutta y Babbel (2005) usaron g-and-h para modelar tasas de interés y opciones en tasas de interés, mientras que Dutta y Perry (2007) usan g-and-h para estimar riesgo operativo.

La distribución g-and-h fue introducida por Tukey en 1977 y a continuación se presenta una definición básica y sus propiedades:

Definición 3

Sea $Z \sim N(0, 1)$ una variable aleatoria normal estándar. Una variable aleatoria X se dice que tiene una distribución g-and-h con parámetros $a, b, g, h \in \mathbb{R}$, si X satisface:

$$X = a + b \frac{e^{gZ} - 1}{g} e^{hZ^2/2}, \quad (1)$$

y se denota $X \sim g\text{-and-h}$. \square

El parámetro g controla la cantidad y dirección de asimetría, mientras que el parámetro h controla la cantidad de elongación (kurtosis). La distribución es más sesgada a la derecha a mayores valores de g , y valores positivos de h producen elongaciones positivas. Entre mayor es el valor de h mayor es la elongación.

Cuando $h = 0$, la ecuación (1) es $X = a + b \frac{e^{gZ} - 1}{g}$ y se convierte en la distribución g que corresponde a una distribución lognormal escalada. Cuando $g = 0$, la ecuación (1) se interpreta como $X = a + bZe^{hZ^2/2}$, referida como la distribución h . Cuando $g = h = 0$ X se distribuye normal.

Propiedades 4

Martínez (1981), Martínez & Iglewicz (1984), Hoaglin (1985), Badrinath y Chatterjee (1988 y 1991) han estudiado las propiedades de la distribución g-and-h. Una propiedad importante es que muchas distribuciones pueden ser generadas a partir de la g-and-h para valores específicos de los parámetros. Las siguientes propiedades están basadas en Dutta y Babel (2002) y Degen et ál. (2007):

1. X es una transformación estrictamente creciente de Z . Esto es, la transformación de una normal estándar a una g-and-h es uno a uno.
2. Si $a = 0$, entonces $X_{-g,h}(Z) = -X_{g,h}(-Z)$. Cambiar el signo de g cambia la dirección pero no el valor de asimetría de la distribución g-and-h.
3. Para $h = 0$ y $g \rightarrow 0$, la distribución g-and-h converge a una distribución normal.
4. La distribución g es una distribución lognormal escalada.
5. El parámetro de localización a de la distribución g-and-h es la mediana del conjunto de datos y el percentil p -ésimo del valor de g está dado por:

$$g_p = -\left(\frac{1}{Z_p}\right) \ln\left(\frac{X_{1-p} - X_{0.5}}{X_{0.5} - X_p}\right)$$

Como $Z_{0.5} = 0$ y al reemplazarlo en (1) se obtiene $a = X_{0.5}$. Al escoger diferentes valores de p se obtienen diferentes estimados del parámetro g , para solucionar este problema algunos autores han sugerido usar la mediana de los diferentes valores de g_p . Jiménez y Martínez (2006) proponen la estimación del parámetro g de una manera más sencilla cuando h tiende a cero.

6. Para un valor dado de g , el valor de h en la distribución g-and-h está dado por:

$$\ln \frac{g(X_p - X_{1-p})}{e^{gZ_p} - e^{-gZ_p}} = \ln b + h(Z_p^2/2)$$

De esta manera se puede obtener el valor de h como el coeficiente de la regresión de:

$$\ln \frac{g(X_p - X_{1-p})}{e^{gZ_p} - e^{-gZ_p}} \text{ contra } (Z_p^2/2).$$

El valor de b se obtiene tomando la función exponencial del intercepto de la regresión. La expresión $\frac{g(X_p - X_{1-p})}{e^{gZ_p} - e^{-gZ_p}}$ es conocida como *full spread* (FS).

7. La distribución g-and-h es una función de variación regular (ver definición 10) con índice $-1/h$ (asumiendo $h > 0$). La distribución g es una función subexponencial (estas distribuciones obtienen su nombre debido a que sus colas decaen más lentamente que las de una exponencial); sin embargo no es de variación regular (ver Teorema 2.1. en Degen et ál (2007)).

Un resultado importante del artículo de Degen et ál (2007) es que si datos de pérdida son bien modelados por una distribución g-and-h con $g, h > 0$ la estimación de cuantiles altos mediante el método POT por lo general convergerá muy lentamente y por consiguiente su estimación mediante EVT será impreciso. A continuación se presenta cómo estimar cuantiles de una distribución g-and-h cuando

se han estimado los parámetros de la distribución. Esta sección está basada en la sección 2.1. de Degen et ál (2007).

3.1.1. Estimación del cuantil mediante la aproximación g-and-h

Puesto que $k(x) = \frac{e^{gx} - 1}{g} e^{hx^2/2}$ para $h > 0$ es estrictamente creciente, la función de distribución acumulada de una variable aleatoria g-and-h X , se puede escribir como:

$$F(x) = \Phi(k^{-1}(x)),$$

donde Φ denota la función de distribución acumulada de una normal estándar. Teniendo en cuenta los parámetros de localización y escala a y b , el VaR (ver Definición 6 para una definición formal del VaR) se estima de la siguiente forma:

$$\text{VaR}_\alpha = a + bk(\Phi^{-1}(\alpha)), \quad 0 < \alpha < 1.$$

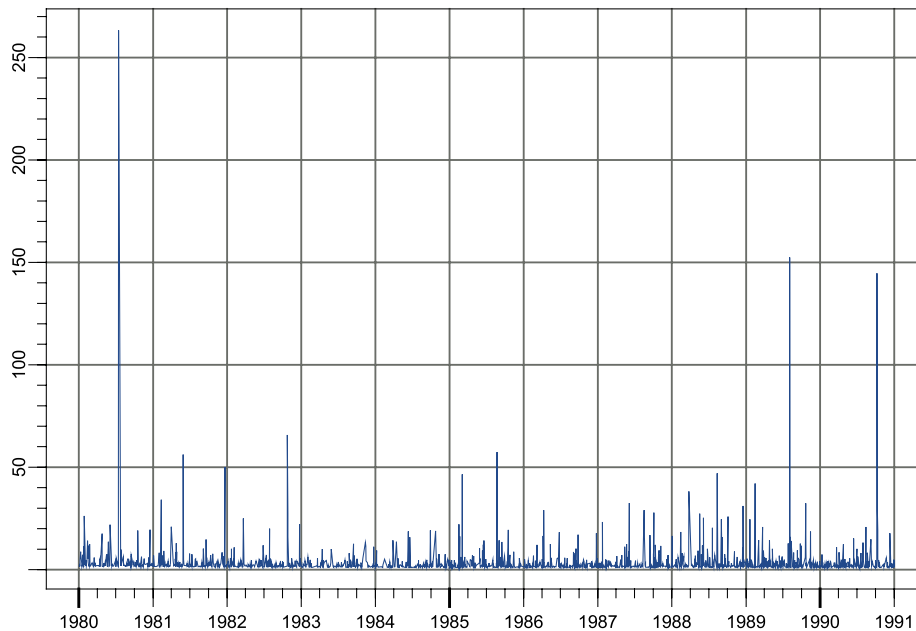
En cuanto a los momentos de la distribución g-and-h, Martínez (1981) obtiene el n -ésimo momento de la distribución g-and-h para ciertos valores de h . Hoaglin (1985) obtiene los cuatro primeros momentos para la distribución g-and-h, y también se pueden encontrar en el Apéndice D de Dutta y Perry (2007).

Ejemplo 5 (Caso Danish Fire Data)

En este ejemplo y en las demás aplicaciones del método g-and-h, se emplea la metodología propuesta por Hoaglin (1985), en especial la sección 11D para estimar g . Esta metodología está basada en cuantiles y en comparación con otras metodologías como el método de momentos y máxima verosimilitud, el método basado en cuantiles puede ser más preciso en el ajuste de las colas de la distribución, como lo afirman varios autores que han empleado la distribución g-and-h. Este método no es apropiado para todas las distribuciones; sin embargo sí es adecuado para g-and-h la cual es una transformación de una normal estándar.

Los datos del ejemplo corresponden a 2.167 reclamos en seguro contra el fuego en Dinamarca (Danish Fire Data), donde las pérdidas se expresan en millones de Coronas Danesas (DKM) desde marzo 1 de 1980 hasta diciembre 12 de 1990. Estos datos han sido previamente estudiados por varios autores bajo el marco de EVT. Se empieza con un análisis exploratorio de los datos. La Figura 1 muestra la serie de tiempo para el Danish Fire data.

Figura 1. Danish Fire Data



Fuente: cálculos del autor

A continuación se muestra el resumen del análisis y se observa que la distribución de las pérdidas es sesgada a la derecha y presenta alta curtosis (buen ejemplo para estudio de colas largas).

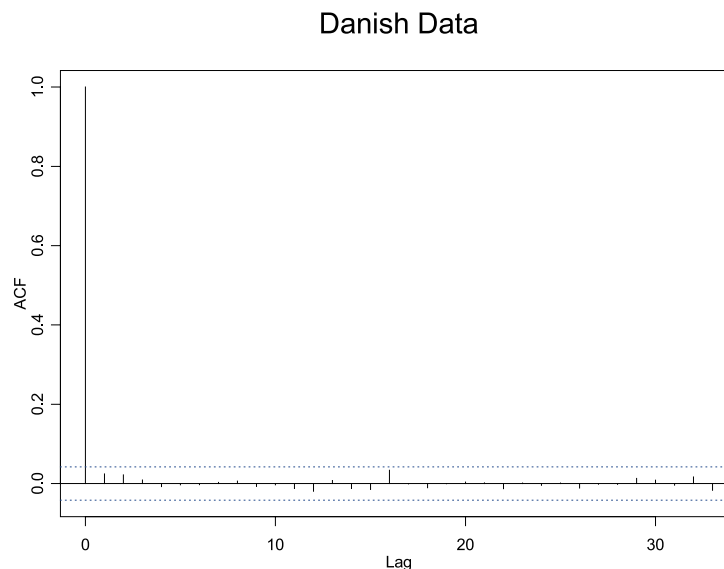
Cuadro 1. Estadísticas de Danish data

Danish data	Pérdida en DKM
Min	1.00
Primer cuartil	1.32
Mediana	1.77
Media	3.38
Sesgo	18.76
Curtosis	483.76
Tercer cuartil	2.96
Max	263.25
$\hat{Q}(0.99)$	26.04

Fuente: cálculos del autor

El cuantil al 99% de los datos empíricos es igual a 26.04 DKM. En la Tabla 1 se comparan cuantiles a este nivel mediante diferentes métodos. A continuación se observa el gráfico de función de autocorrelación (ACF, autocorrelation function).

Figura 2. ACF de Danish data



Fuente: cálculos del autor

Como se observa en la Figura anterior los datos no exhiben correlación serial. Esto sucede a menudo con datos del sector seguros y se puede presumir que son observaciones “iid”, sin embargo esto no es muy común con los datos financieros. Vea Resnick (1997) para pruebas adicionales de independencia aplicados a Danish data.

A continuación se muestra la estimación de cuantiles para los datos comparando con otros estudios:

Tabla 1. El método POT utiliza un umbral de 5 DKM.

Cuantil	Empírico	POT	g-and-h*	g-and-h**
90%	5.54	5.64	5.72	5.60
95%	9.97	9.30	9.43	9.14
99%	26.04	27.51	27.32	28.17
99.9%	131.55	121.17	101.51	140.15

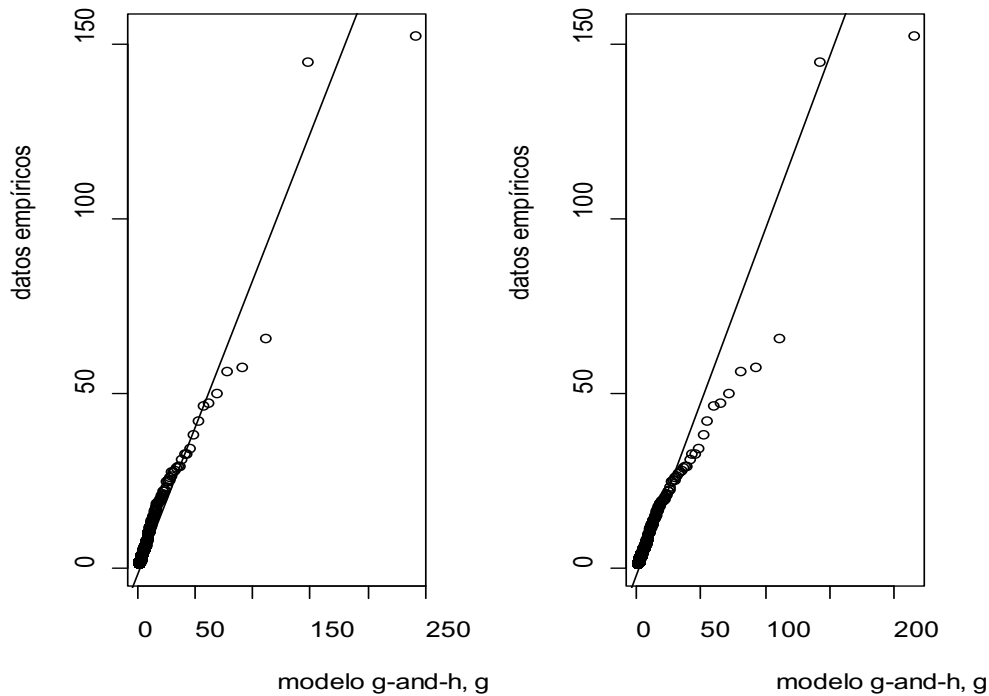
* es el calculado en Degen et ál. (2007)

** calculado en este documento y descrito en el Anexo 1.

Fuente: Degen et ál (2007) y cálculos del autor

Degen et ál (2007) usan un parámetro g constante mientras que en este artículo se usa un polinomio de g en z^2 (ver Anexo 1). Aunque este último método puede brindar una aproximación más cercana al cuantil de los datos, introducir una variable adicional (z^2) en la estimación de los parámetros, reduce robustez en la estimación de los mismos.

Figura 3. Gráfico de cuantiles usando un modelo teórico g-and-h para Danish Fire Data con parámetro g no constante (izquierda) y parámetro g constante (derecha).



Fuente: cálculos del autor

En la figura 3 se muestra que el modelo de g-and-h con g no constante se ajusta mejor a los datos de Danish. □

Una alternativa para estimar el OpVaR que está dado por cuantiles altos de la distribución de pérdida agregada G_t (la distribución de S_t de la Definición 1), es concentrarse en la cola derecha de esta distribución en lugar de la distribución entera. Un resultado importante en actuaria es que para un modelo Standard LDA con severidades subexponenciales bajo condiciones débiles de regularidad y para un valor de $t > 0$ fijo (ver Teorema 1.3.9 de Embrechts et ál (1997)) se tiene que:

$$\bar{G}_t(x) \sim E(N(t))\bar{F}(x), \quad x \rightarrow \infty, (2)$$

Donde $E(N(t))$ es el valor esperado de la frecuencia de pérdidas, $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ y $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$ son las distribuciones de las colas de las severidades y de la pérdida agregada respectivamente. El símbolo “ \sim ” significa que el cociente entre el lado derecho y el lado izquierdo de la ecuación (2) tiende a 1, cuando x tiende a valores muy grandes.

Se ha mostrado que la relación en (2) se cumple cuando se usan modelos Poisson-LDA y binomial-negativa-LDA (ver Ejemplos 1.3.10 y 1.3.11 de Embrechts et

ál (1997)). Estos resultados son importantes para la estimación del OpVaR como se verá más adelante.

3.2. Estimación del OpVaR – método BK

Usando la definición del VaR como cuantil (ver Definición 6) y la relación en (2), Böcker y Klüppelberg (2005) obtienen una fórmula analítica para estimar OpVaR en modelos LDA que se muestra en el Teorema 7.

Definición 6 (Value at Risk)

Suponga que G_t es la distribución de pérdida agregada. Entonces el Value at Risk (VaR) al tiempo t a un nivel de confiabilidad α se define como el α -cuantil de la distribución de pérdida:

$$\text{VaR}_t(\alpha) = G_t^{\leftarrow}(\alpha), \quad \alpha \in (0,1)$$

Donde $G_t^{\leftarrow}(\alpha) = \inf \{x \in R : G_t(x) \geq \alpha\}$, $0 < \alpha < 1$, es la inversa generalizada de G_t . Si G_t es continua entonces $\text{VaR}_t(\alpha) = G_t^{-1}(\alpha)$ \square

Usando (2) los autores obtienen una formula asintótica para OpVaR.

Teorema 7 (OpVaR analítico)

Considere un modelo Standard LDA para un $t > 0$ fijo y una severidad subexponencial con función de distribución F . Asuma además que el estimado de cola en (2) se cumple. Entonces el $\text{VaR}_t(\alpha)$ satisface la aproximación:

$$\text{VaR}_t(\alpha) = F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1-\alpha}{E(N(t))} (1 + o(1)) \right), \quad \alpha \rightarrow 1. (3) \square$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en Böcker y Klüppelberg (2005). El teorema tiene dos resultados importantes. El primero es que OpVaR a niveles altos de confiabilidad solo depende de la cola y no del cuerpo de la distribución de la pérdida de *severidades*. Segundo, la frecuencia entra en (3) a manera de *valor esperado*, como consecuencia, la sobredispersión modelada por la distribución binomial negativa no tiene efecto asintótico en el cálculo del OpVaR.

El resultado obtenido en (3) se da para una clase general de modelos LDA. Para obtener una aproximación de primer orden para el OpVaR, basta combinar (3) con la cola de la distribución subexponencial de la severidad F .

La siguiente tabla muestra aproximaciones de primer orden del $\text{VaR}_t(\square)$ con algunas funciones subexponenciales de severidad:

Tabla 2. Aproximación de primer orden del $VaR_t(\alpha)$ cuando $\alpha \rightarrow 1$ para la distribución de pérdida agregada con distribuciones de severidad más comunes. Si se asume que la distribución de frecuencias sigue un proceso homogéneo de Poisson $E(N(t)) = \lambda t$, y si es binomial negativa, $E(N(t)) = \gamma t / \beta$.

Función	$VaR_t(\alpha)$
Lognormal	$\exp\left[\mu - \sigma\Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{E(N(t))}\right)\right]$
Weibull	$\theta\left[\ln\left(\frac{E(N(t))}{1-\alpha}\right)\right]^{1/\tau}$
Pareto	$\theta\left[\left(\frac{E(N(t))}{1-\alpha}\right)^{\xi} - 1\right]$

Fuente: Böcker y Klüppelberg (2005)

Ejemplo 8 (modelo Pareto - LDA) (t4)

El modelo Pareto-LDA es un modelo Standard LDA dado en la definición 1 con severidades $(X_k)_{k \in N}$ distribuidas Pareto, es decir, para parámetros $\xi, \theta > 0$:

$$F(x) = \left(1 + \frac{x}{\theta}\right)^{-1/\xi}, \quad x > 0.$$

Como resultado del teorema 7:

$$VaR_t(\alpha) \sim \theta \left(\frac{E(N(t))}{1-\alpha}\right)^{\xi}, \quad \alpha \rightarrow 1. \quad (4)$$

En realidad, cualquier distribución de severidad que satisface $F(x) \sim (x/\theta)^{-1/\xi}$ cuando $x \rightarrow \infty$ se obtiene la aproximación dada en (4). \square

Las siguientes definiciones se pueden encontrar en Embrechts et ál (1997) y son de importancia para enunciar el Teorema 13 más adelante.

Definición 9 (Función de variación lenta)

Una función positiva, Lebesgue-medible L en $(0, \infty)$ es de variación lenta en ∞ si:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{L(ux)}{L(u)} = 1, \quad x > 0 \square$$

Ejemplos de funciones de variación lenta son las constantes, logarítmicas, potencias de logaritmos y funciones de logaritmos iterados.

Definición 10 (Funciones de variación regular)

Sea f una función positiva medible. Si para algún $\rho \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(xt)}{f(t)} = x^{-\rho}, \quad x > 0, (5)$$

Entonces f se denomina de variación regular con índice ρ . \square

No todas las funciones de variación regular son funciones subexponenciales, como por ejemplo la distribución Weibull de cola larga y la distribución lognormal.

Definición 11 (Colas de distribución de variación regular)

Sea X una variable aleatoria con cola de distribución $\bar{F}(x) := 1 - F(x) = \Pr(X > x)$ para $x > 0$. Si para \bar{F} la relación (5) se da para algún $\rho \geq 0$, entonces X se denomina variación regular con índice $-\rho$ y se denota por $\bar{F} \in RV_{-\rho}$. La cantidad ρ se denomina también el *índice de la cola* de F . \square

Se define $RV := \bigcup_{\rho \geq 0} RV_{-\rho}$.

Ejemplo 12 (Modelo compuesto Poisson – Subexponencial “SCP”)

Es un modelo de pérdida agregada donde la distribución de la severidad es subexponencial y la distribución de las frecuencias sigue un proceso homogéneo de Poisson; esto es:

1. El proceso de severidad: Las severidades $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son variables aleatorias positivas (iid) con función de distribución subexponencial que describen la magnitud de cada evento de pérdida.
2. El proceso de frecuencia: El número $N(t)$ de eventos de pérdida en el intervalo de tiempo $[0, t]$ para $t \geq 0$ es aleatorio, donde $(N(t))_{t \geq 0}$, es un proceso homogéneo de Poisson con intensidad $\lambda > 0$:

$$P(N(t) = n) = p_t(n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

3. El proceso de severidad y el proceso de frecuencia se asumen ser independientes.
4. El proceso de pérdida agregada: La pérdida agregada $S(t)$ al tiempo t constituye un proceso:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0. \square$$

Teorema 13 (OpVaR analítico para el modelo SCP)

Considere el modelo de pérdida agregada SCP.

Si $F \in \mathcal{S} \cap (RV \cup RV_\infty)$, entonces $VaR_t(\alpha)$ está asintóticamente dado por:

$$VaR_t(\alpha) \sim F^{\leftarrow} \left(1 - \frac{1-\alpha}{\lambda t} \right), \quad \alpha \rightarrow 1.$$

La cola de la distribución de severidad pertenece a $RV_{-\rho}$ para $\rho > 0$, es decir $\bar{F}(x) = x^{-\rho} L(x)$ para $x \geq 0$ y para alguna función de variación lenta L si y solo si:

$$VaR_t(\alpha) \sim \left(\frac{\lambda t}{1-\alpha} \right)^{1/\rho} \tilde{L} \left(\frac{1}{1-\alpha} \right), \quad \alpha \rightarrow 1.$$

Donde \tilde{L} es una función de variación lenta y S es función subexponencial. \square

La demostración de este teorema se puede encontrar en Böcker y Klüppelberg (2006). El problema que surge al aplicar herramientas de EVT es que en datos empíricos por lo general \tilde{L} no se conoce, pero si asumimos una función de distribución para modelar severidades, la función de variación lenta sí se conoce. En las simulaciones se usará un modelo Pareto-Poisson LDA que es un caso especial de un modelo SCP donde las severidades se distribuyen Pareto. Por consiguiente el OpVaR puede ser calculado analíticamente de la siguiente forma:

$$VaR_t(\alpha) \sim \theta \left[\left(\frac{\lambda t}{1-\alpha} \right)^\xi - 1 \right] \sim \theta \left(\frac{\lambda t}{1-\alpha} \right)^\xi, \quad \alpha \rightarrow 1. (6)$$

Como se puede observar, la expresión anterior es la misma obtenida en (4) reemplazando $E(N(t))$ por el valor esperado de un proceso Poisson homogéneo. A continuación se presenta otra metodología alterna para calcular el riesgo operativo basado en herramientas de EVT.

3.3. Estimación del OpVaR – método MLE-W

Otra alternativa es estimar cuantiles en especial para riesgo operativo, mediante teoría de valor extremo (EVT, Extreme Value Theory). Existen dos clases de modelos para tratar valores extremos: *block maxima* (máximos por bloque) y *POT* (picos sobre el umbral). El método POT es la técnica más usada para analizar la cola de una función de distribución. Estas dos técnicas están basadas en modelos distribucionales obtenidas a partir de teorías asintóticas.

El problema con estos métodos es la estimación de los parámetros de las distribuciones límites, en particular el parámetro de forma (también llamado el índice de valor extremo, ξ) el cual determina el comportamiento de los valores extremos. Determinar el umbral en el método POT, conlleva a un *trade-off* entre sesgo y varianza en la estimación de los parámetros de la función de distribución que se asume para ajustar los valores extremos. Al usar métodos basados en cuantiles (por ejemplo el estimador de Hill), también depende de la elección *apropiada* de estadísticos ordenados superiores. Elegir el umbral óptimo (en el método POT) conlleva al mismo problema de elegir el número óptimo k de estadísticos ordenados superiores (en el estimador de Hill). Si se utiliza el método block máxima, sesgo se presenta con bloques muy pequeños y varianza en el caso contrario.

De esta manera, la estimación del índice de valor extremo se convierte en un problema importante para estimar de manera confiable cuantiles altos como una medida de riesgo siguiendo la técnica EVT. Sin embargo, la selección de k (o del umbral) para estimar el índice de valor extremo no es una tarea fácil. En Mora (2009a) se trata este problema y se presenta un análisis comparativo de algunos estimadores del IVE. De Fournouelle et ál (2004), también examinan los datos analizados por Moscadelli (2004) y sugieren aplicar varias técnicas para encontrar el umbral al usar el método POT, por tal razón en esta sección se utilizará el método MLE para ERM y así obtener un estimado del IVE de la distribución de pérdidas y el estimador de Weissman para estimar un cuantil alto como medida de OpVaR.

3.4. Método MLE para ERM

(maximum likelihood estimation for exponential regression model)

Beirlant et ál (1999) introducen un modelo de regresión exponencial basados en log-espaciados entre estadísticos ordenados consecutivos y extremos de una distribución tipo – Pareto con el fin de reducir el sesgo que se presenta en la estimación del índice de valor extremo en el gráfico de Hill.

Definición 14 (Distribuciones tipo-Pareto)

Una distribución tipo-Pareto o de colas largas es una distribución F la cual satisface:

$$1 - F(x) = x^{-1/\xi} L(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad \xi > 0,$$

donde L es una función de variación lenta para todo $x > 0$. Distribuciones tipo-Pareto también se denominan “distribuciones con cola de Pareto”. Ejemplos de estas distribuciones son Pareto, gamma inversa, t -Student, loggamma, F y Burr.

La selección de k . Existen varios métodos adaptativos para escoger k ; vea por ejemplo la Sección 4.7 de Beirlant et ál. (2004) y las referencias allí contenidas. Un método puede ser minimizar el *error cuadrático medio asintótico* (AMSE, Asymptotic Mean Squared Error) del estimador de Hill, que está dado por:

$$\begin{aligned} AMSE(\hat{\xi}_{k,n}^{(H)}) &= A \text{var}(\hat{\xi}_{k,n}^{(H)}) + ABias(\hat{\xi}_{k,n}^{(H)}) \\ &= \frac{\xi^2}{k} + \left(\frac{b_{n,k}}{1-\rho} \right)^2. \end{aligned}$$

La idea es estimar k “óptimo” mediante el estimador de Hill (ver por ejemplo la Sección 4 de Beirlant et al. (1999)), donde:

$$\hat{k} = \arg \min_{k; k > 10} \left(\frac{\hat{\xi}_k^2}{k} + \left(\frac{\hat{b}_{n,k}}{1-\hat{\rho}_k} \right)^2 \right),$$

$\hat{\xi}$, \hat{b} y $\hat{\rho}$ denotan los estimadores de máxima verosimilitud de ξ , b y ρ respectivamente, y son obtenidos mediante el método MLE para ERM.

Estimador de Weissman. Asuma que la linealidad en el gráfico de cuantiles de Pareto (ver sección 1.2.1 de Beirlant et ál. (2004) para más detalles) persiste desde las k observaciones más grandes (hasta infinito), entonces podemos usar la línea con ecuación:

$$y = \log X_{n-k,n} + \hat{\xi}_{k,n}^{(H)} \left(x + \log \left(\frac{k+1}{n+1} \right) \right),$$

anclado en el punto $\left(-\log \left(\frac{k+1}{n+1} \right), \log X_{n-k,n} \right)$. Sea $x = -\log p$ para obtener el estimado de $Q(1-p)$:

$$\begin{aligned} \hat{Q}(1-p) &= \exp \left(\log X_{n-k,n} + \hat{\xi}_{k,n}^{(H)} \log \left(\frac{k+1}{(n+1)p} \right) \right) \\ &= X_{n-k,n} \left(\frac{k+1}{(n+1)p} \right)^{\hat{\xi}_{k,n}^{(H)}}, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Donde p es un número muy pequeño entre 0 y 1.

Para seleccionar el k “óptimo” se minimiza el AMSE con el método MLE para ERM.

4. Simulación

Esta sección presenta simulaciones Monte Carlo de pérdidas por riesgo operativo utilizando los métodos vistos anteriormente para calcular OpVaR (g-and-h, BK y MLE-W) para modelos Pareto – LDA (como en el Ejemplo 8), es decir, la severidad se distribuye Pareto con parámetros $\xi = 0.6, 1.0$ y 1.7 y la frecuencia de los eventos de pérdida (en estas simulaciones) se distribuye Poisson con parámetro λ igual a 100.

Para el método g-and-h se utiliza el método desarrollado por Hoaglin(1985), como se aplicó al Ejemplo 5. Mientras que para el método BK se utiliza la fórmula (6) y para MLE-W se utiliza los scripts en S-PLUS elaborados por Beirlant J., Goegebeur Y., Segers J., Teugels J., de Waal D., Ferro C., y Vandewalle B.; y se pueden encontrar en ucs.kuleuven.be/Wiley/index.html (Chapter 4). Los archivos que se utilizaron fueron: Hill2oQV.SSC para estimar el IVE mediante MLE para ERM y Hillkopt.SSC para encontrar el valor de k “óptimo” que minimiza el AMSE al estimar IVE.

Caso 1

Este caso es una simulación de 100,000 realizaciones de un modelo Pareto-Poisson LDA con $\lambda = 100$ para Poisson. Parámetros de la distribución Pareto son $\theta = 1$ y $\xi = 0.6$ (1/1.7).

Figura 4. Simulación de 100,000 datos de un modelo Pareto-Poisson LDA (CPoi(100,Pa(1,1/1.7)))

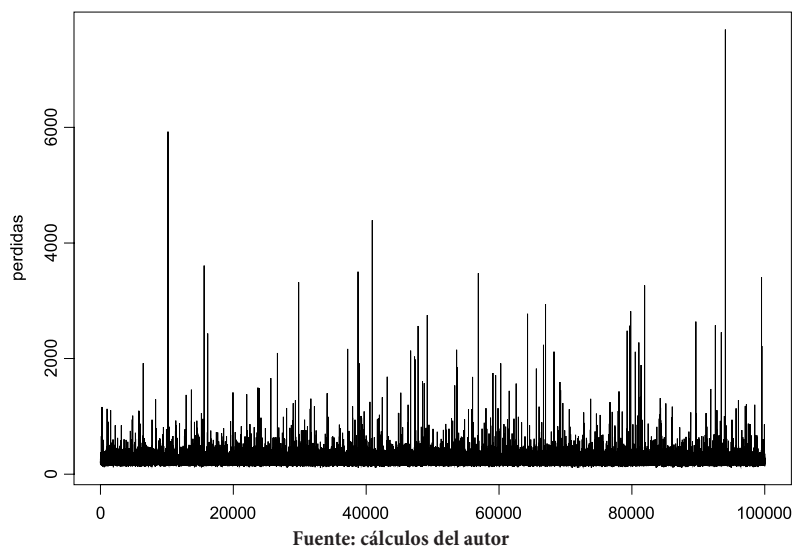
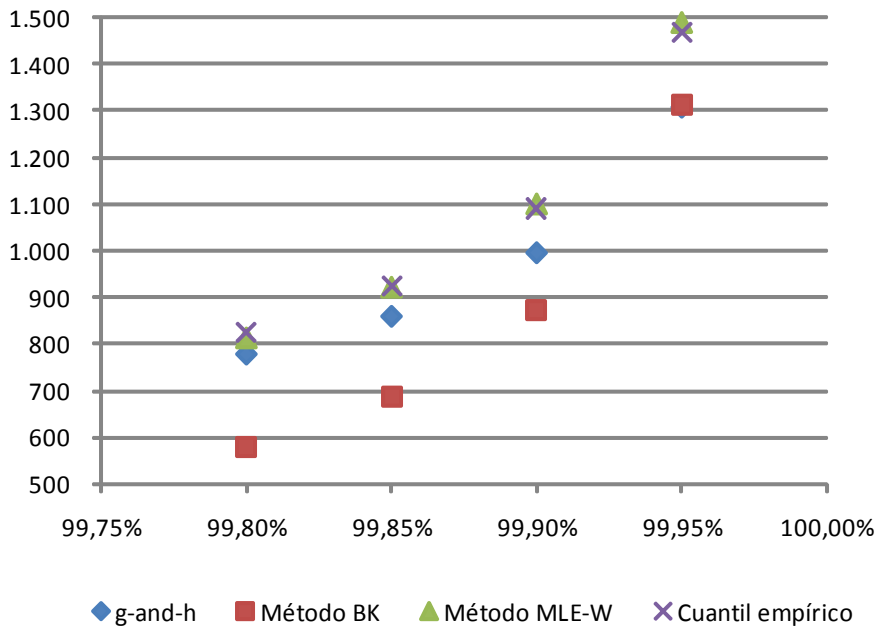


Figura 5. Comparación de los métodos a diferentes valores de cuantiles para CPoi(100,Pa(1,1/1.7)). El valor de $X_n - k$, n usado es 669.3 dado que el k -óptimo es 311 cuando se minimiza el AMSE (0.06%) por el método de MLE para ERM.

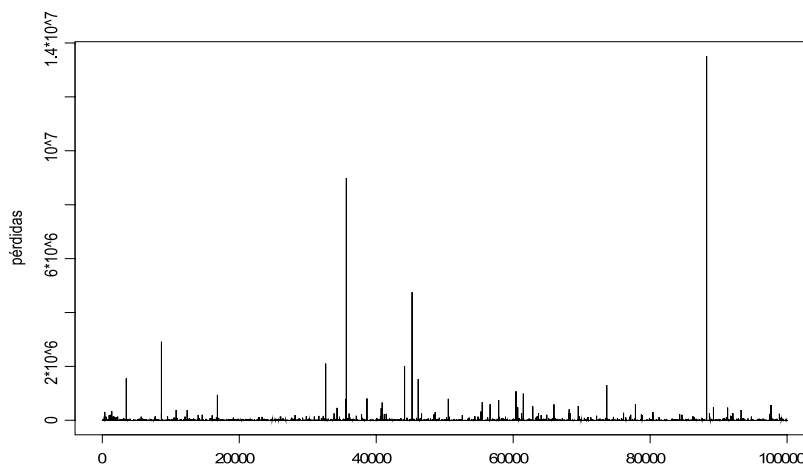


Fuente: cálculos del autor

Caso 2

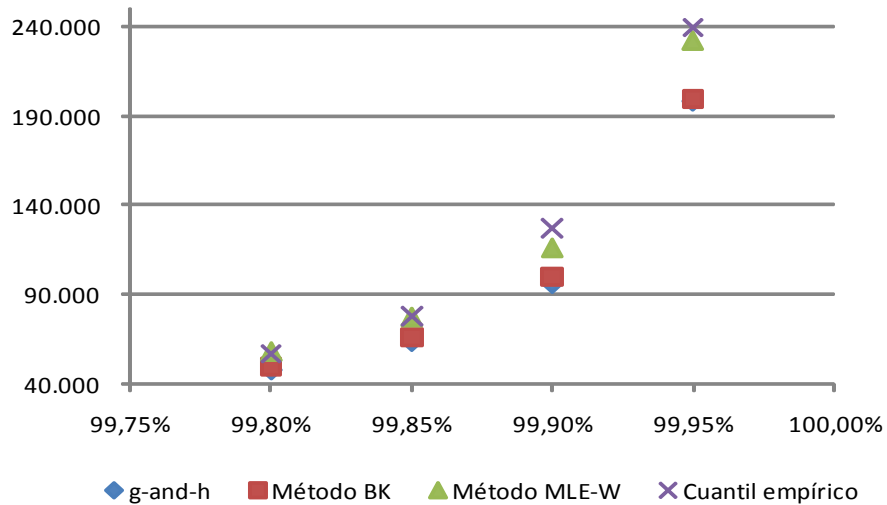
El Caso 2 es una simulación de 100,000 realizaciones de un modelo Pareto-Poisson LDA con $\lambda = 100$ para Poisson. Parámetros de la distribución Pareto son $\theta = 1$ y $\zeta = 1$.

Figura 6. Simulación de 100,000 datos de un modelo Pareto-Poisson LDA (CPoi(100,Pa(1,1))).



Fuente: cálculos del autor

Figura 7. Comparación de los métodos a diferentes valores de cuantiles para CPoi(100,Pa(1,1)). El valor de $X_n - k$, n usado es 6,882.021 dado que el k -óptimo es 1,689 cuando se minimiza el AMSE (0.06%) por el método de MLE para ERM.

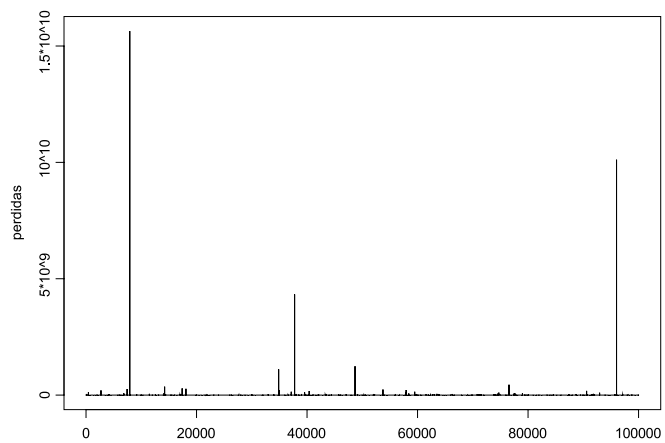


Fuente: cálculos del autor

Caso 3

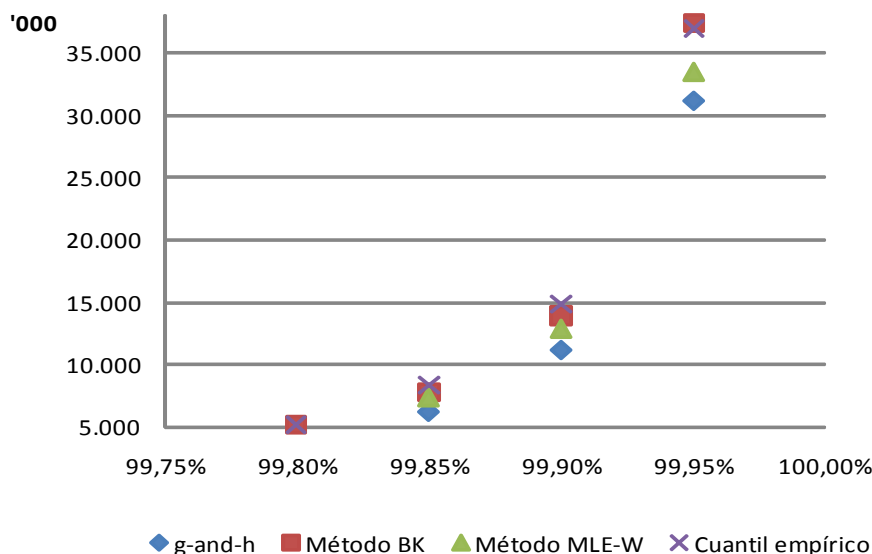
Este caso contiene un modelo de media infinita para la severidad y es una simulación de 100,000 realizaciones de un modelo Pareto-Poisson LDA con $\lambda = 100$ para Poisson. Parámetros de la distribución Pareto son $\alpha = 1$ y $\beta = 1.42$ (1/0.7).

Figura 8. Simulación de 100,000 datos de un modelo Pareto-Poisson LDA (CPoi(100,Pa(1,1/0.7))).



Fuente: cálculos del autor

Figura 9. Comparación de los métodos a diferentes valores de cuantiles para CPoi(100,Pa(1,1)). El valor de X_{n-k} , n usado es 24,541.6 dado que el k -óptimo es 9,275 cuando se minimiza el AMSE (0.02%) por el método de MLE para ERM.



Fuente: cálculos del autor

Comentarios

En los resultados de las simulaciones se observa que el OpVaR calculado mediante método MLE-W se aproxima más a los cuantiles empíricos de las distribuciones de pérdida simuladas para los casos donde la severidades se distribuyen Pareto con parámetros $\alpha = 0.6$ y 1.0 . El método g-and-h se acerca más al cuantil empírico cuando $\alpha = 0.6$. Sin embargo cuando la severidad se distribuye Pareto con parámetro $\alpha = 1.42$, el método que da un mejor aproximado al cuantil empírico es BK. Este último caso corresponde a los modelos de “media infinita” (*infinite mean models*) donde las distribuciones de severidades exhiben colas extremadamente largas y el cálculo tradicional de VaR puede guiar a cargos de capital absurdamente altos en estos casos. Estos problemas han sido analizados y discutidos por Nelehová et ál (2006), y los cargos de capital absurdamente altos se deben a la no-subaditividad del VaR. En sus ejemplos, los autores muestran que el VaR no es subaditivo para funciones de distribución con colas extremadamente largas con IVE mayor que 1, severidades independientes y para un percentil suficientemente grande. En el Anexo 2 se muestra los valores de los cuantiles estimados por cada método en la simulación.

5. Caso colombiano

En este caso se utilizaron las pérdidas en miles de pesos por siniestros – riesgo operativo que reportan las entidades financieras a la Superintendencia Financiera de

Colombia en el año 2008 (ver www.superfinanciera.gov.co). El análisis previo de los datos se resume en la siguiente tabla:

Tabla 3. Resumen de las estadísticas más importantes de las pérdidas por riesgo operativo de las entidades financieras en Colombia para 2008

Estadística	Valor
Media	2,744,544.95
Desviación estándar	6,980,589.88
Mediana	191,296.46
Coefficiente de asimetría	4.42
Curtosis	23.1

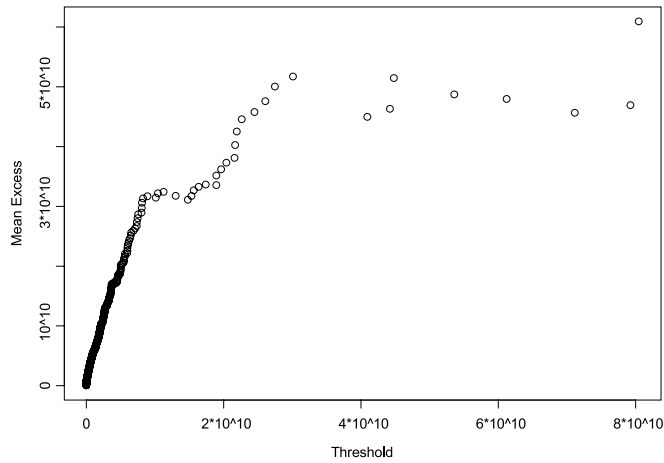
Fuente: Cálculos del autor

Como se puede observar en la tabla anterior, los datos exhiben alta curtosis y asimetría positiva, es decir una distribución de los datos con cola que tiende a ser larga a la derecha, datos típicos que se analizan bajo la teoría del valor extremo.

Con estos datos de pérdida se construye una distribución empírica de pérdidas del sector financiero y por medio de una prueba de bondad de ajuste se estima la función paramétrica que mejor se ajusta a los datos reales (varios textos explican las tres pruebas más comúnmente usadas, ver por ejemplo Evans y Olson (2002) pp. 98-99 para una breve descripción de estas). Dicha función para este caso es la distribución gamma mediante las pruebas Kolomogorov – Smirnov (K-S) y Anderson – Darling (A-D) como se muestra en el Anexo 3. El método K-S es mejor que la Chi-cuadrado para tamaños pequeños de muestra como en este caso; sin embargo la prueba A-D pondera las diferencias entre las distribuciones en sus colas en mayor medida que en sus rangos medios.

De acuerdo a la prueba de bondad de ajuste Chi-cuadrado la distribución que mejor se ajusta a los datos de pérdida en el caso colombiano es la lognormal y es la que se usa por ser una distribución de colas largas. Con esta función probabilística se genera una distribución de pérdidas mediante simulación Monte Carlo. Al simular 100,000 datos distribuidos lognormal con los parámetros obtenidos de la prueba de bondad de ajuste se obtiene el siguiente gráfico de excesos medios:

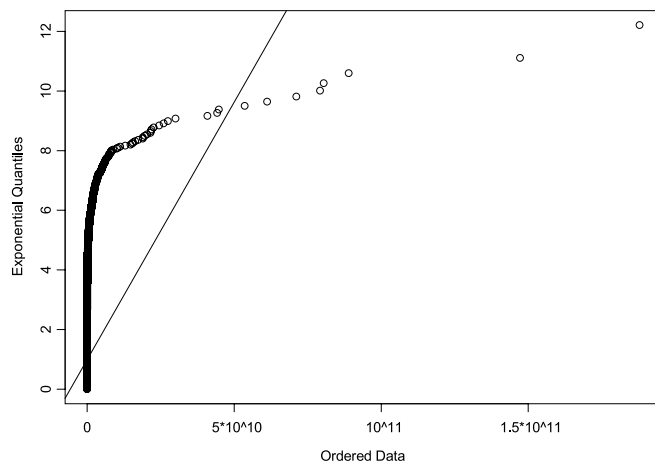
Figura 10. Gráfico de excesos medios para 100,000 datos simulados de una distribución lognormal.



Fuente: cálculos del autor

Cuando el gráfico de los excesos medios (*mean excess plot*) presenta una línea creciente se puede decir que son datos con distribución de colas largas, lo contrario sucedería para datos con distribución de colas cortas. Para este caso el gráfico de excesos medios muestra datos con distribución de cola larga, por su tendencia lineal positiva. El gráfico de cuantiles exponenciales luce de la siguiente manera:

Figura 11. Gráfico de cuantiles exponenciales para 100,000 datos simulados de una distribución lognormal.



Fuente: cálculos del autor

La forma cóncava a partir de la línea recta en este tipo de gráfico, muestra que los datos exhiben colas largas. La distribución lognormal es muy utilizada en el sector de seguros para modelar grandes pérdidas por siniestros (ver por ejemplo Mikosch (2004), Tabla 3.2.19), la cual se usará para estimar el cuantil al 99.9% mediante el método MLE-W y g-and-h, por ser una distribución subexponencial, como se vio anteriormente.

El valor en miles de pesos de $X_{n-k, n}$ usado es 1,276,262,099 dado que el k -óptimo es 262 cuando se minimiza el AMSE (0.34%) por el método de MLE para ERM,

el valor del IVE es 0.9473697. Con estos datos al 99.9% de confiabilidad la pérdida máxima por riesgo operativo para el sector financiero colombiano en el 2009 en miles es de COP 3,189,988,440 calculado mediante el estimador de Weissman. Mediante el método g-and-h el cuantil al 99.9% en miles es COP 3,574,847,758. Estos niveles de capital se consideran “razonables” en el sentido de Dutta y Perry, es decir, si la razón de capital / (total de activos) está por debajo del 3%. Considerando las 32 entidades que reportaron pérdida por riesgo operativo, esta razón está entre 1.7% y 1.9%.

6. Conclusiones

Con el fin de brindar herramientas adecuadas a las entidades financieras colombianas bajo el marco regulatorio, se prueban tres métodos de cuantificación de riesgo operativo basados en modelos de distribución de pérdidas (LDA).

Uno de los métodos consiste en ajustar las pérdidas a una distribución g-and-h -la cual es una transformación de una normal estándar- y calcular el OpVaR como el cuantil de esta distribución. Los parámetros g y h gobiernan la asimetría y la kurtosis de la distribución. Variando estos parámetros junto con los de escala y localización se pueden generar otros tipos de distribución.

Inicialmente se aplicó el enfoque g-and-h al caso Danish Fire data, considerando el parámetro g un polinomio de segundo orden en z^2 , en lugar de dejarlo constante como en Degen et ál (2007). Al hacerlo de esta manera, los cuantiles obtenidos son más aproximados a los cuantiles empíricos que a los obtenidos por Degen et ál (2007); sin embargo estos cuantiles son menos robustos por depender de una variable adicional.

Con los métodos aplicados al caso colombiano, se encuentra que la máxima pérdida esperada para el 2009 en las instituciones financieras está entre COP 3.2 y 3.6 billones, los cuales se consideran “razonables”, como se vio anteriormente.

El mensaje principal de este artículo es que las entidades financieras colombianas pueden implementar enfoques de medición avanzada para cuantificar de manera adecuada riesgo operativo, cuando se cuente con una base de datos confiable, sin recurrir a métodos muy complejos.

Referencias bibliográficas

- Badrinath, S. G. y Chatterjee S. (1988) "On Measuring Skewness and Elongation in Common Stock Return Distributions: The Case of the Market Index". *The Journal of Business*, 61 (4), 451-472.
- Badrinath, S. G. y Chatterjee S. (1991) "A Data-Analytic Look at Skewness and Elongation in Common-Stock-Return Distributions". *The Journal of Business & Economic Statistics*, 9 (9), 223-233.
- Beirlant, J., Dierckx G., Goegebeur, Y. y Matthys G. (1999) "Tail index estimation and an exponential regression model". *Extremes* 2, 177-200.
- Beirlant, J. Goegebeur, Y., Segers, J. y Teugels, J. (2004) *Statistics of Extremes: Theory and Applications*. John Wiley Sons.
- Böcker K. y Klüppelberg C. (2005) "Operational VaR: a Closed-form Approximation". *RISK Magazine*, December 90-93.
- Böcker, K. y Klüppelberg, C. (2006) *Multivariate Models for Operational Risk*. Preprint, TU Munich.
- De Fontnouvelle, P., Rosengren, E., y Jordan, J. (2004), "Implications of Alternative Operational Risk Modeling Techniques", *Technical report*, Federal Reserve Bank of Boston and Fitch Risk.
- Degen, M., Embrechts, P. y Lambrigger, D. (2007) "The Quantitative Modeling of Operational Risk: between g-and-h and EVT". *ASTIN Bulletin* 37: 265-291.
- Dutta, K. y Babbel D. F. (2002) "On Measuring Skewness and Kurtosis in Short Rate Distributions: The Case of the US Dollar London Inter Bank Offer Rates". *Wharton Financial Institutions Center Working Paper*.
- Dutta, K. y Babbel D. F. (2005) "Extracting Probabilistic Information from the Prices of Interest Rate Options: Tests of Distributional Assumptions". *The Journal of Business*, 78 (3), 841-870.
- Dutta, K. y Perry, J. (2007) "A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital". *Federal Reserve Bank of Boston, Working Paper* No. 06-13.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. y Mikosch, T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.

- Evans, J. R. y Olson D. L. (2002) *Introduction to Simulation and Risk Analysis 2nd Edition*. Prentice Hall, New Jersey.
- Hoaglin, D. C. (1985) “Summarizing Shape Numerically: The g-and-h Distributions”. Chapter 11, in *Exploring Data Tables Trends, and Shapes*. Eds. Hoaglin, Mosteller, and Tukey. New York, NY: John Wiley.
- Jiménez J. A. y Martínez J. (2006) “Una estimación del parámetro de la distribución g de Tukey”. *Revista Colombiana de Estadística*, 29 (1) pp. 1 – 16.
- Martínez, J. (1981) *Some Applications of Robust Scale Estimators*, Doctoral Thesis, Temple University, Department of Statistics. Philadelphia.
- Martínez, J. y Iglewicz, B. (1984) “Some Properties of the Tukey g- and- h Family of Distributions”. *Communications in Statistics: Theory and Methods* 13(3), 353-369.
- Mills, T. C. (1995) “Modelling Skewness and Kurtosis in the London Stock Exchange FT-SE Index Return Distributions”. *The Statistician*, 44 (3), 323-332.
- Mora A. (2009a) “Un estudio comparativo de algunos estimadores del índice de valor extremo”. *Borradores de Administración No. 17*, Colegio de Estudios Superiores de Administración –CESA–, Bogotá, D.C.
- Mora A. (2009b) “Una recomendación para cuantificar el riesgo operativo en entidades financieras en Colombia”. *Borradores de Administración No. 25*, Colegio de Estudios Superiores de Administración –CESA–, Bogotá, D.C.
- Moscadelli, M. (2004) “The Modelling of Operational Risk: Experience with the Analysis of the Data Collected by the Basel Committee”. *Banca D’Italia, Termini di discussione* No. 517.
- Nešlehová, J., Chavez-Demoulin, V. y Embrechts, P. (2006) “Infinite-Mean Models and the LDA for Operational Risk”. *Journal of Operational Risk*, 1 (1) pp. 3-25.
- Resnick, S. I. (1997) “Discussion of the Danish Data on Large Fire Insurance Losses”. *Astin Bulletin* 27: 139-151.

Anexo 1. Estimación de parámetros de g-and-h para el caso Danish Fire data

Valores literales

	depth	lo	hi	mids	spreads
1	1083.5	1.778954	1.778954	1.778954	0
2	542	1.321119	2.970297	2.145708	1.649178
3	271.5	1.151832	4.787836	2.969834	3.636004
4	136	1.068482	7.792208	4.430345	6.723726
5	68.5	1.028754	14.067812	7.548283	13.039058
6	34.5	1.01421	20.639631	10.826921	19.625421
7	17.5	1.004819	28.8282	14.91651	27.823381
8	9	1	46.5	23.75	45.5
9	5	1	57.410636	29.205318	56.410636
10	3	1	144.657591	72.828795	143.657591
11	2	1	152.413209	76.706604	151.413209
12	1	1	263.250366	132.125183	262.250366

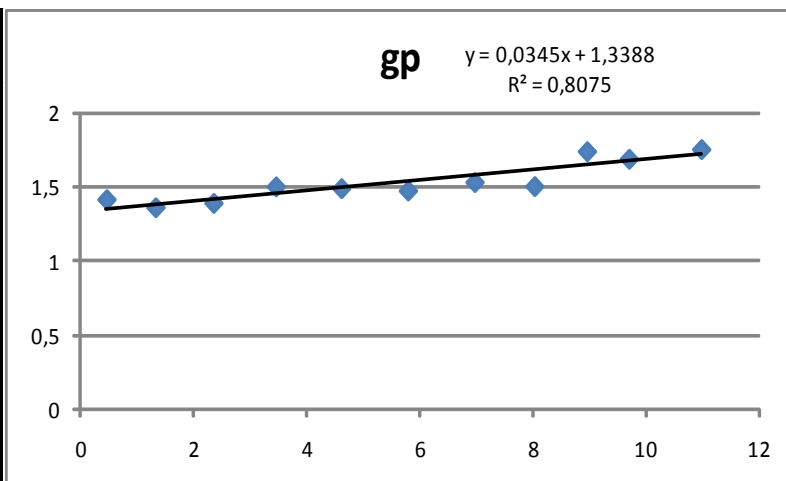
Fuente: cálculos del autor

p	LHS	UHS	ln of ratio	z1-p = -zp	gp
0.25012	0.457835	1.191343	0.95632766	0.67412675	1.41861699
0.12529	0.627122	3.008882	1.56818276	1.14894943	1.36488406
0.06	0.710472	6.013254	2.13579177	1.53201331	1.39410785
0.03	0.7502	12.288858	2.79610844	1.85763375	1.50519899
0.02	0.764744	18.860677	3.20529331	2.14639779	1.4933361
0.01	0.774135	27.049246	3.55366813	2.40547716	1.47732358
0.00	0.778954	44.721046	4.0502475	2.6393542	1.53456005
0.00	0.778954	55.631682	4.26855614	2.83276882	1.50684945
0.00	0.778954	142.878637	5.21179886	2.99230391	1.74173447
0.00	0.778954	150.634255	5.26465803	3.11397203	1.69065681
0.00	0.778954	261.471412	5.81612824	3.31302269	1.75553529

Fuente: cálculos del autor

Estimación de g

zp^2	gp
0.45444688	1.41861699
1.32008479	1.36488406
2.34706477	1.39410785
3.45080313	1.50519899
4.60702349	1.4933361
5.78632039	1.47732358
6.9661906	1.53456005
8.02457918	1.50684945
8.95388267	1.74173447
9.69682181	1.69065681
10.9761193	1.75553529



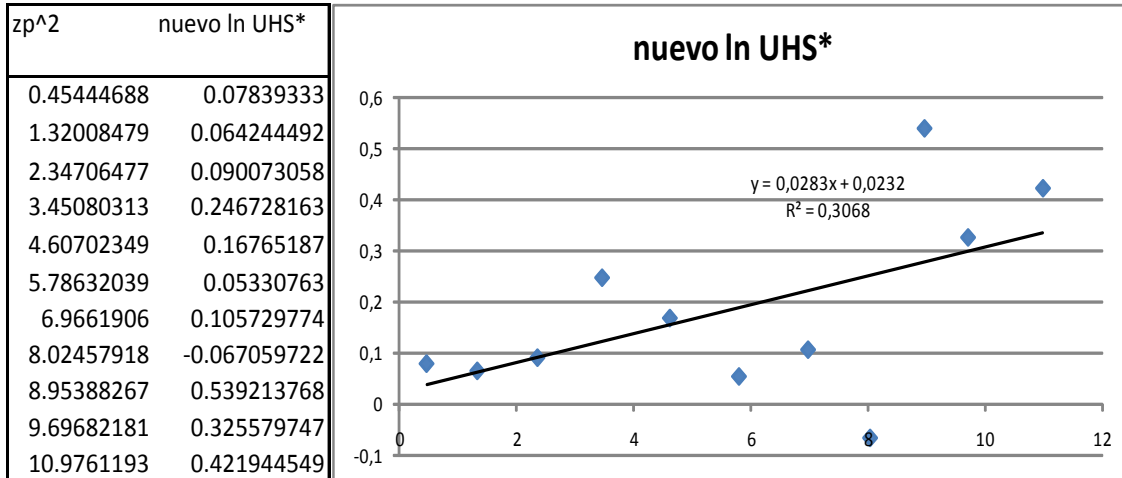
$$g(z) = 1.3388 + 0.0344z^2$$

Fuente: cálculos del autor

UHSp	-zp	g(zp)	$g(z)/(exp(-g(z)*zp)-1)$	nuevo ln UHS*
1.191343	0.674126751	1.35442499	0.907839288	0.07839333
3.008882	1.148949428	1.3842514	0.354401762	0.064244492
6.013254	1.532013308	1.41963703	0.181973724	0.090073058
12.288858	1.857633746	1.45766744	0.104145655	0.246728163
18.860677	2.146397794	1.49750616	0.062697901	0.16765187
27.049246	2.405477165	1.53814002	0.038993844	0.05330763
44.721046	2.639354202	1.57879362	0.02485455	0.105729774
55.631682	2.832768819	1.61526146	0.016809475	-0.067059722
142.87864	2.992303907	1.64728154	0.012000802	0.539213768
150.63426	3.113972031	1.67288025	0.009193349	0.325579747
261.47141	3.313022686	1.71695973	0.005832087	0.421944549

Fuente: cálculos del autor

*Nuevo ln UHS**



Fuente: cálculos del autor

Parámetros estimados de la distribución g-and-h para Danish fire data

A	1.77815
B	1.02370
h	0.05656
$g(z) = 1.3392 + 0.0344z^2$	

Fuente: cálculos del autor

Anexo 2. Resultados de la Simulación

Caso 1

Método	99.8%	99.85%	99.9%	99.95%
Método g-and-h	778	859	996	1,308
Método BK	581	688	873	1,313
Método MLE-W	813	922	1,101	1,491
Cuantil empírico	824	923	1,091	1,470

Fuente: cálculos del autor

El valor de $X_{n-k, n}^*$ usado es 669.3 dado que el k -óptimo es 311 cuando se minimiza el AMSE (0.06%) por el método de MLE para ERM.

Caso 2

Método	99.8%	99.85%	99.9%	99.95%
Método g-and-h	48,368	64,236	96,637	198,628
Método BK	50,000	66,667	100,000	200,000
Método MLE-W	58,150	77,533	116,299	232,596
Cuantil empírico	57,275	77,952	127,127	239,002

Fuente: cálculos del autor

El valor de $X_{n-k, n}^*$ usado es 6,882.021 dado que el k -óptimo es 1,689 cuando se minimiza el AMSE (0.06%) por el método de MLE para ERM.

Caso 3

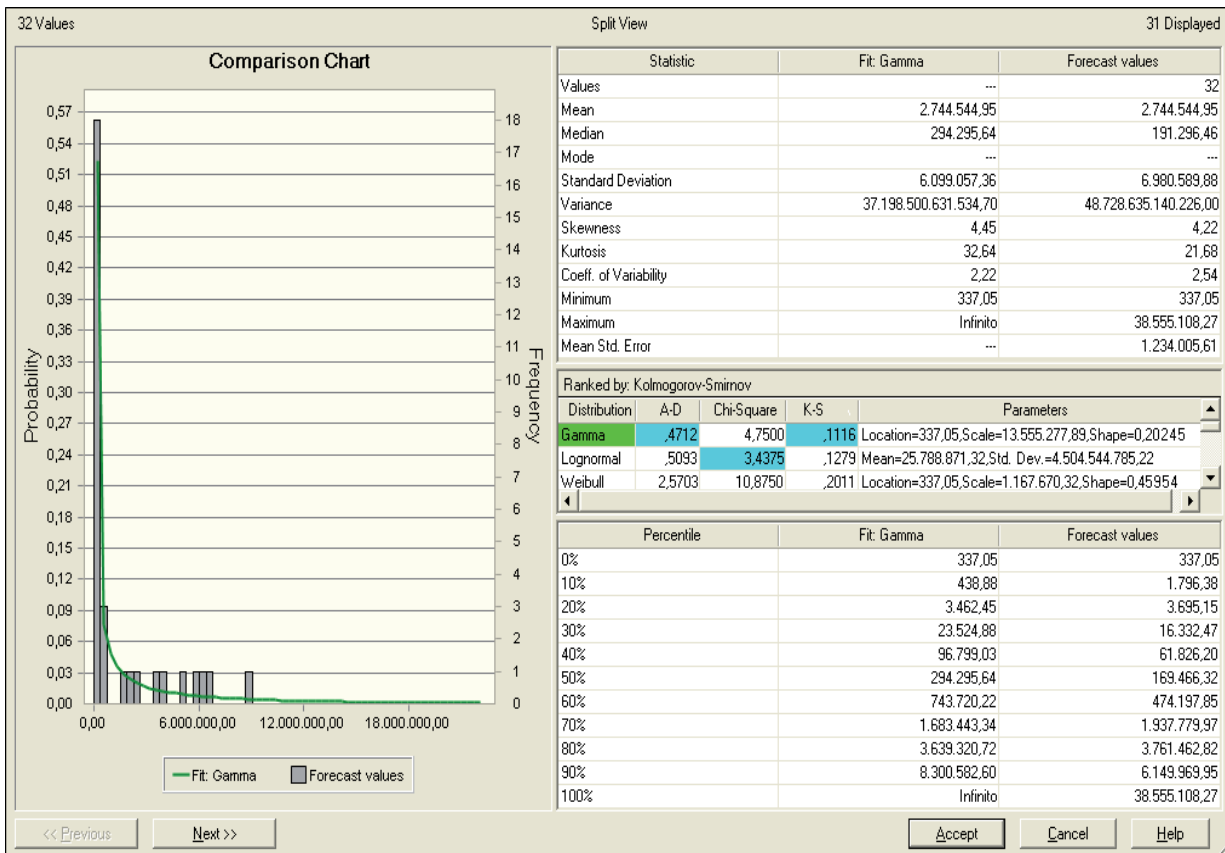
Método ('000)	99.8%	99.85%	99.9%	99.95%
Método g-and-h	4,146	6,238	11,194	31,182
Método BK	5,162	7,786	13,895	37,402
Método MLE-W	4,931	7,338	12,851	33,496
Cuantil empírico	5,255	8,408	14,868	36,977

Fuente: cálculos del autor

El valor de $X_{n-k, n}^*$ usado es 24,541.6 dado que el k -óptimo es 9,275 cuando se minimiza el AMSE (0.02%) por el método de MLE para ERM.

Anexo 3. Ajuste de las pérdidas por riesgo operativo a una función de distribución.

Figura 12. Ajuste de las pérdidas por siniestro de riesgo operativo en las entidades financieras colombianas. De las 32 entidades, 15 corresponden a bancos, 1 corporación financiera, 9 compañías de financiamiento comercial, 1 organismo cooperativo de grado superior, 2 bancos de segundo piso y 4 cooperativas financieras.



Fuente: cálculos del autor

