COLEGIO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ADMINISTRACIÓN, CESA
MAESTRÍA EN FINANZAS CORPORATIVAS

TRABAJO DE GRADO

MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIO FLEXIBLE APLICADO AL MERCADO DE VALORES COLOMBIANO

PRESENTADO POR
ANDRÉS FELIPE ESCOBAR ESCOVAR
DIRECTOR
ENRIQUE TER HORST

5 DE NOVIEMBRE DE 2013

Agradecimientos
2013 para mí ha sido un año bien significativo. Lleno de cambios, retos, metas cumplidas, nuevas aventuras emprendidas y muchas nuevas personas conocidas, lo cual me permitió conocer, aprender y crecer hasta un punto inimaginable.

En primer lugar quiero agradecer a Dios porque en un momento de inspiración de Octubre de 2012, justo el último día de inscripciones de la Maestría, me volvió a proveer con esa energía y entusiasmo para emprender este gran reto.

En segundo lugar quiero agradecer al CESA, que considero mi casa, por ser ese lugar propicio para mi desarrollo intelectual. Para José Manuel Restrepo, Werner Zitzmann, Juan Santiago Correa y todos los profesores que me han enseñado, no solo en la Maestría, sino en la Especialización y en el Pregrado solo tengo palabras de agradecimiento, han sido pieza fundamental en mi desarrollo personal y profesional.

En tercer lugar, quiero agradecer de manera muy especial al director de mi Trabajo de Grado Enrique ter Horst, quien sin lugar a dudas me dio la confianza y fue mi guía por todo este camino. Sin su entusiasmo, conocimiento y generosidad este Trabajo de Grado no hubiera sido posible. En la misma línea, quiero agradecer a los profesores Bernardo León y Francisco Venegas, quienes han sido fuente de inspiración y me dieron claridad en momentos de confusión y definición de objetivos y metas.

En cuarto lugar, quiero agradecer a mi familia. Ustedes han sido y serán el apoyo más importante en mi existencia. Mil y mil gracias por todo el apoyo y amor que me brindaron este

año, en los momentos más difíciles. Sin estos ingredientes sin lugar a dudas, esta victoria no hubiera sabido tan agradable. Finalmente quiero agradecer y reconocer el apoyo y la paciencia de mis amigos, amigas y maestros, de los cuales siempre he recibido el apoyo y las más importantes enseñanzas.

Tabla de Contenido

Lista de tablas, gráficos y anexos

Tablas

Gráficos

Anexos

Este trabajo de grado surge con el propósito personal de entender el comportamiento de los mercados de capitales desde una óptica global. Si bien se reconoce el gran desarrollo del mercado de capitales colombiano, también se identifica la necesidad de continuar con su expansión e integración regional y mundial, con el objetivo de brindar mejores condiciones a inversionistas de mayor tamaño y sofisticación.

Con esto en mente, este trabajo de grado busca brindar conclusiones para la óptima constitución de portafolios en Colombia, soportada en la construcción de un modelo que dé solución a las limitaciones de la Teoría Moderna de Portafolios e incorpore factores característicos que influencian los precios y los retornos de activos financieros negociados en el mercado local.

Actualmente las estrategias desarrolladas por fondos de inversión y otros vehículos financieros son innumerables, lo anterior no solamente por la gran cantidad de clases de activos en los que se invierte sino por su composición y la velocidad con que estos renuevan sus carteras con el objetivo de lograr el mayor rendimiento.

En ese sentido, se necesitan modelos que sean capaces de simular y por ende predecir el comportamiento de este tipo de portafolios dada la mayor volatilidad, kurtosis y multimodalidad observada en los rendimientos de los activos, es decir bastante diferente a la distribución Gaussiana o normal sobre la que se basa la Teoría Moderna de Portafolio.

En la última década, el mercado de capitales colombiano ha experimentado un desarrollo notable en su composición y tamaño. Las favorables condiciones macroeconómicas del país, la crisis financiera internacional y el sostenido desarrollo empresarial han hecho de Colombia un país muy llamativo para la inversión extrajera, lo cual ha traído consigo un fortalecimiento del sector financiero y una sofisticación de los agentes que lo componen.

Es por ese motivo y con el objetivo de contribuir con ese proceso, que surge este trabajo de grado, el cual proveerá de conclusiones para la óptima constitución de portafolios y suministrará una herramienta útil para la gestión y la administración de fondos de inversión.

De acuerdo con lo anterior, en este trabajo de grado se pretende responder, ¿cuál es el modelo más adecuado para construir un portafolio de inversión óptimo para el mercado colombiano?

Esta pregunta se abordará desde el comportamiento de los retornos de los activos financieros y la función de optimización utilizada para elegir el portafolio eficiente. Por lo tanto, dado que el comportamiento de los retornos de un activo no describe una distribución Gaussiana o normal y estos presentan una correlación asimétrica frente a los rendimientos de otros activos del portafolio de acuerdo a la tendencia del mercado, se plantea que es necesario basar los modelos de optimización de portafolio en distribuciones de probabilidad más ajustadas y con mayor flexibilidad, lo cual incrementará su poder de predicción.

Con esto en mente, se plantearon los siguientes objetivos específicos que servirán de guía para formar una respuesta adecuada a este interrogante:

- Aplicar la teoría de Harry Markowitz para componer portafolios óptimos en Colombia.

- Demostrar empíricamente que se logra una mejor optimización de los portafolios si se aplica la Teoría de Selección de Portafolios bajo la mezcla de distribuciones Gaussiana y la función de optimización Probability of Shortfall.

- Comparar los resultados de optimización obtenidos si se aplican las funciones de optimización: Sharpe ratio, Sortino, Omega, Conditional VaR e Equal Weights.

El resultado esperado de este trabajo de grado es determinar cuál es la estrategia más efectiva para la constitución de portafolios en el mercado accionario colombiano. Lo anterior se logrará, a través de la comparación del valor de los portafolios elegidos como eficientes en cada una de las estrategias e implicará la construcción de un modelo estadístico flexible en R para la programación y simulación de las estrategias de inversión que se van a comparar.

R es un lenguaje de programación especializado en el manejo y el análisis estadístico de información, de gran flexibilidad y capacidad. R presenta diversas ventajas frente a otros programas de análisis estadístico, dado que es un software libre y abierto para su continuo desarrollo. Es compatible con cualquier sistema operativo y se considera un lenguaje de propósito general dado que se puede usar en la automatización de cualquier tipo de análisis y manejo de información (Matloff, 2011).

En R se realizará el análisis estadístico de la información histórica de los retornos de las acciones que cotizan en la Bolsa de Valores de Colombia. Seguido a este análisis, se programarán las funciones de optimización para la selección de Portafolios planteadas.

Una vez obtenidos estos resultados, se determinará cuál es el modelo que más se ajusta a la realidad del mercado. Esta herramienta permitirá estructurar portafolios de inversión óptimos y desarrollar estrategias específicamente para el mercado local.

1. Marco Teórico

1.1 Antecendentes

1.1.1 Evolución de la Teoría Moderna de Portafolio

La Teoría Moderna de Portafolio es producto de la evolución de los conceptos financieros desde la mitad del siglo XX. Su importancia es tan alta que se considera el pilar fundamental del desarrollo de los mercados financieros actuales. Debido a su trascendencia Harry Markowitz, autor del paper “Portfolio Selection” publicado en 1952 en el “Journal of Finance”, fue galardonado con el premio nobel de economía en 1990, lo cual aunque en un principio causó asombro en la comunidad de economistas, después fue entendido por los grandes aportes realizados en este trabajo inicial base de la Teoría Moderna de Portafolio.

En esencia la Teoría Moderna de Portafolios es un marco para la selección y construcción de portafolios de inversión basado en la maximización de los retornos esperados y la simultánea minimización del riesgo (Mangram, 2013). En este punto es relevante mencionar, que en 60 años se han realizado notables aportes a la teoría, no solo desde el punto de vista conceptual, sino desde el punto de vista de herramientas y sofisticación de la industria financiera.

De acuerdo con lo dicho anteriormente, la Teoría Moderna de Portafolio se fundamenta en la Teoría de Selección de Portafolios propuesta por Harry Markowitz en 1952. Esencialmente su trabajo postula que bajo condiciones conocidas y bajo unos supuestos de comportamiento dados, la selección de un portafolio se basa en balancear dos dimensiones críticas: (1) los retornos esperados y (2) el riesgo del portafolio como un conjunto (Mangram, 2013).

De esta forma la selección de un portafolio debe tomar en cuenta no solo la maximización del nivel del retorno esperado sino el perfil de riesgo del inversionista. De esta forma se introduce el concepto de diversificación, la cual tiene como objetivo la apropiada selección de la proporción de activos que juntos muestran menores factores de riesgo que una inversión en un activo individual o en una clase particular de activos (Mangram, 2013).

Al respecto Markowitz en su paper termina afirmando que tratando de hacer la varianza pequeña, no es suficiente invertir en muchos títulos valores. Es necesario diversificar la inversión a través de diferentes industrias, que no compartan las mismas características económicas, las cuales seguramente presentan bajas covarianzas (Markowitz, 1952).

Posteriormente James Tobin, economista y premio nobel estadounidense en su ensayo “Liquidity Preference as Behavior Toward Risk”, sugirió que los inversionistas, indiferente de su tolerancia al riesgo, van a mantener sus portafolios de acciones en las mismas proporciones de tiempo en las que ellos “mantengan sus expectativas idénticas sobre el futuro”. De esta forma sus portafolios de inversión variarán únicamente en su composición relativa (Mangram, 2013).

Más adelante el mundo conoció el modelo de valoración de activos financieros CAPM formulado independientemente por William Sharpe, John Lintner y Jan Mossin. Sharpe, profesor de la Universidad de Stanford y premio Nobel de Economía, derivó los conceptos de Frontera Eficiente y Línea de Mercado de Capital. En su ensayo “Capital asset prices: A Theory of Market Equilibrium under conditions of Risk” (1964), estableció un importante avance en la teoría del equilibrio de los mercados de capital, brindando a los inversores una forma de valorar sus títulos como función del riesgo sistemático (Mangram, 2013).

En 1965 John Lintner, profesor de la Universidad de Harvard, derivó el CAPM desde la perspectiva de una corporación que emite acciones. Finalmente, un año más tarde, Jan Mossin derivó el CAPM especificando funciones de utilidad cuadrática (Mangram, 2013).

De esta forma se configuran los cimientos de la Teoría Moderna de Portafolio, que sin lugar a dudas ha revolucionado el desarrollo de los servicios financieros.

1.1.2 Evolución de las estrategias de fondos de inversión

A partir de la segunda mitad del siglo XX se presentó un gran desarrollo en la industria de los fondos de inversión. Partiendo de los fondos de inversión tradicionales, surgieron otros vehículos de inversión con una característica muy particular: mayor libertad para operar.

De esta forma se constituyen los hedge funds, vehículos de inversión colectiva, que basan sus decisiones en estrategias de inversión de gran variedad de activos, no solo por los diferentes mercados en los que opera sino por las clases de activos, los cuales pueden ser desde tradicionales hasta alternativos y exóticos. Estos fondos presentaron su verdadero desarrollo en la década de los años 90’s y sus mayores clientes son compañías de seguros, fondos de pensiones y personas naturales con grandes fortunas (Coll, 2006).

Los hedge funds tienen características muy particulares. La variedad de estrategias y composición de sus portafolios hace de este un sector heterogéneo. Esta clase de fondos buscan constituirse en países que tengan baja regulación, razón por la cual muchos hedge funds están constituidos en paraísos fiscales “haciendo posible que los fondos de cobertura no encuentren problemas legales a la hora de implementar sus estrategias” (Coll, 2006).

En cuanto a su manera de operar, estos fondos presentan grandes diferencias con los fondos tradicionales. Los hedge funds se rigen únicamente bajo un reglamento interno que le brinda flexibilidad en sus decisiones de inversión. Los fondos considerados tradicionales únicamente pueden tomar posiciones largas, mientras que los hedge funds pueden tomar posiciones largas y cortas.

Por su posibilidad de operar en diferentes mercados, los hedge funds basan sus estrategias en oportunidades de arbitraje; en identificar oportunidades de invertir en títulos con precios subvaluados o sobrevalorados; en identificar oportunidades de tomar posiciones largas y cortas en acciones, títulos de renta fija o instrumentos derivados; y en invertir en mercados poco líquidos donde las oportunidades de valoración son mucho mayores (Coll, 2006). Por otro lado, es común que estos apalanquen sus operaciones para incrementar sus rendimientos, lo cual no es frecuente en un fondo tradicional.

En resumen, los hedges funds, dadas sus especiales características y libertad para operar, presentan carteras con comportamientos menos predecibles, mayor necesidad de mitigar el riesgo dada la mayor volatilidad y distribuciones de probabilidad más exóticas, lo que significa un desafío para los gestores y administradores de este tipo de fondos (Buckley, Comezaña, Djerroud, & Seco, 2008).

De esta forma es cada vez más necesario y retador para la industria, desarrollar modelos y herramientas que soporten la labor de estos fondos y permitan desarrollar estrategias acordes con la naturaleza de este negocio. Este trabajo de grado, pretende construir un modelo que permita componer carteras de inversión óptimas en el contexto colombiano, utilizando una distribución estadística apropiada para las condiciones particulares del mercado local.

1.2 Explicación general de la Teoría de Selección de Portafolio de Markowitz

En 1952, Harry Markowitz publicó en “The Journal of Finance” el paper “Portfolio Selection” en el cual formuló las bases de su Teoría de Selección de Portafolio, la cual explicó más profundamente en su libro: “Portfolio Selection: Efficient diversification” en 1959.

En su trabajo, Markowitz inicia reconociendo que existen dos momentos en el proceso de seleccionar un portafolio. El primero de ellos inicia con la observación y la experiencia y termina con la definición de expectativas sobre los desempeños futuros de los activos financieros. El segundo momento, inicia con las expectativas sobre el futuro y termina con la selección del portafolio (Markowitz, 1952).

La teoría está soportada en siete supuestos, los cuales no solamente definen las condiciones del mercado sino el comportamiento de los inversionistas. En el paper “A simplified perspective of the Markowitz Portfolio Theory” (Mangram, 2013), Myles E. Mangram enuncia de manera sencilla los supuestos de esta teoría:

(1) Los inversionistas son racionales, ellos buscan maximizar retornos mientras minimizan el riesgo

Bajo este primer supuesto Markowitz describe el retorno esperado como lo deseable por el inversionista, mientras que el riesgo o la posibilidad de presentarse una desviación negativa como lo indeseable. Dado lo anterior, el objetivo de un inversionista racional es buscar obtener el mayor retorno con un nivel de riesgo mínimo.

Lo anterior implica que un inversor racional ubica todos sus recursos en el título con mayor valor descontado y sería indiferente si dos o más activos financieros le ofrecen el mismo rendimiento. Desde la perspectiva del portafolio, lo importante del riesgo de un activo no es el riesgo por si solo, es el aporte del riesgo de ese activo al portafolio (Mangram, 2013). De esta forma es importante tener en cuenta que los retornos de los títulos están también correlacionados.

De acuerdo con Markowitz la diversificación no puede eliminar todo el riesgo. El portafolio que maximiza el retorno esperado no necesariamente es el del mínimo riesgo. De esta forma es que el inversionista deberá escoger la tasa a la que puede ganar el retorno esperado de acuerdo a un nivel de riesgo o escoger un nivel de riesgo que brinda un retorno (Markowitz, 1952).

(2) Los inversionistas están únicamente dispuestos a aceptar grandes cantidades de riesgo si son compensados por grandes expectativas de retornos

Este supuesto se refiere al balance que existe en la relación recompensa/riesgo. El riesgo de un activo financiero puede ser dividido en dos clases:

- Riesgo sistemático, que es el riesgo que proviene de factores externos a la actividad de la empresa, normalmente por factores macroeconómicos, y por lo general afecta al mercado en su conjunto. Este riesgo no se puede mitigar.

- Riesgo no sistemático, que es el riesgo relacionado con un activo o un grupo específico de activos. Este riesgo se denomina diversificable, porque aunque no se pueda eliminar si se puede reducir (Mangram, 2013).

De esta forma los inversionistas exigirán primas de riesgo mayores en caso que el activo cuente con un riesgo que no se pueda mitigar. Es importante aclarar, que justamente el efecto sobre las inversiones es que no todas las que son riesgosas producen siempre los rendimiento más altos (Mangram, 2013).

(3) Los inversionistas oportunamente reciben toda la información pertinente relacionada con su decisión de inversión

Este supuesto se soporta en el principio de revelación de información por parte de empresas públicas, las cuales emiten títulos valores, y tienen la obligación de mantener a los inversionistas con un mismo nivel de información. Este punto ha venido cumpliéndose en mayor medida, con el desarrollo de nuevas herramientas y canales de información disponibles.
Es relevante mencionar, que también depende de la capacidad de asimilación de información y análisis que tenga cada uno de los actores del mercado y la utilización que le dé a la información encontrada.

(4) Los inversionistas pueden pedir prestado cantidades ilimitadas de capital a tasa de interés libre de riesgo

Este supuesto no es del todo cierto. Los mayores actores del mercado tienen acceso a montos de capital con un costo reducido y cercano a la tasa libre de riesgo, pero tienen limitaciones dado que no pueden acceder a cantidades ilimitadas de este.

(5) Los mercados son eficientes

Este es un supuesto que se hace necesario aceptar para partir de la base que los mercados reconocen el verdadero valor de los activos. Sin embargo en la vida real, se presentan oportunidades puntuales de arbitraje que una vez detectadas son corregidas por el mismo mercado. La velocidad a las que son corregidas estas brechas, está en función del tamaño y la sofisticación del mercado.

(6) Los mercados no incluyen costos de transacción o impuestos

Este supuesto se acepta para fines académicos. Los costos de transacción y los impuestos se presentan en el mundo real y hacen parte de la remuneración del sistema financiero y los entes reguladores.

(7) Es posible seleccionar títulos valores cuyo rendimiento individual es independiente de otros portafolios de inversión

Teniendo en cuenta los supuestos anteriores, Markowitz presenta el cálculo del rendimiento promedio ponderado del portafolio como,

$$\mathbf{R = \sum XiRi}$$

En donde Xi corresponde al monto relativo invertido en el activo i. Ri es la tasa de retorno descontada al valor presente. Ri se define de la siguiente forma,

$$\mathbf{Ri = \sum dit*rit}$$

En donde rit es la tasa de rendimiento esperado del título i en el momento t y dit es la tasa a la que se descuenta a valor presente el retorno del periodo t.

De la misma forma Markowitz define los siguientes conceptos que sirven de herramienta para la selección del portafolio:

(1) Valor Esperado (E)

En la teoría de portafolio se utiliza el concepto de valor esperado para calcular el retorno esperado del portafolio. De esta forma, el cálculo del retorno esperado de un portafolio es el promedio ponderado de los retornos esperados de los activos individuales (Mangram, 2013).

$$\mathbf{E = p1y1 + p2y2 + \ldots. + pNyN}$$

Donde yN es un número finito de valores y pN es el peso de ese valor en el portafolio.

(2) Varianza

La varianza es el promedio de la desviación al cuadrado del retorno real y su valor esperado (Markowitz, 1952). Es una medida de dispersión comúnmente utilizada. En el contexto de portafolio, los activos que disminuyen su valor son compensados por los activos que incrementan el suyo. Así la varianza de un portafolio de activos es siempre menor que el simple promedio ponderado de las varianzas de los activos individuales (Mangram, 2013).

$$V = p1(y1 - E)^2 + p2(y2 - E)^2 + \ldots + pN(yN - E)^2$$

De acuerdo con Schneeweis, Crowder & Kazemi, en su artículo "The new science of asset allocation: Risk management in a multi-asset world" (2010): "En la actualidad una vez el número de activos en un portafolio se vuelve lo suficientemente grande, la varianza total se deriva en realidad más de la covarianza que de la varianza de los activos" (Mangram, 2013).

De esta forma, la varianza también se podría definir así,

$$V = \sum\sum Xi*Xj*\sigma ij$$

en donde Xi y Xj son los pesos invertidos en cada uno de los activos que componen el portafolio y σij es la covarianza entre los activos i y j.

(3) Desviación estándar

Estadísticamente la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza. Es otra medida de riesgo, que mide la desviación del retorno obtenido frente al valor esperado (Mangram, 2013).

(4) Covarianza

La covarianza es un indicador que mide la relación entre dos variables, en el contexto de la selección de portafolio es la relación que existe entre los retornos de dos activos (Markowitz, 1952).

$$\sigma ij = E\{[Ri-E(Ri)]\ [Ri-E(Rj)]\}$$

(5) Coeficiente de correlación

Finalmente está el coeficiente de correlación, el cual mide el grado en el que dos variables están correlacionadas (Mangram, 2013). Estadísticamente, el coeficiente de correlación se calcula dividiendo la covarianza por la desviación estándar. De esta forma, cuanto mayor sea la proporción de activos no correlacionados en un portafolio, mayor es la reducción del riesgo (Mangram, 2013).

Habiendo definido lo anterior, el retorno esperado de un portafolio se define de la siguiente forma,

$$\mathbf{E = \sum Xi\mu i}$$

En donde µi es el valor esperado de Ri y Xi es el porcentaje que el inversionista invierte en el activo i.

Un concepto relevante que introdujo la teoría de selección de portafolios es la diversificación. El objetivo de la diversificación es el de maximizar los retornos y minimizar el riesgo en diferentes activos que reaccionarían de forma diferente a un mismo efecto (Mangram, 2013).

Basado en este concepto es que Markowitz soporta la metodología de selección de activos y plantea una solución para balancear la relación recompensa – riesgo. De hecho el objetivo final es determinar la proporción adecuada de inversión en cada activo que compone el portafolio.

Dado lo anterior, el producto final de la teoría de selección de portafolio de Markowitz es determinar la frontera eficiente, la cual describe la relación entre el retorno esperado del portafolio y el grado de riesgo o volatilidad de este (Mangram, 2013). Es importante mencionar, que los portafolios presentes sobre la curva de la frontera eficiente representan la mejor combinación posible de los retornos esperados y el riesgo de la inversión (Mangram, 2013).

Así, dado que en esta frontera eficiente está constituida por las diferentes combinaciones de retornos esperados y niveles de riesgo determinado por la varianza, Markowitz formula la regla de los retornos esperados – varianza de los retornos (E-V) la cual establece que: “el inversionista querría seleccionar uno de los portafolios que dan lugar a combinaciones eficientes donde se registra el nivel mínimo de varianza dado un retorno esperado o un máximo retorno esperado dado un nivel de varianza o menor” (Markowitz, 1952).

Esta regla, que introduce el concepto de diversificación, tiene como objetivo garantizar una correcta diversificación. Esta correcta diversificación no solo se basa en el número de activos que componen el portafolio sino en minimizar la relación que pueda existir entre ellos.

En resumen, la determinación de la frontera eficiente estará basada en el siguiente grupo de condiciones:

(1) $E = \sum X_i \mu_i$

(2) $V = \sum\sum X_i * X_j * \sigma_{ij}$

(3) $\sum Xi = 1$

(4) Xi >=0 para cada uno de los activos que constituyen el portafolio

De esta forma, la solución final del modelo anterior, resulta en una función de optimización que relaciona el valor esperado de los retornos con la varianza de los retornos. Markowitz establece que “el objetivo del inversionista es el de maximizar su función de utilidad” (Engels, 2004) .

La función de utilidad, también conocida como “Media-varianza” está dada por el retorno esperado de los activos, la varianza y un parámetro de aversión al riesgo.

$$U = E - \tfrac{1}{2}\, y^{*}V$$

Esta función establece que a mayores retornos esperados, mayor será la utilidad del inversionista, mientras que a mayor varianza o riesgo, la utilidad se reduce.

El parámetro de aversión al riesgo (y), “es una medida que indica la aversión al riesgo del inversionista” (Engels, 2004). Mientras mayor sea la aversión al riesgo, mayor será la importancia del componente riesgo sobre la función de utilidad. “El parámetro de aversión al riesgo (y), se asume que es positivo, porque todos los inversionistas poseen algún grado de aversión al riesgo” (Engels, 2004).

Dado lo anterior, el inversionista seleccionará el portafolio de las posibles opciones de la frontera eficiente del que mayor utilidad obtenga.

1.3 Desarrollo de la Teoría Moderna de Portafolios

A través de los 60 años de evolución de la Teoría Moderna de Portafolio, otros autores han realizado aportes en diferentes aspectos de la teoría, con dos objetivos muy claros: incrementar el poder de predictibilidad de los modelos y resolver nuevos retos que surgen en el desarrollo y sofisticación del sector financiero.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, la Teoría de Selección de Portafolio de Harry Markowitz fue el punto de partida para el desarrollo de los mercados financieros como los conocemos hoy en día. Los avances de los siguientes 50 años permitieron el desarrollo de la Teoría Moderna de Portafolios, que sin duda es el pilar fundamental de una industria que toma cada vez más importancia dentro del desarrollo de los países y que evoluciona cada vez más rápido.

Teniendo esto en cuenta, Ian Buckley, Gustavo Comezaña, Ben Djerroud y Luis Seco indican en su paper “Portfolio optimization when asset returns have the Gaussian Mixture Distribution” que la teoría planteada por Markowitz presenta limitaciones frente a las condiciones reales de los mercados, limitaciones que se pueden solucionar con el supuesto que los retornos de los activos obedecen a una distribución Gaussiana multivariable con parámetros constantes en el tiempo (Buckley, Comezaña, Djerroud, & Seco, 2008).

De acuerdo con estos autores las dos limitaciones de la Teoría de Selección de Portafolio al asumir que siguen una distribución normal son:

(1) “El sesgo (asimetría alrededor de la media) y la leptocurtosis (más cúrtica o de cola más ancha que una distribución Gausiana) naturaleza de las funciones de densidad de probabilidad marginal (PDFs).

(2) El fenómeno de correlación asimétrica, que describe la tendencia para las correlaciones entre los retornos de los activos es dependiente de la dirección del mercado. Típicamente las correlaciones son mayores en los mercados a la baja que cuando esta al alza” (Buckley, Comezaña, Djerroud, & Seco, 2008).

Así, la primera limitación se refiere a la distribución de probabilidad que describe el precio del activo y su retorno cuando es observado de manera individual.

La Teoría de Selección de Portafolio de Markowitz asume que los precios y retornos de los activos financieros se distribuyen normalmente, sin embargo en la realidad la información financiera presenta características diferentes que lo alejan de esta presunción.

De acuerdo con lo revisado anteriormente, esta limitación presentada por dicha teoría, dado que las series de tiempo financieras presentan un sesgo alrededor de la media y colas más anchas que la distribución normal, debe ser resuelta para incorporar mayor poder de predictibilidad al modelo.

Mientras que la segunda limitación, describe posibles efectos que puede experimentar el portafolio de acuerdo a la tendencia presentada en su entorno y que empíricamente se ha experimentado cuando se presentan crisis financieras o momentos de relativa calma y valorización de los activos financieros.

De acuerdo con Buckley, Comezaña, Djerroud y Seco, en el estudio del comportamiento de los retornos se observa que las correlaciones son mayores o menores entre un grupo de activos. Este fenómeno se hizo aún más notorio en 1987, cuando después de la crisis financiera, se observó una “deficiencia en los modelos de riesgo basados en la distribución normal multivariable” (Buckley, Comezaña, Djerroud, & Seco, 2008). Dichos modelos perdieron su poder predictivo dada las reiteradas tendencias a la baja presentadas por los mercados alrededor del mundo.

De esta forma se pueden diferenciar dos regímenes o periodos, donde la correlación varía en función de la tendencia de los precios: Tranquil y Distressed. Durante los periodos Tranquil o de normalidad, las correlaciones son pequeñas y la diversificación es fundamental para reducir el riesgo. Por otro lado, durante los periodos Distressed, de tendencia a la baja o bear markets, los retornos de los activos son en promedio menores, las volatilidades mayores que en los periodos normales y las correlaciones en los precios de los activos y sus retornos son mayores (Ang & Bekaert, 2004). En estos periodos la diversificación es menos efectiva para reducir el riesgo (Buckley, Comezaña, Djerroud, & Seco, 2008).

De acuerdo con lo anterior, se hace indispensable incorporar a los modelos los efectos de estos regímenes con el fin de incrementar su capacidad de predicción. De esta forma los modelos deben estar basados en dos o más distribuciones de probabilidad, una para cada régimen identificado. Esta clase de modelos se denominan Regime-switching models, ya que a través de una mezcla de distribuciones, contemplan la probabilidad de que exista un cambio de regimen en el periodo evaluado (Ang & Bekaert, 2004), lo cual ajusta los resultados de mejor manera a la realidad.

De esta forma Ian Bucley, David Saunders y Luis Seco en la versión más actualizada de su paper, describen que "la mezcla de distribuciones Gaussianas es seleccionada del rango de alternativas paramétricas de la distribución Gaussiana por su trazabilidad: los cálculos donde se utiliza generalmente se parecen a aquellos que utilizan la distribución Guassiana" (Buckley, Saunders, & Seco, Portfolio optimization when asset returns have the Gaussian mixture distribution, 2008)

De acuerdo con su análisis, otras alternativas diferentes presentan restricciones en las formas que sus distribuciones de densidad pueden tomar o por el contrario no son lo suficientemente restrictivas y presentan muchos grados de libertad para que su calibración sea factible.

Distribuciones alternativas a la Gaussiana pueden requerir modelar muchos parámetros, lo cual reduce su poder predictivo, o pueden no reflejar de manera adecuada los comportamientos de la información proveniente de los mercados financieros, lo que sin duda es contrario al objetivo que se está persiguiendo.

Finalmente, los autores afirman que “la mezcla de distribuciones Gaussianas es atractiva, ya que a pesar de que no es elíptica, su distribución de densidad y la estructura de dependencia son especificadas completamente por los vectores de los retornos promedio, las matrices de covarianza y los pesos relativos de componentes constitutivos Gaussianos” (Buckley, Saunders, & Seco, Portfolio optimization when asset returns have the Gaussian mixture distribution, 2008).

1.4 Funciones de optimización

De igual forma, otro de los aspectos fundamentales de la Teoría Moderna de Portafolios que ha presentado grandes desarrollos es la función de optimización, la cual es la función objetivo y factor de decisión en el momento de escoger el portafolio óptimo dada la relación retornos – riesgo.

Como se describió anteriormente, la función de optimización planteada por Harry Markowitz, es la función de utilidad que está dada por el retorno esperado de los activos, la varianza y un parámetro de aversión al riesgo. El objetivo último del inversionista es maximizar su función de utilidad, lo cual será posible escogiendo el portafolio que le brinde el mayor nivel de retorno dado su perfil de riesgo.

De acuerdo con lo anterior y en línea con el proceso de determinación del mejor modelo para el mercado de valores colombiano, a continuación se estudiarán 6 funciones de optimización adicionales, que más adelante serán incorporadas al modelo como estrategias de composición de portafolios. Cada una de estas proporcionará un valor de portafolio a través de un horizonte de tres años y seis meses, el cual será el indicador para seleccionar el mejor modelo para el mercado local.

1.4.1 Sharpe Ratio

William Sharpe, economista estadounidense y premio nobel de economía por desarrollar el modelo para fijar el precio de los activos financieros CAPM, formuló en 1966 un indicador para medir el desempeño de los fondos mutuos que con el tiempo se denominó Sharpe ratio.

Sharpe plantea un indicador que relaciona el retorno diferencial de un determinado activo o cartera frente a la variabilidad o volatilidad, lo que da como resultado el retorno diferencial por cada unidad de riesgo.

Al igual que Markowitz, Sharpe relaciona retornos con una medida de riesgo pero establece un indicador de sensibilidad para permitir comparación entre activos o carteras de diferentes características dado que “los fondos mutuos no pueden determinar los patrones de preferencia de sus inversionistas directamente” (Sharpe W. F., 1966). De acuerdo con Sharpe, la labor de los administradores de los fondos mutuos es la de “seleccionar una posición frente al riesgo y a los retornos esperados y después invitar a los inversionistas con preferencias similares a comprar acciones del fondo” (Sharpe W. F., 1966).

En línea con lo anterior y con el objetivo de establecer una medida aplicable al mundo real, es que Sharpe formula el reward-to-variability ratio en 1966. En su paper “The Sharpe Ratio” (Sharpe W. F., 1994), Sharpe define su indicador de la siguiente manera:

$$\mathbf{S= d / \sigma_d}$$

En donde $d = R_F – R_B$, lo que corresponde al retorno diferencial entre el retorno del fondo evaluado F (R_F) y un retorno de referencia de un portafolio o activo (R_B). Lo anterior sobre la desviación estándar del retorno diferencial (σ_d).

En otras palabras, el “numerador muestra la diferencia entre la tasa de retorno anual del portafolio y la tasa de interés pura o de referencia en el mercado” (Sharpe W. F., 1966). Mientras que el denominador “muestra la cantidad de riesgo soportado” (Sharpe W. F., 1966).

Como resultado, el inversionista sustentará su decisión de inversión en el fondo que mayor ratio presente.

1.4.2 Sortino Ratio

En línea con el desarrollo del Sharpe Ratio, Sortino y Price en 1994 propusieron un nuevo indicador que incorpora el nivel de riesgo del fondo evaluado para generar un ranking que no solamente tenga en cuenta el desempeño actual sino la capacidad del administrador del fondo de mantener un perfil de riesgo adecuado que le asegurará una alta probabilidad de rendimientos futuros positivos.

De acuerdo con Ashraf Chaudhry y Helen Johnson en su paper "The efficacy of the Sortino Ratio and Other Benchmarked Performance Measures under skewed return distribution", Sortino y Price plantearon que la evaluación del desempeño de los fondos deben tener en cuenta un "mínimo retorno aceptado (MAR)" el cual es un benchmark del mercado. Por lo cual "cualquier retorno por debajo del MAR producirá retornos desfavorables mientras que retornos por encima de MAR producirán buenos retornos. El riesgo está asociado únicamente con los malos retornos, por lo tanto solo los retornos por debajo de MAR están asociados con el riesgo." (Caudhry & Johnson, 2008).

Este indicador se popularizó como una medida de evaluación para los administradores de portafolio, los cuales son compensados por presentar aceptables niveles del Sortino Ratio ya que presentan altos niveles de retornos con una distribución de los excesos de los retornos sesgada positivamente.

Sortino ratio es entonces una medida para calificar la posibilidad de bajo desempeño de los fondos y está definido así:

$$\textbf{Sortino Ratio} = \frac{\overline{\propto}}{\boldsymbol{DD}}$$

Donde $\overline{\propto} = r_{promedio} / r_{benchmark}$ y ***DD*** es:

$$\mathbf{DD^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}} \sum_{\boldsymbol{t}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} (\boldsymbol{r_t} - \boldsymbol{MAR})^{\mathbf{2}}\, \boldsymbol{I}(\boldsymbol{r_t} \leq \boldsymbol{MAR})$$

En donde r_t es el retorno en el periodo t, MAR es el retorno mínimo aceptado del mercado.

El objetivo en esta estrategia es escoger los portafolios con los menores Sortino ratio posibles.

1.4.3 Omega Ratio

Como se ha visto hasta el momento, el desarrollo de los hedge funds demandó el florecimiento de nuevos modelos de optimización que involucren todas las características de la distribución de las series de los retornos.

De esta forma, Cascon, Keating and Shadwick del “The Finance Development Centre” de Londres propusieron la función Omega (Ω), que de acuerdo con Alexandre Favre-Bulle y Sébastien Pache en su tesis de maestría titulada “The Omega Measure: Hedge Fund Portfolio Optimization” este indicador “considera los retornos por debajo y por encima de un umbral específico de pérdidas y provee un indicador de la probabilidad total ponderada de pérdidas y ganancias que enteramente describe las propiedades riesgo-recompensa de la distribución de los retornos” (Favre-Bulle & Pache, 2003).

El indicador Omega se define de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\Omega = \frac{I_2(r)}{I_1(r)}}$$

En donde $\boldsymbol{I_1(r) = \int_a^r F(x)dx}$ y $\boldsymbol{I_2(r) = \int_r^b (1 - F(x))dx}$ en “donde F es la función de distribución acumulada de los retornos de los activos en el intervalo [a,b] y r es el nivel de retorno considerado como el umbral de pérdida.

Así el inversionista buscará maximizar la función Omega, dado que a mayor magnitud mayor la probabilidad de obtener retornos por encima del umbral definido r.

1.4.4 Conditional VaR

A finales de los años 80, dado el desarrollo de los mercados financieros y el incremento de la exposición a la volatilidad de las empresas y los portafolios de inversión, surge el VaR (Value at Risk) como medida de las posibles pérdidas a la que se enfrenta determinado actor dada su posición en instrumentos financieros.

De acuerdo con Thomas J. Linsmeier y Neil D. Pearson, en su paper “Value at Risk”, “VaR es una medida de las pérdidas resultantes de los movimientos normales del mercado. Pérdidas más grandes que el VaR ocurren únicamente con una pequeña probabilidad especificada” (Linsmeier & Pearson, 2000).

El VaR es una medida estadística, la cual implica la definición de un nivel de probabilidad como umbral de pérdidas normales y punto que es considerado como VaR. Aunque lo anterior depende del perfil de riesgo del administrador de portafolio, se suele elegir probabilidades del 5% o inferiores, lo que en una distribución normal se sitúa en la cola izquierda de la distribución o zona de posibles pérdidas.

Otro factor importante a definir es el periodo de tiempo en el que se determina el VaR. De acuerdo con la experiencia, los administradores de portafolio utilizan periodos de medición de entre 1 y 10 días laborales.

Con estos dos factores en mente, Linsmeier y Pearson definen VaR como “la pérdida que se espera sea excedida con una probabilidad de solo un x% durante los periodos de t días” (Linsmeier & Pearson, 2000).

A pesar de la popularidad del VaR, su eficiencia se reduce cuando los retornos no se distribuyen normalmente. De acuerdo con Pavlo Krokhmal, Jonas Palmquist y Stanislav Uryasev, en su paper “Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constrains”, “en distribuciones no normales, el VaR puede tener propiedades indeseables tales como la falta de sub-aditividad y convexidad, por ejemplo, el VaR de un portafolio con dos instrumentos puede ser mayor que la suma de los VaR individuales de los dos instrumentos” (Krokhmal, Palmquist, & Uryasev, 2001).

De esta forma surge el Conditional VaR (CVaR), medida muy cercana al VaR que resuelve las limitaciones de las distribuciones de probabilidad no normales. De acuerdo con Krokhmal, Palmquist y Uryasev para distribuciones continuas, “CVaR se define como la pérdida esperada condicional bajo la condición que esta excede el VaR. Sin embargo, para las distribuciones en general, incluidas las distribuciones discretas, CVaR se define como el promedio ponderado del VaR y las pérdidas que lo exceden” (Krokhmal, Palmquist, & Uryasev, 2001)

El portafolio eficiente será el portafolio que tenga menor CVaR de los portafolios disponibles en la frontera eficiente. Teniendo esto en mente Krokhmal, Palmquist y Uryasev explican este proceso de la siguiente forma:

Sea $f\ (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la función de la pérdida asociada del portafolio "**x**", el cual fue seleccionado de un sub-grupo "X" de portafolios eficientes pertenecientes al universo IR^n y "**y**" la variable de incertidumbre que afecta la pérdida de "**x**", como los pueden ser el comportamiento de los precios en el mercado. De esta forma "para cada "**x**", la pérdida $f\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una variable aleatoria que tiene una distribución en IR inducida por "**y**"" (Krokhmal, Palmquist, & Uryasev, 2001).

De esta forma, la probabilidad que $f\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ no exceda el umbral δ está dado por,

$$\varphi(x, \delta) = \int_{f\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq\ \delta} p(y)dy$$

En donde p(y) es la función de densidad de la variable y. De esta forma, $\varphi(x, \delta)$ es la función de distribución acumulativa de la pérdida asociada con "**x**"**.** Por simplicidad, se asume que esta función es continua y no decreciente con respecto a δ.

Teniendo lo anterior en mente, "el VaR y el CVaR para la variable aleatoria de pérdida asociada con "**x**" y cualquier nivel de probabilidad α en (0,1) serán denotados por $\delta_\alpha(X)$ y $\Phi_\alpha(X)$ respectivamente" (Krokhmal, Palmquist, & Uryasev, 2001), y se definen de la siguiente forma:

$$\delta_\alpha(x) = \min\{\delta \in IR : \varphi(x,\delta) \geq \alpha\}$$

Es decir punto mínimo de la parte izquierda de la distribución de probabilidad que puede tomar el VaR dado un nivel de probabilidad definido α.

$$\Phi_\alpha(x) = (1 - \alpha)^{-1} \int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq \delta\alpha(x)} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) p(y) dy$$

De acuerdo con lo anterior, la probabilidad que el valor de $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq \delta\alpha(x)$ es $1-\alpha$. "De esta forma $\Phi_\alpha(x)$ surge como la expectativa de pérdida condicionada asociada con el portafolio "x" relativa a la pérdida siendo $\delta\alpha(x)$ o mayor" (Krokhmal, Palmquist, & Uryasev, 2001).

Así teniendo en cuenta el VaR y el CVaR, se define la función F_α en función de $\delta_\alpha(x)$ y $\Phi_\alpha(x)$,

$$F_\alpha(x,\delta) = \delta + (1 - \alpha)^{-1} \int_{y \in R^n} [f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \delta]^+ p(y) dy$$

En donde $[t]^+ = \max\{t,0\}$.

De acuerdo con Krokhmal, Palmquist y Uryasev "las características cruciales de F_α se resumen en dos teoremas,

Teorema 1. Como función de δ, $F_\alpha(x,\delta)$ es convexa y continuamente diferenciable. El CVaR de la pérdida asociada con cualquier "x" ∈ "X" se determina por la siguiente fórmula

$$\Phi_\alpha(x) = \min_{\delta \in R} F_\alpha(x,\delta)$$

En esta fórmula, el grupo consistente en los valores de δ de los cuales el mínimo es alcanzado, así

$$A_\alpha(x) = \text{argmin}_{\delta \in R} \ F_\alpha(x,\delta)$$

el cual es un intervalo cerrado y no vacío, y el VaR de la pérdida está dada por

$$\delta_\alpha(x) = \text{el punto más extremo de } A_\alpha(x)$$

De esta forma se puede establecer lo siguiente,

$$\delta_\alpha(x) \in \text{argmin}_{\delta \in R} \ F_\alpha(x,\delta) \ \text{y} \ \Phi_\alpha(x) = F_\alpha(x,\delta(x))$$

Otras importantes ventajas de ver VaR y CVaR a través de las formulas del Teorema 1, se capturan en el siguiente teorema.

Teorema 2. Minimizar el CVaR de la pérdida asociada con el portafolio “x” sobre los portafolios “x” ∈ “X” es equivalente a minimizar $F_\alpha(x,\delta)$ sobre todos los (x,δ) ∈ X x R, en el sentido que,

$$\min_{x \in X} \ \Phi_\alpha(x) = \min_{(x,\delta) \in X \times R} F_\alpha(x,\delta)$$

donde por otra parte un par de (x',δ') alcanza el lado derecho mínimo si y solo si x’ alcanza el lado izquierdo mínimo y δ' ∈ $A_\alpha(x')$” (Krokhmal, Palmquist, & Uryasev, 2001).

1.4.5 Probability of Outperformance (PO) y Shortfall (POS)

El Probability of Outperformance, en adelante PO, es una función de optimización no cuadrática que tiene la ventaja de ser una medida intuitiva. PO es la probabilidad de obtener un rendimiento mayor de un retorno objetivo. La función se define así,

$$F_k(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \emptyset(\frac{L(\theta) - k}{\sqrt{V(\theta)}})$$

En donde $L(\theta)$ es el retorno promedio real del portafolio; k el retorno promedio objetivo y V la varianza de los retornos.

Derivado de esta función surge Probability of Shortfall (POS), la cual es la probabilidad de obtener un rendimiento menor del retorno objetivo y se calcula como 1 – Probability of outperformance.

Al utilizar POS para la constitución de portafolios, el administrador escogerá el portafolio con menor probabilidad. De esta forma, “cuando los retornos se distribuyen normalmente, minimizar POS es equivalente a maximizar el Sharpe ratio” (Buckley, Saunders, & Seco, Portfolio optimization when asset returns have the Gaussian mixture distribution, 2008)

La función Probability of Shortfall (POS) es la propuesta por Buckley, Saunders & Seco como lo función de optimización adecuada para un modelo basado en la mezcla de distribuciones

Gaussianas. De acuerdo con ellos, “la razón para esto es que la media y la varianza no caracteriza ya todos los aspectos relevantes de las distribuciones del portafolio; si el número de activos subyacentes es grande (alrededor de 100), el programa no lineal se vuelve cada vez más complejo” (Buckley, Saunders, & Seco, Portfolio optimization when asset returns have the Gaussian mixture distribution, 2008).

1.4.6 Equal-weights o regla 1/N

El benchmark más utilizado en la academia para comparar el desempeño de las estrategias de optimización de portafolio es el de equal-weights o la regla del 1/N. Esta estrategia consiste en invertir por partes iguales el presupuesto en el número de activos seleccionados para componer el portafolio.

Sorprendentemente esta simple estrategia muchas veces es la más efectiva. De acuerdo con Victor DeMiguel, Lorenzo Garlappi y Raman Uppal en su paper “Optimal Versus Naive Diversification: How Innefficient is the 1/N Portfolio Strategy?” las dos razones por la que esta estrategia supera a las demás son:

1) “El número de activos N es grande, dado que aumenta el potencial de diversificación e incrementa el número de parámetros a ser estimados por el modelo de optimización, lo cual incrementa la posibilidad de error de la estimación.

2) La falta de información histórica que impida una adecuada estimación y comportamiento de los retornos de los activos” (DeMiguel, Garlappi, & Uppal, 2007).

Esta estrategia no incluye ninguna función de optimización y no tiene en cuenta información histórica.

2. Metodología

Para llevar a cabo este trabajo de grado se desarrollaron los siguientes pasos:

(1) Revisión bibliográfica:

Se realizó una revisión bibliográfica del siguiente material para robustecer el Marco Teórico y poder interpretar adecuadamente los resultados obtenidos a partir de la programación del modelo:

- The Art of R Programming: A Tour of Statistical Software desing (Matloff, 2011)
- Portfolio optimization when assets returns have the Gaussian Mixture distribution (Buckley, Comezaña, Djerroud, & Seco, 2008)
- Otras Fuentes bibliográficas que estén relacionadas con el desarrollo de la investigación.

(2) Determinación de las necesidades y obtención de información:

Se determinaron las necesidades de información histórica. En este punto se definieron 10 acciones que transan en el mercado colombiano, las cuales cuentan con alta liquidez, e información disponible de 3 años y 6 meses de los precios sobre los cuales se desarrollaron las estrategias de inversión.

(3) Programación del modelo en R:

Este trabajo de grado se desarrolló bajo la dirección y tutoría del Profesor Enrique ter Horst, quien tiene un Ph.D. en Estadística y Ciencias de la decisión de la Universidad de Duke en Estados Unidos.

Actualmente, el Profesor ter Horst está vinculado como profesor investigador en el Colegio de Estudios Superiores de Administración – CESA, enfocando su investigación en el uso de métodos Bayesianos en finanzas, econometría financiera, ingeniería financiera y administración de riesgo.

Dada su amplia experiencia en los métodos Bayesianos aplicados a finanzas y su conocimiento en R, el desarrollo de este trabajo de grado, significó una gran oportunidad para expandir los límites de mi conocimiento sobre el mercado de capitales y para conocer los últimos aportes a la Teoría Moderna de Selección de Portafolios.

Así con su conocimiento y experiencia, se procedió con la programación del modelo en R, el cual constituye la herramienta base para la selección de portafolios.

En términos generales, la programación consistió en el desarrollo del código, que configura el modelo bajo las distribuciones de probabilidad y las funciones de optimización seleccionadas.

En referencia a la implementación de las funciones de optimización, estas demandaron diferentes metodologías para su solución. Las funciones de media – varianza de Markowitz y el CVar son funciones estándar, las cuales al ser convexas permiten hallar un máximo.

Por otro lado, para implementar la maximización del Sharpe Ratio, se calculó el portafolio llamado “tangency portfolio”, el cual determina el máximo Sharpe Ratio, como el punto de la recta que hace intersección con la tasa libre de riesgo y es tangente a la frontera eficiente.

La función Probability of Shortfall, se maximiza con métodos de Kuhn-Tucker (multiplicadores de Lagrange) implementados en R, que usan el gradiente para determinarlo numéricamente. Las integrales en cuestión, se calculan usando la integración numérica mediante el método trapezoidal.

Finalmente, para el caso de las funciones de optimización Sortino Ratio y Omega Ratio, se procedió a la implementación de algoritmos genéticos y simulated annealing en R.

(4) Comparación de resultados y conclusiones:

Se realizó la simulación de la selección de los portafolios eficientes así:

- Usando el supuesto que los retornos se distribuyen normalmente, supuesto utilizado por Harry Markowitz en la Teoría de Portafolio, y utilizando la función de optimización de utilidad o media-varianza.

- Bajo la mezcla de distribuciones Gaussiana y la función de optimización Probability of Shortfall (POS). Enfoque propuesto por Buckley, Comezaña, Djerroud y Seco en su paper "Portfolio Optimización when asset returns have the Gaussian Mixture distribution" (Buckley, Comezaña, Djerroud, & Seco, 2008).

- Adicionalmente, suponiendo que los retornos se distribuyen normalmente, se programaron 5 diferentes funciones de optimización: Sharpe ratio, Sortino, Omega, Conditional VaR e Equal Weights.

Finalmente se compararon los resultados obtenidos y se concluyó cuál es la distribución de probabilidad que mejor describe el comportamiento de los activos seleccionados.

3. Resultados numéricos

Como se mencionó en la introducción, este trabajo de grado busca brindar conclusiones prácticas para la constitución de portafolios de inversión en el mercado de valores colombiano.

El mercado de renta variable local está compuesto actualmente por 83 emisores y su capitalización bursátil total asciende a COP$465.5 billones o USD$ 246.8 billones. La Bolsa de Valores de Colombia es la entidad administradora del sistema transaccional para la negociación de acciones, el cual está soportado en la plataforma de negociación X-Stream de Nasdaq-OMX (BVC, 2013). La aplicación del modelo y de las estrategias descritas en el marco teórico se realizó sobre un universo de 10 acciones.

A continuación se describirá el proceso de selección de los títulos contemplados dentro del análisis y se presentarán los resultados obtenidos en la aplicación de cada una de las estrategias.

3.1 Títulos de renta variable seleccionados

Con el fin de constituir portafolios de inversión y de esta forma evaluar cuál es la estrategia más eficiente para el mercado local, se determinó un universo de 10 acciones las cuales fueron seleccionadas por su alta liquidez y por pertenecer a las empresas con más alto nivel de capitalización bursátil, lo cual garantiza disponibilidad de información.

Para el análisis, se determinó un horizonte de 3 años y 6 meses, lo que corresponde a 854 días de negociación. A continuación se describirá cada uno de los títulos donde se incluye la capitalización bursátil actual, el número de acciones en circulación y el rendimiento anual promedio en el periodo observado.

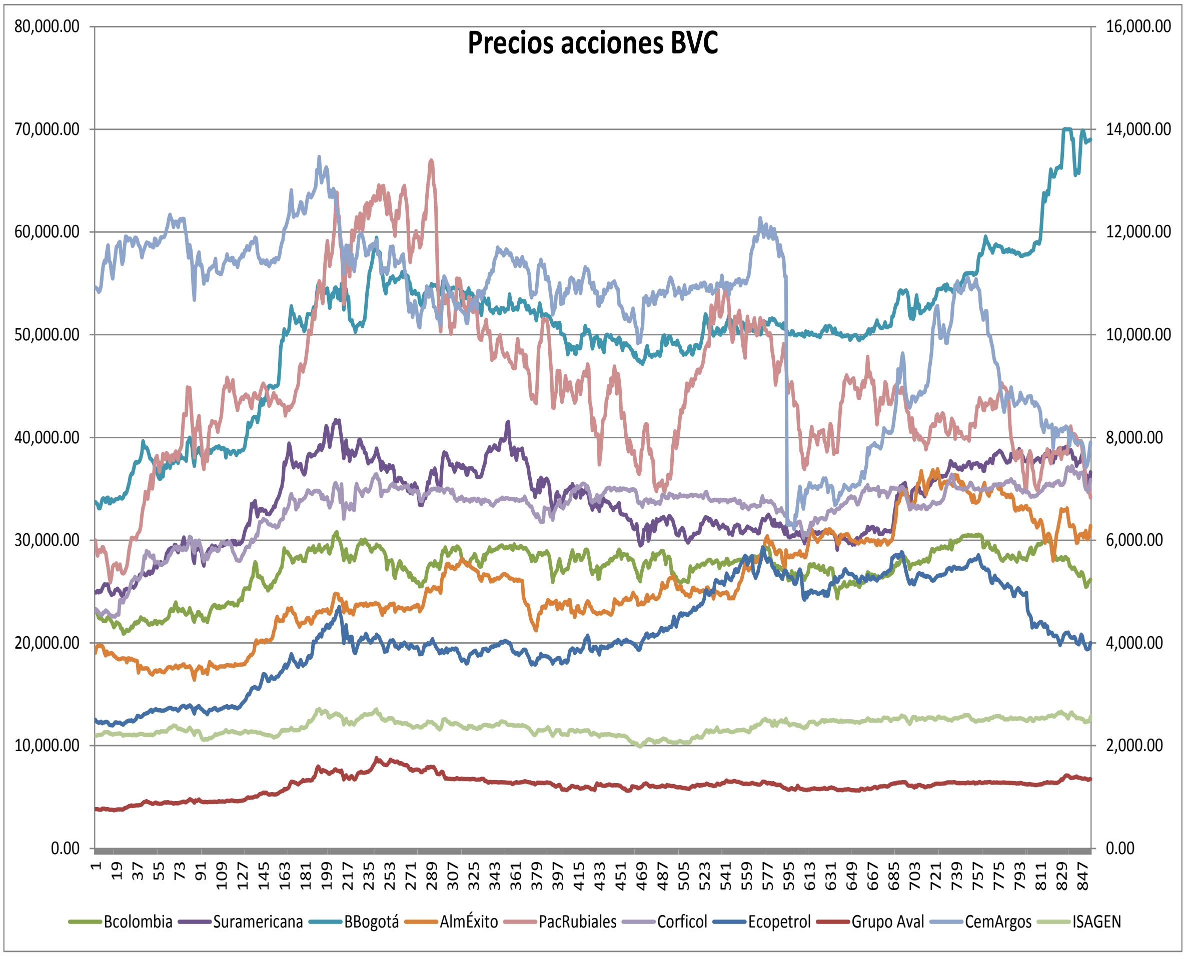
Tabla No. 1 – Títulos de renta variable seleccionados

Acción	Liquidez	Capitalización Bursátil (USD$)	Posición en ranking	Año listada	No. Acciones circulación	Rendimiento anual prom
Ecopetrol	Alta	100,092,094,442	1	2003	41,116,698,456	20.4%
Grupo Aval	Alta	13,568,356,784	2	1998	13,569,819,054	21.2%
Bancolombia	Alta	12,039,156,506	3	1981	509,704,584	18.2%
Suramericana	Alta	11,474,559,165	4	1981	469,037,260	19.4%
Banco de Bogotá	Alta	10,435,825,335	5	1981	286,836,113	15.2%
Almacenes Éxito	Alta	7,678,601,603	8	1994	448,240,151	20.1%
Cementos Argos	Alta	7,077,018,718	9	1981	1,151,672,310	31.3%
Pacific Rubiales	Alta	6,946,525,324	10	2009	323,402,776	32.7%
ISAGEN	Alta	4,503,645,827	11	2007	2,726,072,000	15.7%
Corficolombiana	Alta	4,371,164,392	14	1983	190,492,182	14.7%

Fuente: Bolsa de Valores de Colombia (BVC, 2013)

La siguiente gráfica presenta de manera consolidada el comportamiento de los precios de las acciones en el periodo evaluado.

Gráfica No.1 – Precios de los títulos de renta variable



Fuente: Bolsa de Valores de Colombia (BVC, 2013).

Los precios y rendimientos individuales de las acciones utilizados se presentan en el Anexo 1.

3.2 Resultados de las Estrategias de Inversión

Una vez seleccionado el universo disponible de acciones, se procedió a ejecutar cada una de las estrategias de inversión basadas en los siguientes supuestos:

- Monto invertido inicial: USD$ 1,000.
- Tasa libre de riesgo para Colombia: 5%
- Costo por transacción: 60 bp
- Periodo evaluado: Enero 2010 – Junio 2013

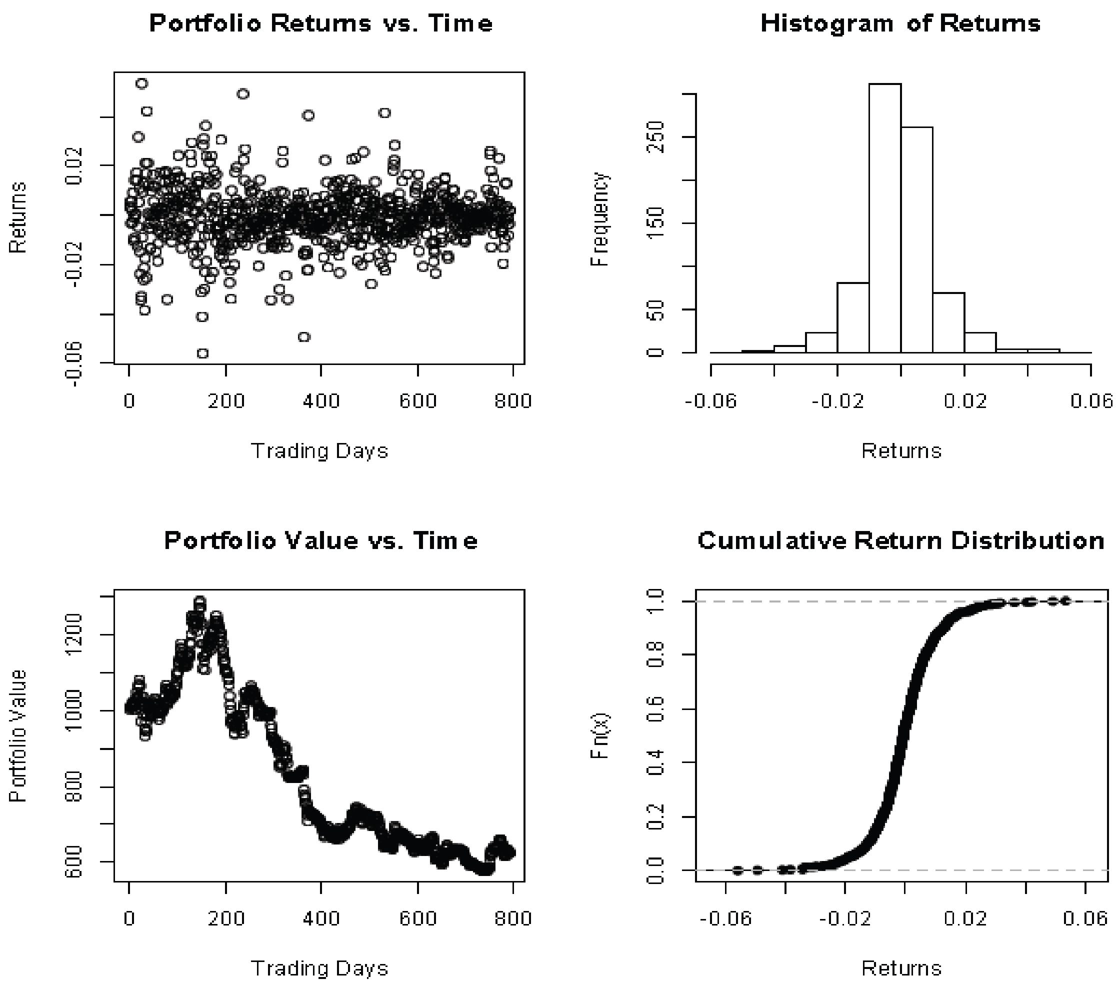
A continuación se presentarán los resultados obtenidos con las siguientes estrategias de inversión:

- Estrategia 1: Media-varianza de Markowitz
- Estrategia 2: Minimizar Probability of Shortfall (POS)
- Estrategia 3: Maximizar Sharpe ratio
- Estrategia 4: Minimizar Sortino ratio
- Estrategia 5: Maximizar Omega ratio
- Estrategia 6: Minimizar Conditional CVaR
- Estrategia 7: Equal Weights

En el Anexo 2 se presenta el resumen estadístico de cada una de las estrategias implementadas.

3.2.1 Estrategia 1: Media-varianza de Markowitz

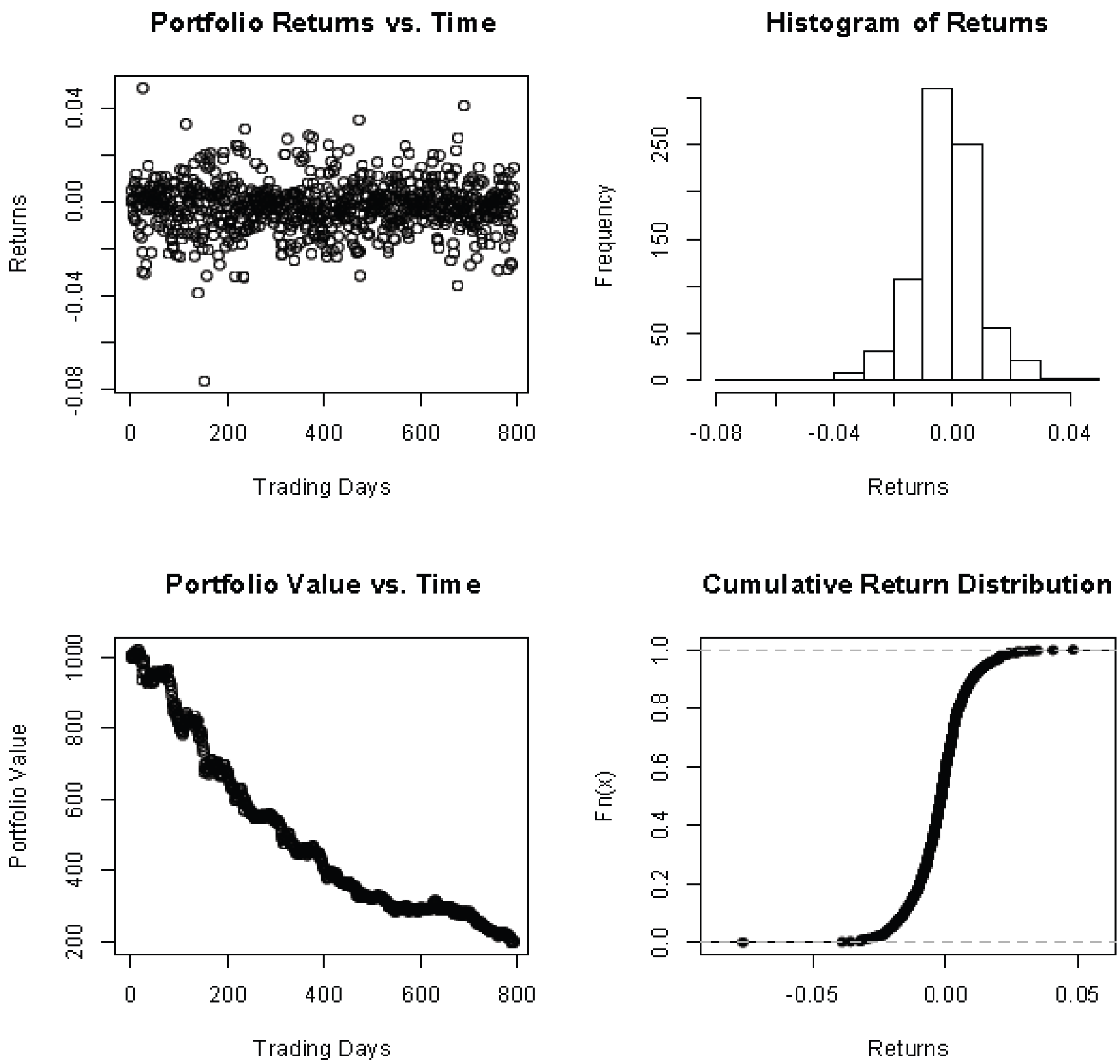
Gráfica No.2 – Resultados Estrategia 1



La estrategia de optimización media-varianza que sigue lo postulado por Harry Markowitz presentó una desvalorización del portafolio del 37.5%, finalizando el periodo observado con USD$624.86. De acuerdo con el histograma, los retornos parecen distribuirse normalmente, sin embargo presentan un coeficiente de curtosis ligeramente mayor a 3, lo que significa que describe una punta más pronunciada o leptocúrtica. La media de los retornos es -0.05282% diario y la desviación estándar o volatilidad promedio diaria es de 1.14% y anual de 18.2%.

3.2.2 Estrategia 2: Minimizar Probability of Shortfall

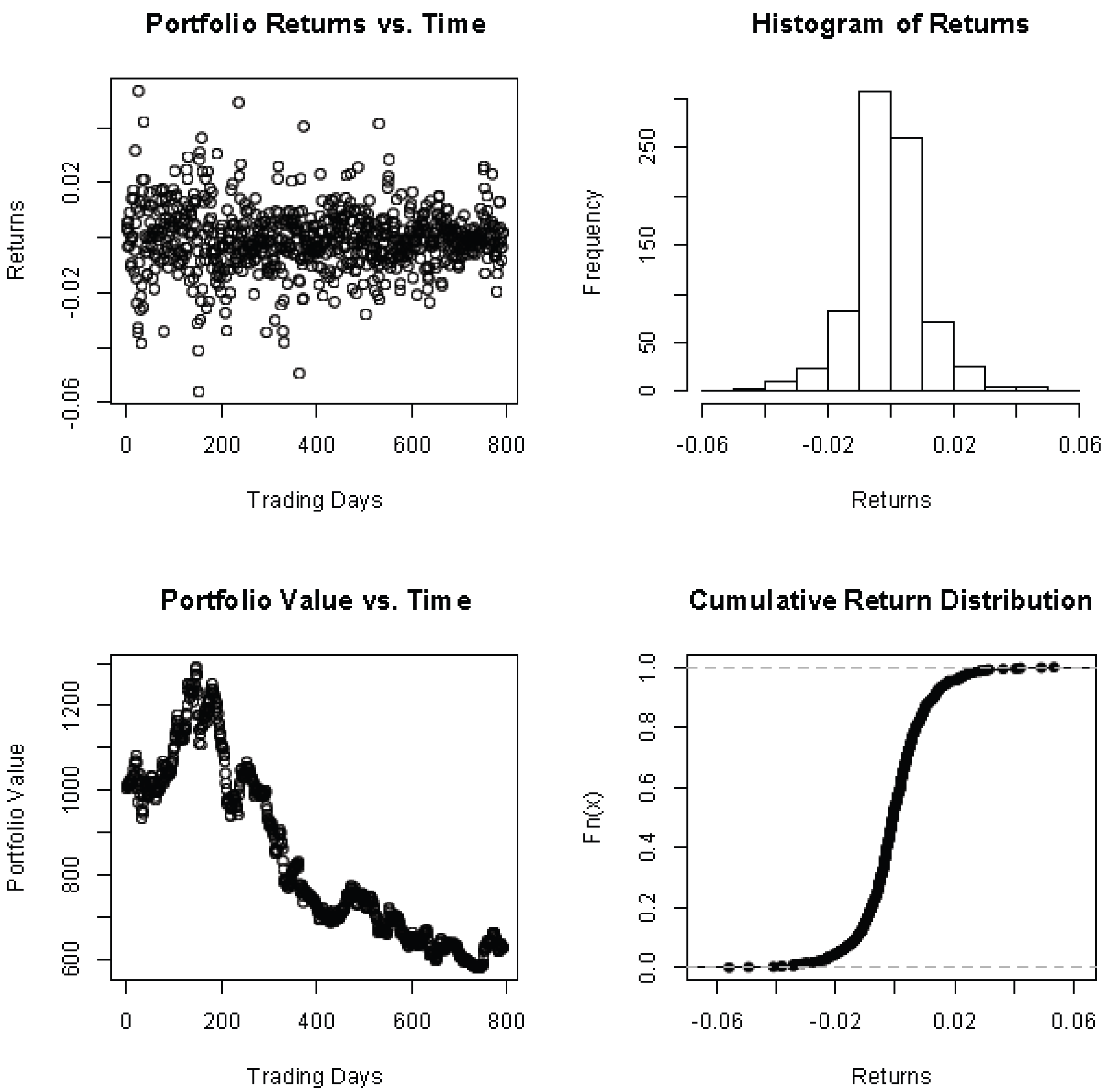
Gráfica No.3 – Resultados Estrategia 2



La estrategia de optimización de Probability of Shortfall (POS) presentó una desvalorización del portafolio del 79.9%, la más pronunciada de todas las reducciones, lo que significó una pérdida de USD$798.57. El histograma muestra una mayor frecuencia de los retornos en el primer percentil a la izquierda de la media en terreno negativo, punta leptocúrtica y sesgo negativo. El promedio es de -0.19576% y la desviación estándar o volatilidad promedio diaria de 1.10% y anual de 17.6%.

3.2.3 Estrategia 3: Maximizar Sharpe Ratio

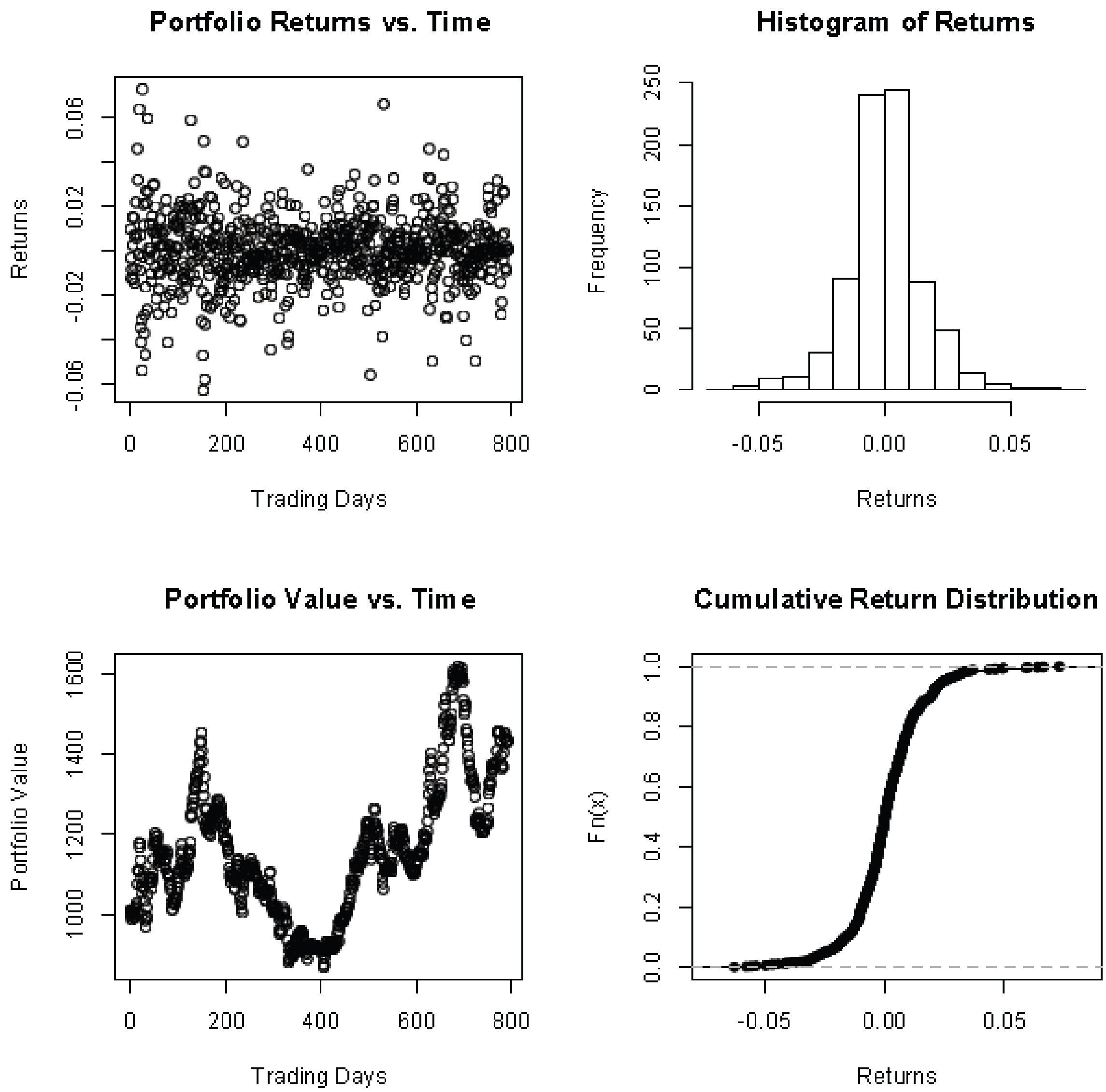
Gráfica No.4 – Resultados Estrategia 3



La estrategia de optimización del Sharpe ratio presentó una desvalorización del portafolio del 37.2%, finalizando el periodo observado en USD$627.71. De acuerdo con el histograma, los retornos parecen seguir una distribución normal, dado que el coficiente de curtosis es 2.92 y presenta un coeficiente de sesgo de 0.0137, muy cercano a cero. La media de los retornos es de -0.052% y la volatilidad promedio diaria de 1.16% y anual de 18.5%.

3.2.4 Estrategia 4: minimizar Sortino Ratio

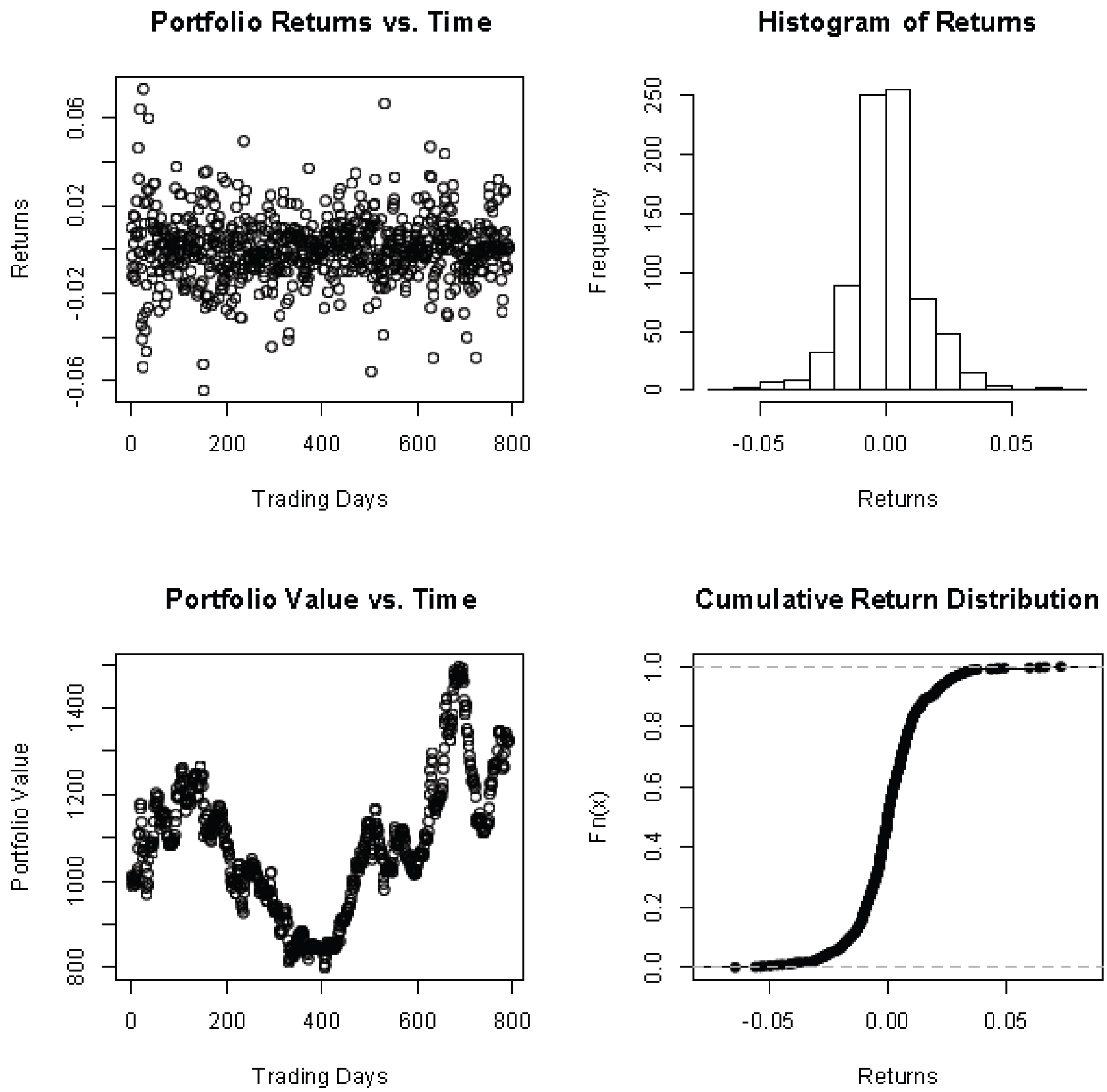
Gráfica No.5 – Resultados Estrategia 4



La estrategia de optimización del Sortino ratio presentó una valorización del portafolio del 43.5%, lo que la convierte en la estrategia que más generó valorización, finalizando el periodo con un valor de portafolio de USD$1,436.96.Los retornos parecen seguir una distribución normal, dada su simetría y punta mesocúrtica. La media se ubica en terreno positivo (0.05737%) y su desviación estándar o volatilidad promedio diaria es de 1.54% y anual de 24.6%.

3.2.5 Estrategia 5: maximizar Omega Ratio

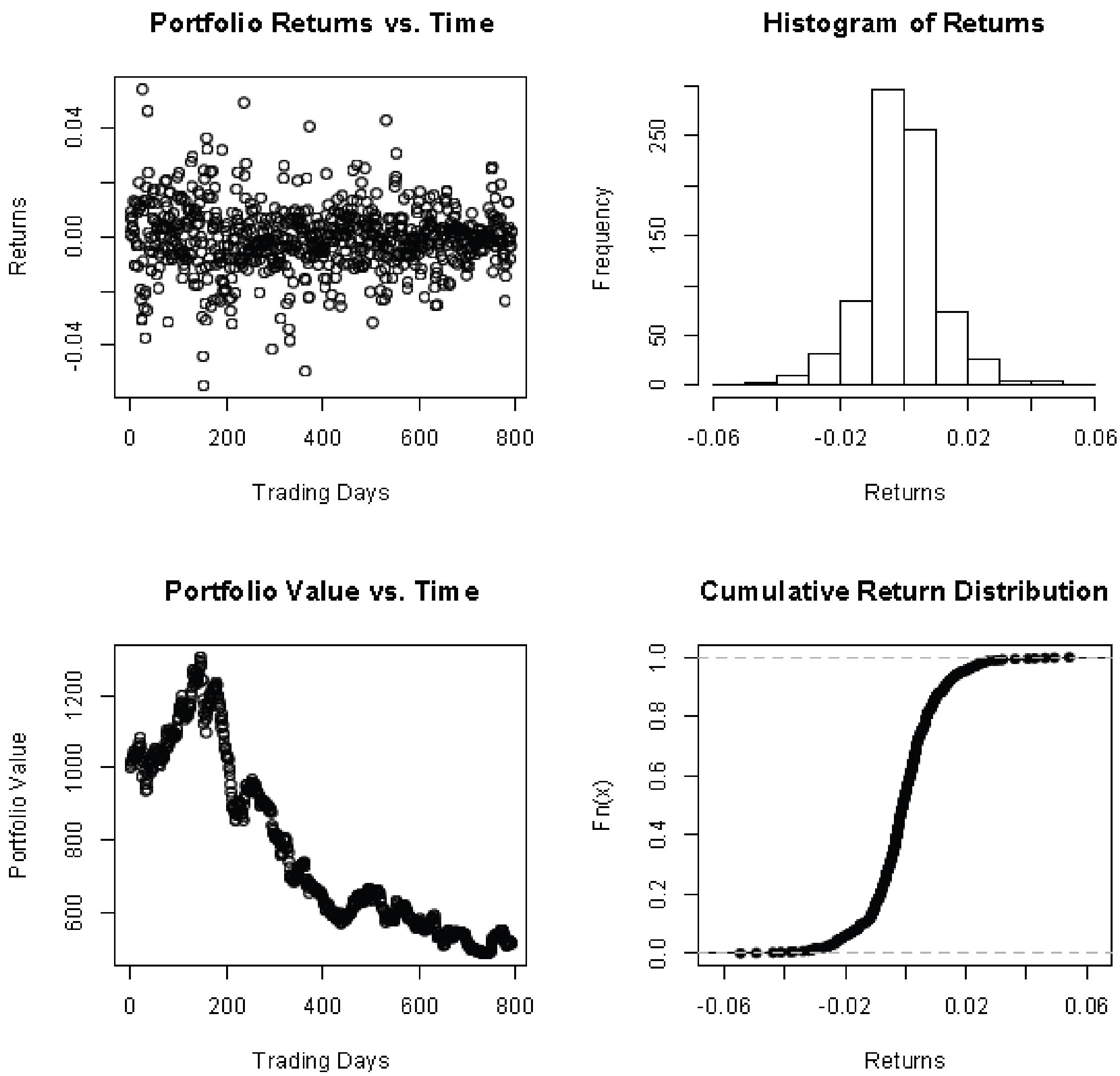
Gráfica No.6 – Resultados Estrategia 5



La estrategia de optimización del Omega ratio presentó una valorización del portafolio del 32.5%, presentando en junio de 2013 un valor de portafolio de USD$1,324.98. La distribución es leptocúrtica, más puntiaguda, y dada su menor cercanía a cero, presenta un sesgo positivo. Los retornos presentan una media de 0.04647% y la volatilidad promedio diaria es de 1.48% y anual es de 23.7%.

3.2.6 Estrategia 6: Conditional VAR

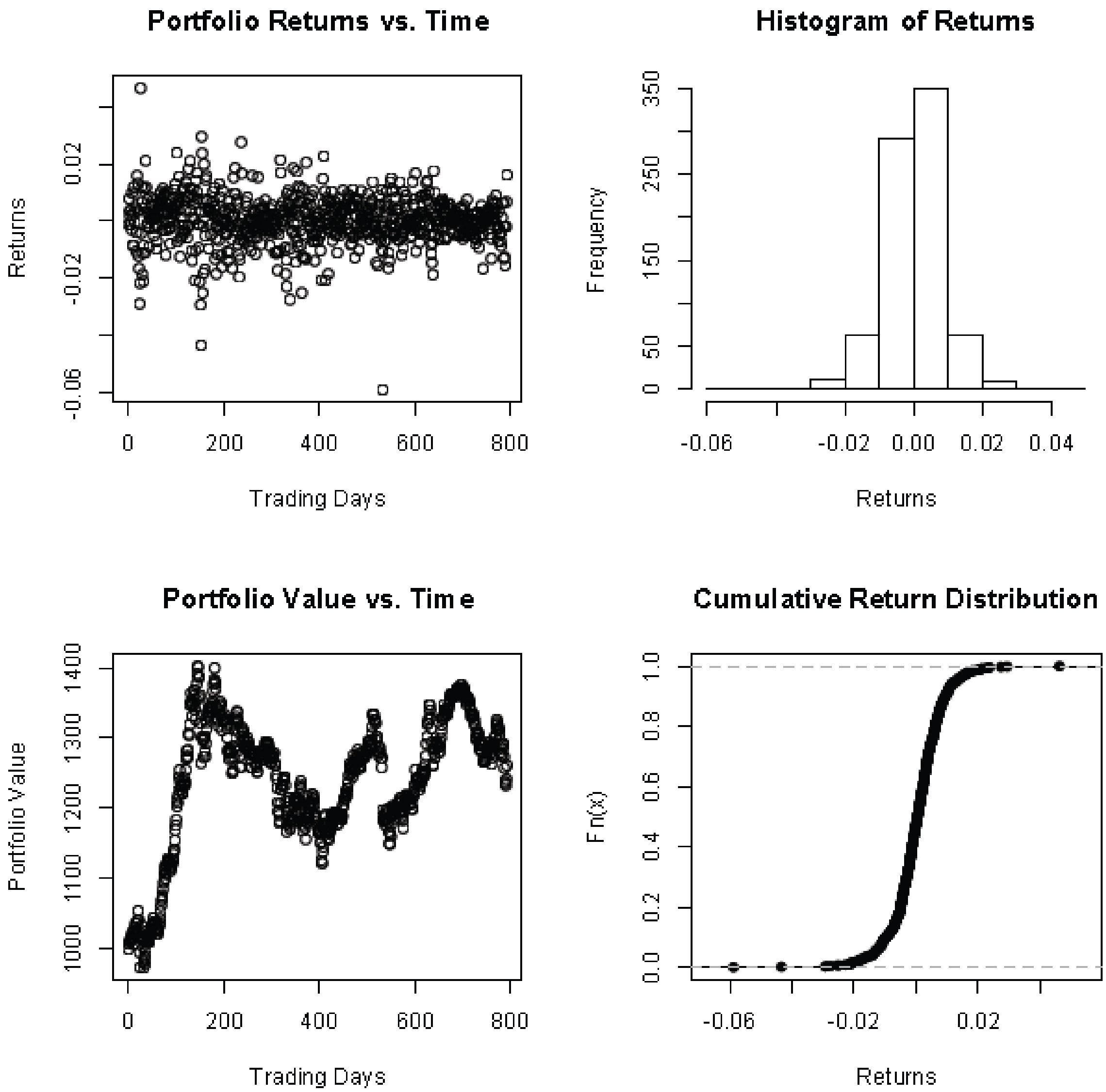
Gráfica No.7 – Resultados Estrategia 6



La estrategia de optimización del Conditional VAR presentó una desvalorización del portafolio del 48.4%, por lo cual el portafolio del inversionista que siguió esta estrategia al final será únicamente de USD$515.51. De acuerdo con el histograma, los retornos parecen seguir una distribución normal, sin embargo es platocúrtica y su coeficiente presenta un sesgo positivo. El promedio de los retornos es de -0.07642% y su o volatilidad promedio diaria es de 1.19% y anual es de 19.0%.

3.2.7 Estrategia 7: Equal Weights

Gráfica No.8 – Resultados Estrategia 7



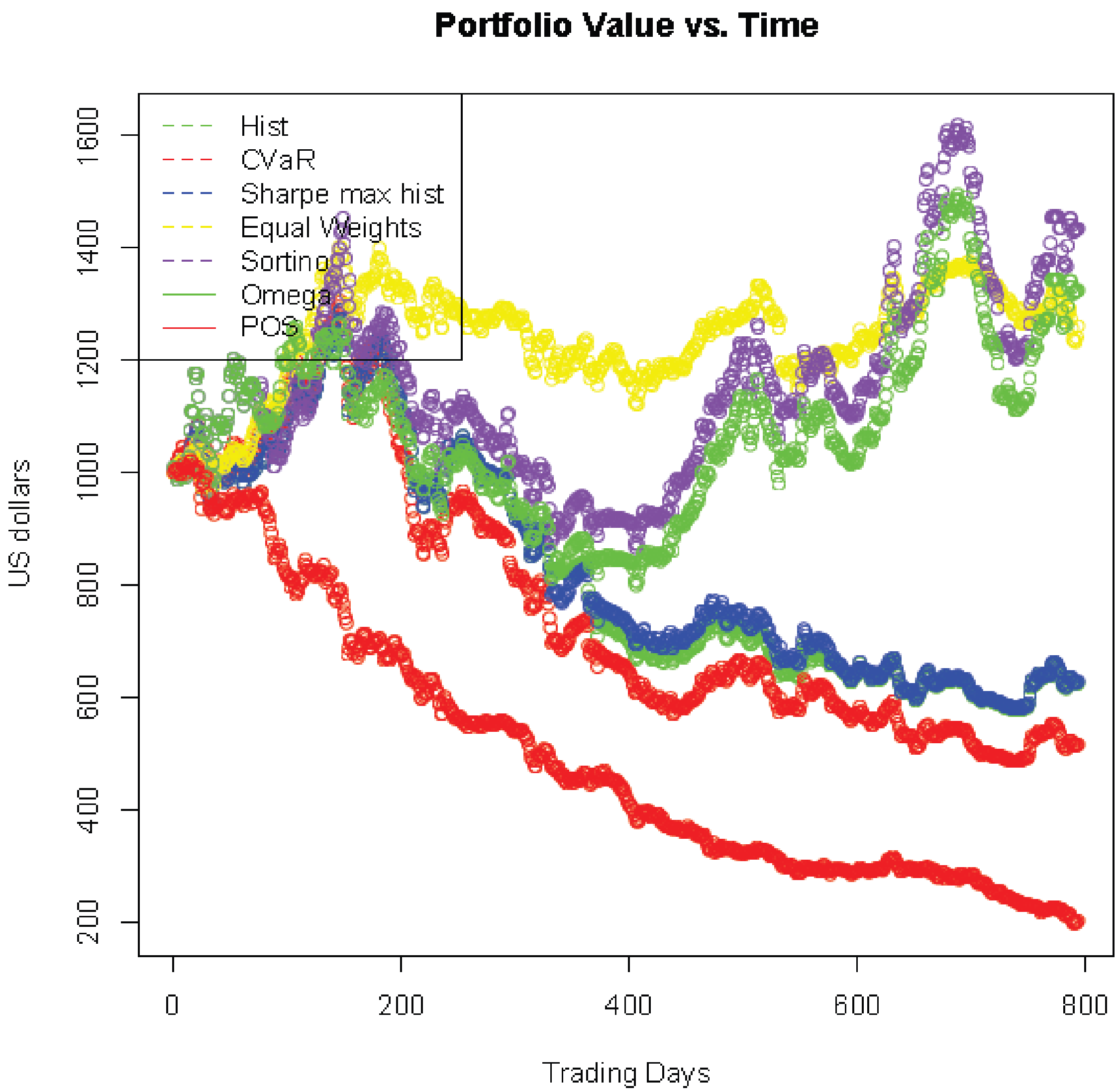
La estrategia de optimización Equal Weights presentó una valorización del portafolio del 26.1%, por lo cual el valor del portafolio al final del periodo de evaluación es de USD$1,261.18. El histograma muestra una mayor frecuencia de los retornos en el primer percentil a la derecha de la media, en terreno positivo, punta leptocúrtica y sesgo negativo a la izquierda. La media es de 0.03283% y la desviación estándar o volatilidad promedio diaria es de 0.84% y es de 13.5%.

Es relevante mencionar, que esta fue la estrategia menos riesgosa y la única que siempre presentó un valor de portafolio mayor a la inversión inicial. Como se mencionó anteriormente, los resultados obtenidos con esta estrategia muchas veces son mejores que los demás porque no enfrentan el desafío de modelar adecuadamente las diferentes variables que influyen en el comportamiento de los retornos de los activos y porque se mantienen diversificados en la misma medida a través del tiempo.

A pesar de lo anterior, esta estrategia es utilizada únicamente con fines comparativos. El objetivo de este trabajo de grado es el de brindar conclusiones encaminadas a determinar el modelo más adecuado para la constitución de portafolios de inversión en Colombia.

3.3 Comparación de Estrategias de Inversión

Gráfica No.9 – Comparación de Estrategias de Inversión



La gráfica superior presenta el valor del portafolio de cada una de las estrategias evaluadas, en el horizonte de tiempo seleccionado. Tres de ellas (No. 3 Sortino, No. 4 Omega y No. 7 Equal Weights) presentaron valorización positiva, terminando en junio de 2013 con un valor de portafolio mayor a la inversión inicial de USD$1,000. Por otro lado, las 4 estrategias restantes presentaron reducciones en su valor de entre 37.23% y 79.86%.

A continuación se presenta un cuadro de comparación de los resultados obtenidos.

Tabla No. 2 – Resumen resultados estrategias de inversión

No.	Estrategia	Valor Final Portafolio	Rentabilidad	Volatilidad prom diaria	Volatilidad prom anual
1	Media-varianza MZ	624.86	-37.51%	1.14%	18.15%
2	Sharpe max hist	627.71	-37.23%	1.16%	18.49%
3	Sortino	1,434.96	43.50%	1.54%	24.58%
4	Omega	1,324.98	32.50%	1.48%	23.69%
5	CVaR	515.51	-48.45%	1.19%	19.03%
6	POS	201.43	-79.86%	1.10%	17.60%
7	Equal Weights	1,261.18	26.12%	0.84%	13.47%

Fuente: Elaboración propia

Por rentabilidad, la estrategia con la que se obtuvo un mejor resultado fue la No. 3 Minmizar Sortino ratio, la cual vio aumentar el valor de su portafolio en 43.50%. En contraste con este resultado, con la estrategia No. 6 Minimizar Probability of Shortfall se redujo el valor del portafolio 79.86%.

A continuación se presenta el ranking de las estrategias organizado por rentabilidad.

Tabla No. 3 – Ranking de estrategias por rentabilidad

		Ranking	
No.	**Estrategia**	**Valor Final Portafolio**	**Volatilidad**
3	Sortino	1	7
4	Omega	2	6
7	Equal Weights	3	1
2	Sharpe max hist	4	4
1	Media-varianza MZ	5	3
5	CVaR	6	5
6	POS	7	2

Fuente: Elaboración propia

Sin embargo al tener en cuenta la desviación estándar que mide la volatilidad, se observa que la estrategia No. 1 además de ser la opción más rentable también es la más volátil. Por nivel de riesgo, la estrategia No. 7 Equal Weights es la de menor volatilidad, lo que es reforzado por el hecho de que nunca tuvo un valor de portafolio menor a la inversión inicial.

Tabla No. 4 – Ranking de estrategias por volatilidad

		Ranking	
No.	**Estrategia**	**Volatilidad**	**Valor Final Portafolio**
7	Equal Weights	1	3
6	POS	2	7
1	Media-varianza MZ	3	5
2	Sharpe max hist	4	4
5	CVaR	5	6
4	Omega	6	2
3	Sortino	7	1

Fuente: Elaboración propia

4. Conclusiones

Este trabajo de grado surgió con el ánimo de realizar un aporte al desarrollo del mercado de valores de Colombia, específicamente con el objetivo de brindar conclusiones en el proceso de toma de decisiones de inversión, puntualmente para la constitución eficiente de portafolios.

Abarca una revisión teórica de la Teoría Moderna de Portafolios desde sus orígenes hasta la actualidad, en donde en más de 60 años de la evolución del sector financiero, se presenta también un desarrollo paralelo de la teoría, lo cual amplía los límites conocidos.

Además de lo anterior, este trabajo contempla una aplicación práctica, con la cual se busca formular conclusiones específicas para el mercado colombiano. Se evaluó puntualmente el enfoque propuesto por Buckley, Comezaña, Djerroud y Seco en su paper “Portfolio optimization when asset returns have the gaussian mixture distribution” (Buckley, Comezaña, Djerroud, & Seco, 2008), en donde describen dos limitaciones importantes de la Teoría de Selección de Portafolios, las cuales reducen la capacidad de predicción de los modelos.

Los autores plantean que dichas limitaciones se resuelven, si se asume que los retornos de los activos describen una distribución diferente a la normal, específicamente una mezcla de distribuciones gaussianas, con lo cual se logra caracterizar mejor el comportamiento de los retornos y se obtienen proyecciones más acertadas sobre el futuro.

Finalmente, esta aplicación práctica se complementa con la utilización de 5 funciones de optimización adicionales, puntualmente: maximizar el Sharpe ratio, minimizar el Sortino ratio, maximizar el Omega ratio, minimizar el Conditional CVar e Equal Weights, lo cual brinda una mayor perspectiva al análisis.

En términos numéricos, los resultados obtenidos fueron reveladores. Durante el periodo evaluado, el portafolio que se estructuró bajo los supuestos planteados por Markowitz presentó una desvalorización total de 37.5%, siendo la 5ta estrategia más efectiva en términos de rentabilidad y la 3era de menor volatilidad.

En comparación con la anterior, el resultado obtenido con el modelo propuesto por Buckley, Comezaña, Djerroud y Seco, fue el menor. Bajo dicha estrategia, el valor inicial del portafolio se redujo 79.86%, siendo la menos efectiva en términos de rentabilidad pero la segunda menos volátil.

En contraste con lo anterior, el modelo que asume que los retornos se distribuyen normalmente, pero que a diferencia de lo planteado por Markowitz, utiliza funciones de optimización diferentes, como minimizar el Sortino ratio y maximizar el Omega ratio, presentó una valorización del portafolio incluso mayor a la estrategia de invertir por igual en todos los activos, estrategia que se utiliza como punto de comparación para determinar la eficiencia de los modelos evaluados.

De esta forma, se puede establecer la primera conclusión: los modelos de constitución de portafolios para el mercado de valores colombiano son más eficientes cuando asumen que los retornos de los activos se distribuyen normalmente. La anterior conclusión no solamente se sustenta en el resultado del valor del portafolio, sino en las formas de las distribuciones obtenidas.

Todas las estrategias presentaron distribuciones con formas muy cercanas a la normal. Aunque algunas de ellas poseen puntas más alargadas, lo que las hace leptocúrticas, y coeficiente de asimetría diferente de cero, las diferencias no presentan magnitudes significativas.

Por otro lado, de acuerdo con Buckley, Comezaña, Djerroud y Seco, el modelo flexible, que utiliza la mezcla de distribuciones Gaussianas y la función de optimización POS, fue propuesto para estructurar portafolios de gran número[1] de activos y de naturaleza variada, lo cual ocasiona que en conjunto el portafolio describa una distribución de probabilidad muy particular.

En ese sentido, es comprensible que el modelo no haya mostrado un rendimiento adecuado sobre un universo de 10 acciones. Si aceptamos lo anterior, podemos inferir que dado el tamaño del mercado de valores de Colombia, en el cual existen únicamente 83 emisores, los modelos flexibles no son indispensables todavía y podrían llevar a tomar decisiones inadecuadas.

En cuanto a las funciones de optimización, las que presentaron mejores resultados fueron minimizar el Sortino ratio y maximizar el Omega ratio, las dos basadas en

---

[1] Los autores no especifican un número exacto. Sin embargo hacen en algunas partes del documento referencia a portafolios de más de 100 activos diferentes.

indicadores desarrollados con fines de evaluación de fondos. Estos indicadores fueron creados con fines prácticos y su utilización se popularizó dada su capacidad para servir como medida de comparación.

Es relevante mencionar, que a pesar de su excelente resultado a nivel de rentabilidad, el modelo bajo estas dos funciones de optimización presentó los mayores niveles de volatilidad a través del periodo, lo cual es la característica principal de los hedge funds: obtener mayor rentabilidad en mercados con mayor volatilidad.

De esta forma se puede concluir, que los modelos para constituir portafolios en Colombia son más eficientes cuando asumen que los retornos de los activos se distribuyen normalmente y utilizan una función de optimización que tenga en cuenta rendimientos diferenciales frente a una meta mínima, como lo hacen Sortino ratio y Omega ratio.

5. Bibliografía

Ang, A., & Bekaert, G. (2004). How do regimes affect asset allocation? *Financial Analysts Journal*, 86 - 99.

Buckley, I., Comezaña, G., Djerroud, B., & Seco, L. (2008). Portfolio optimization when asset returns have the gaussian mixture distribution. *European Journal of Operational Research*, 1434 - 1461.

Buckley, I., Saunders, D., & Seco, L. (2008). Portfolio optimization when asset returns have the Gaussian mixture distribution. *European Journal of Operational Research*, 1434 - 1461.

BVC. (27 de 10 de 2013). *Bolsa de Valores de Colombia*. Recuperado el 27 de 10 de 2013, de http://www.bvc.com.co

Caudhry , A., & Johnson, H. (2008). The efficacy of the Sortino Ratio and Other Benchmarked Performance Measures under skewed return distribution. *Australian Journal of Managment*, 19.

Coll, R. H. (2006). La nueva revolución de los activos alternativos. El caso de los fondos de cobertura. *Revista de Empresa*, 74 - 86.

DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2007). Optimal versus naive diversification: How Innefficent is the 1/N Portfolio Strategy? *Oxford University Press*, 39.

Engels, M. *(14 de Enero de 2004). Portfolio Optimization: Beyond Markowitz.* Tesis de maestría no publicada.Universiteit Leiden, Leiden, Holanda.

Favre-Bulle, A., & Pache, S. (2003). *The Omega Measure: Hedge Fund Portfolio Optimization.* Tesis de maestría no publicada. University of Lausanne - Ecole des HEC, Lausanne, Suiza.

Frühwirth-Schanatter, S. (2006). *Finite Mixture and Markov Switching Models.* USA: Springer.

Krokhmal, P., Palmquist, J., & Uryasev, S. (2001). *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints.* Reporte de investigación #99-14. Universidad de la Florida, Gainesville, Florida, Estados Unidos.

Linsmeier, T., & Pearson, N. (2000). Value at Risk. *Financial Analysts Journal*, 21.

Mangram, M. E. (2013). A Simplified perspective of the Markowitz Portfolio Theory. *Global Journal of Business Research*, 59 - 70.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance, 7*(1), 77 - 91.

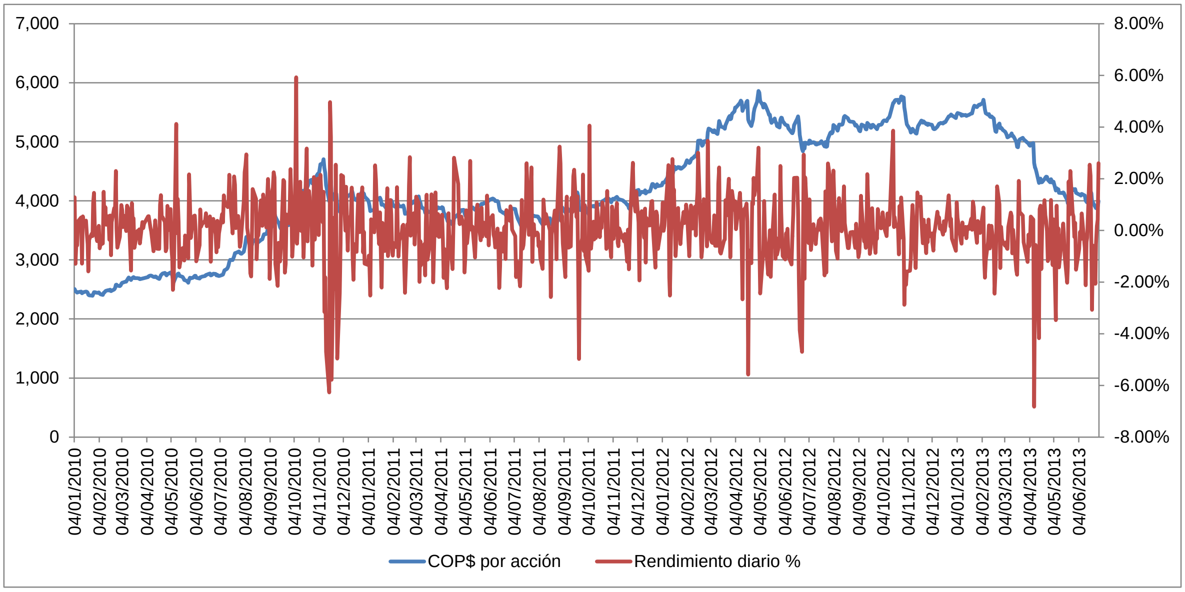
Matloff, N. (2011). *The Art of R Programming: A Tour of Statistical Software desing.* San Francisco, California: no starch press.

Sharpe, W. F. (1966). Mutual funds performance. *Journal of Business*, 20.

Sharpe, W. F. (1994). The Sharpe Ratio. *The Jorunal of Portfolio Management*, 20.

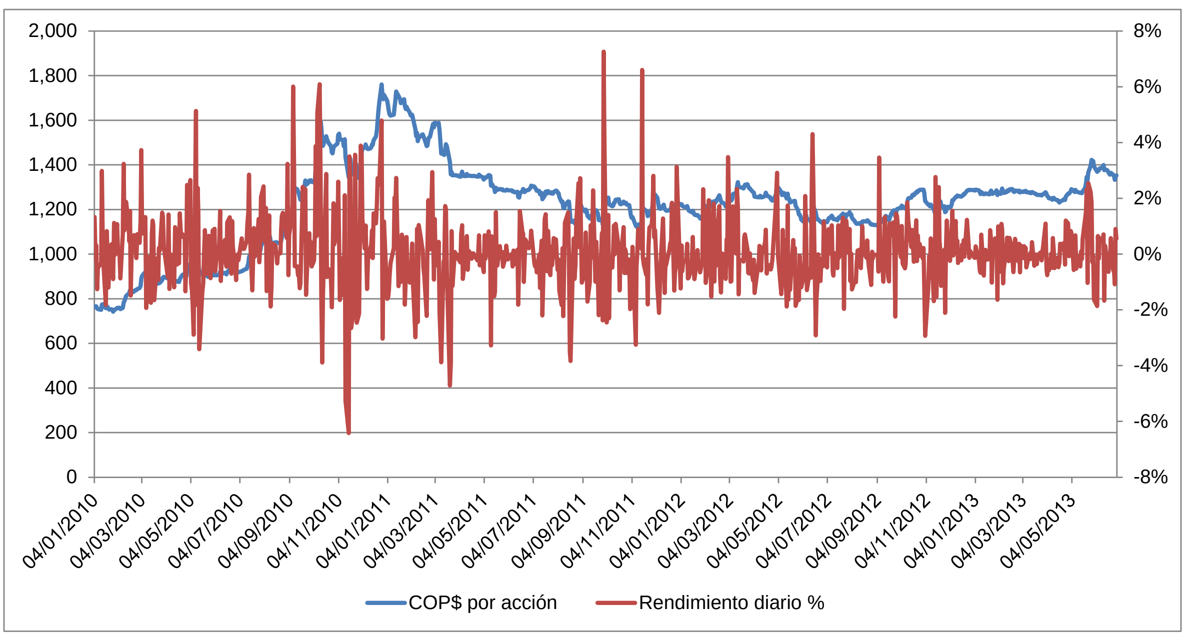
Anexo 1 - Precios títulos renta variable [2] [3]

A.1.1 Ecopetrol



Fuente: Elaboración propia con información de la Bolsa de Valores de Colombia(BVC, 2013)

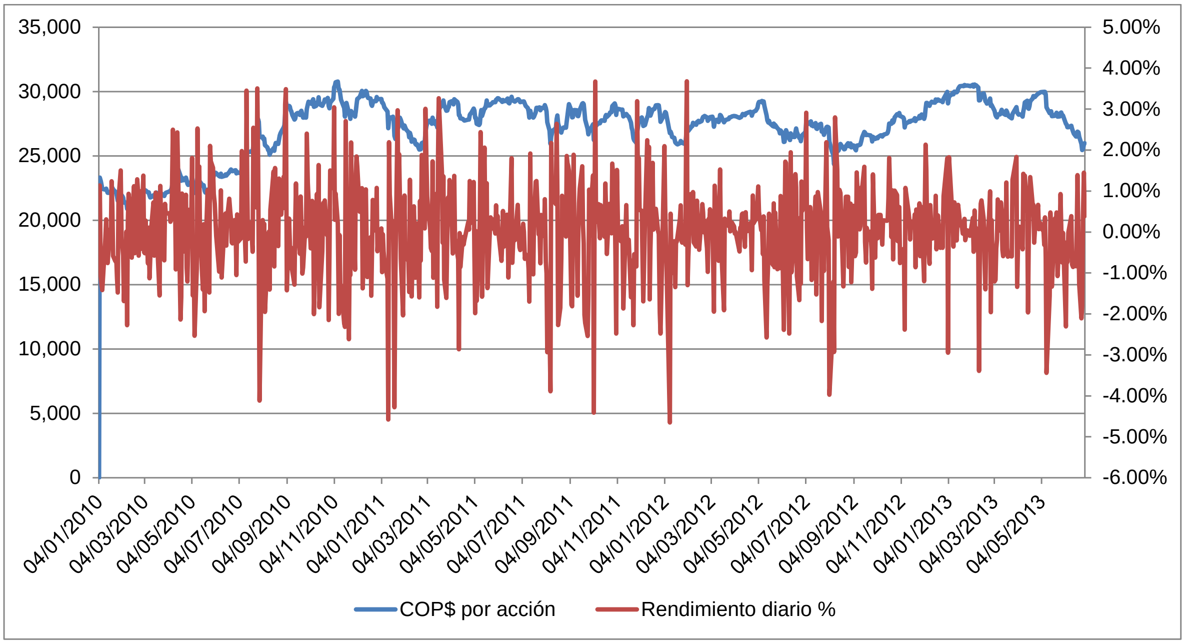
A.1.2 Grupo Aval



Fuente: Elaboración propia con información de la Bolsa de Valores de Colombia(BVC, 2013)

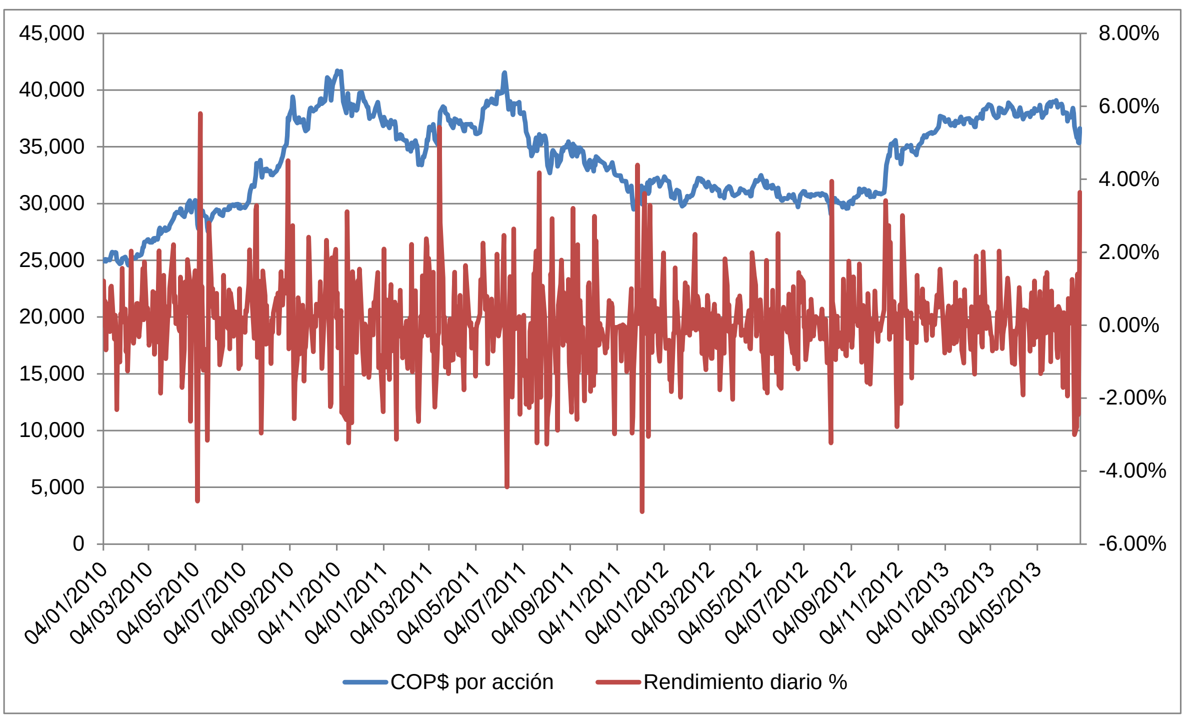
[2] Periodo evaluado 04/01/2010 - 28/06/2013

A.1.3 Bancolombia



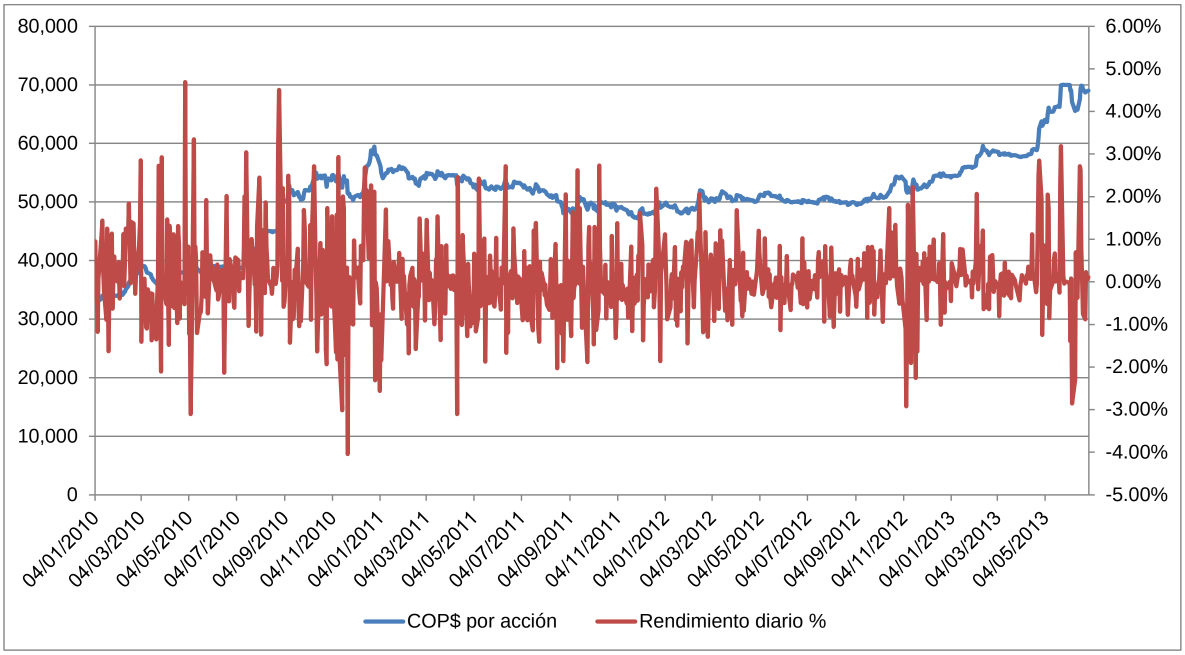
Fuente: Elaboración propia con información de la Bolsa de Valores de Colombia(BVC, 2013)

A.1.4 Grupo de Inversiones Suramericana



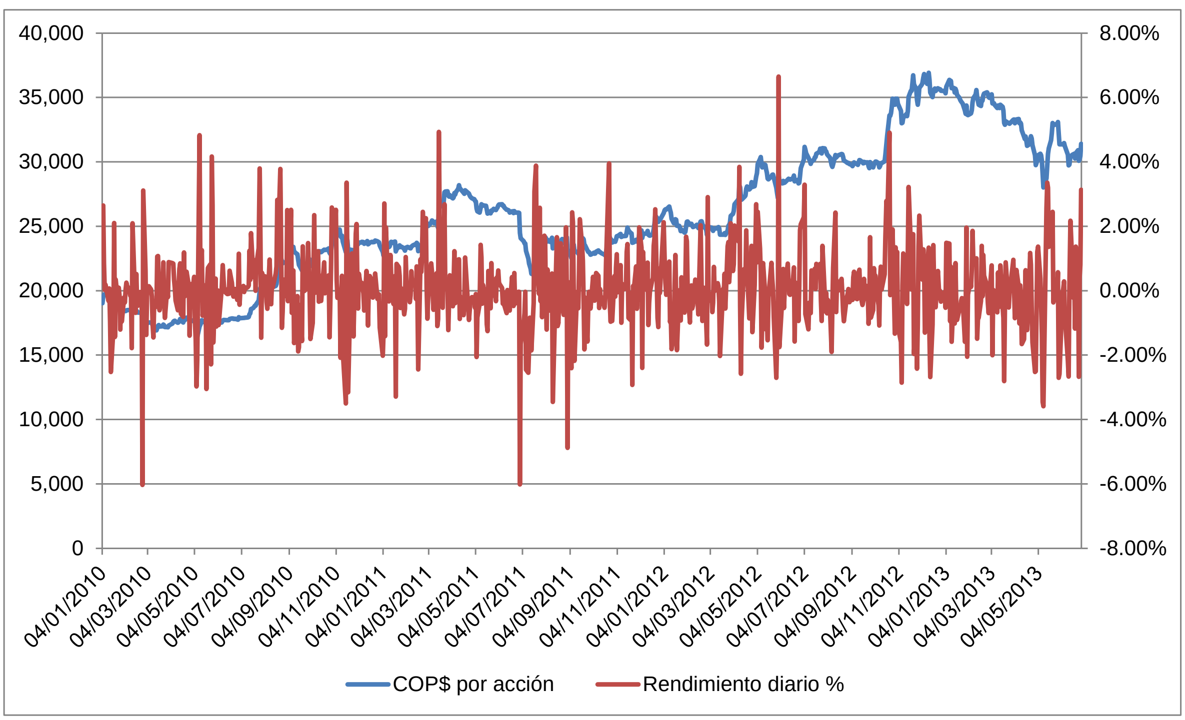
Fuente: Elaboración propia con información de la Bolsa de Valores de Colombia(BVC, 2013)

A.1.5 Banco de Bogotá



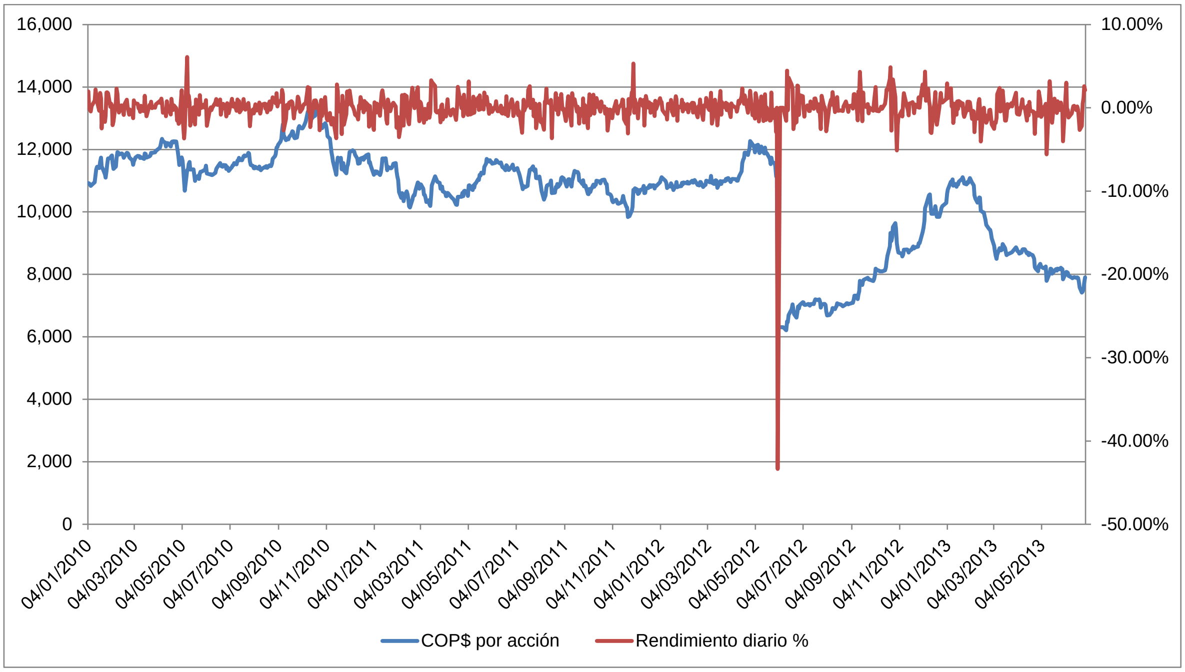
Fuente: Elaboración propia con información de la Bolsa de Valores de Colombia(BVC, 2013)

A.1.6 Almacenes Éxito



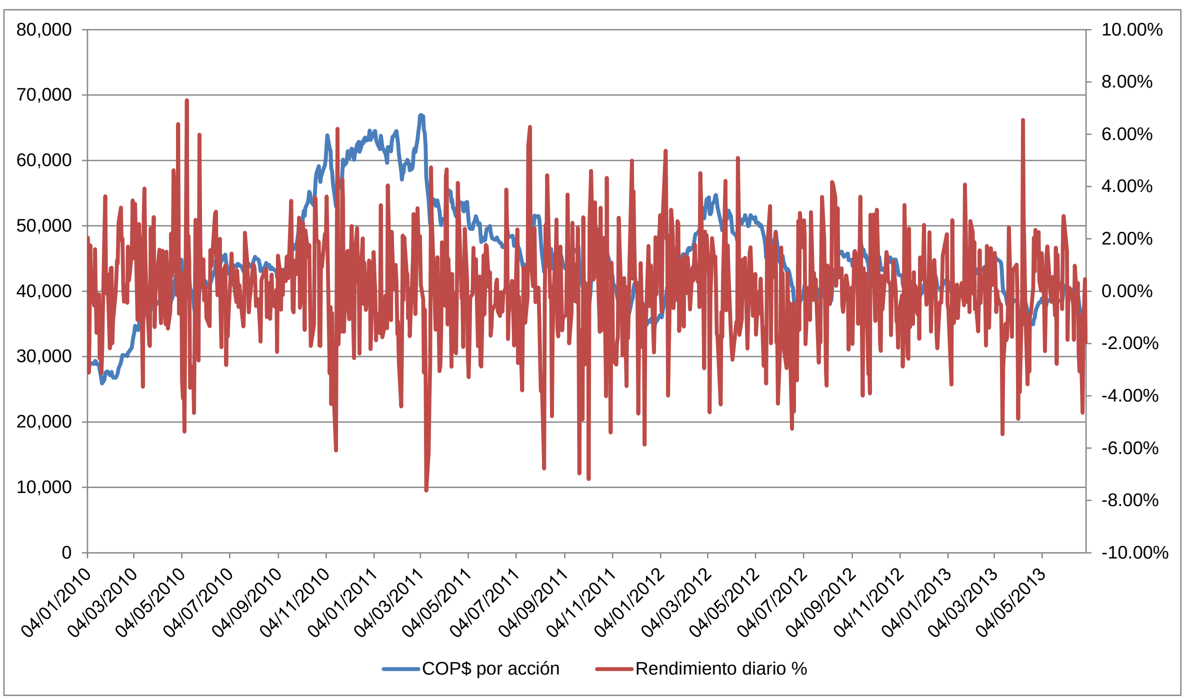
Fuente: Elaboración propia con información de la Bolsa de Valores de Colombia(BVC, 2013)

A.1.7 Cementos Argos



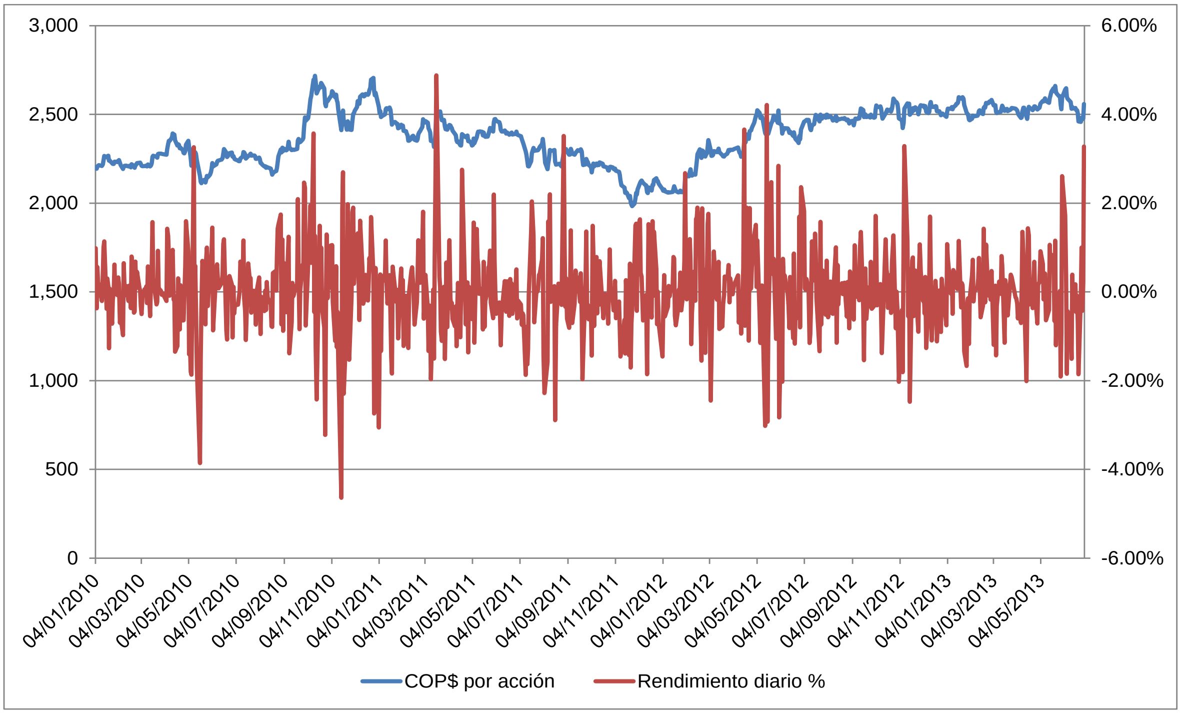
Fuente: Elaboración propia con información de la Bolsa de Valores de Colombia(BVC, 2013)

A.1.8 Pacific Rubiales



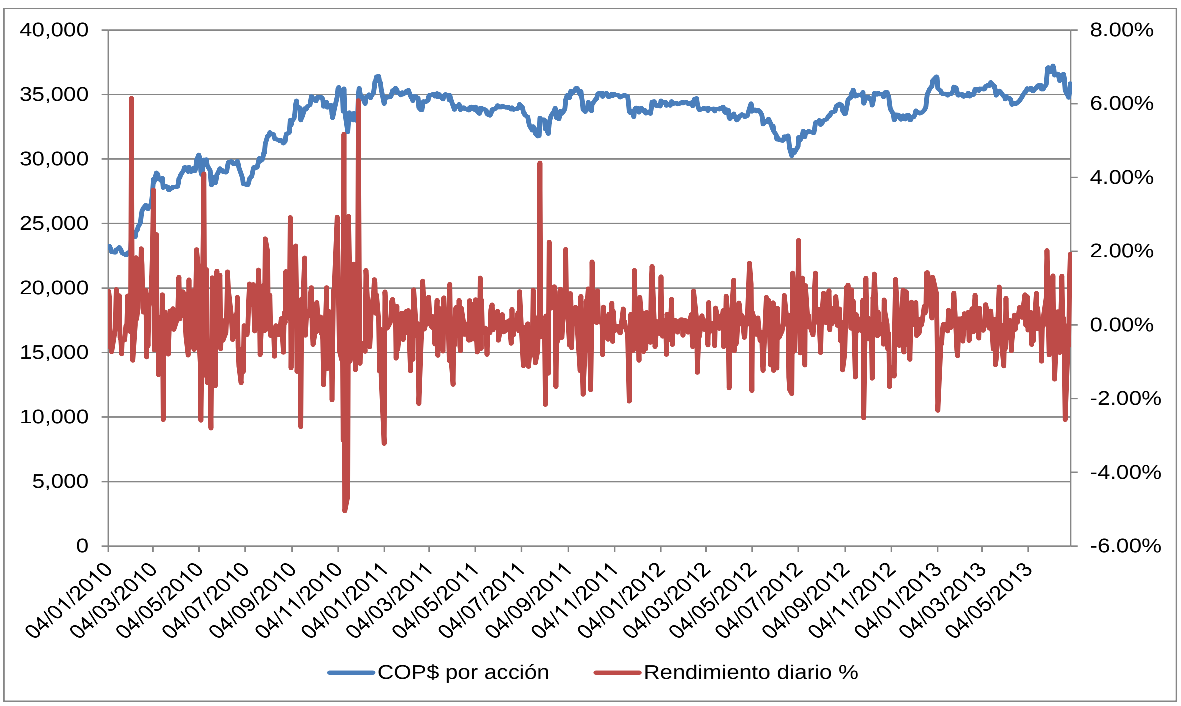
Fuente: Elaboración propia con información de la Bolsa de Valores de Colombia(BVC, 2013)

A.1.9 Isagen



Fuente: Elaboración propia con información de la Bolsa de Valores de Colombia(BVC, 2013)

A.1.10 Corficolombiana



Fuente: Elaboración propia con información de la Bolsa de Valores de Colombia(BVC, 2013)

Anexo 2 – Estadística Descriptiva Estrategias de Inversión

> OUTPUT_MATRIX

	Hist	CVaR	Sharpe max hist	Equal Weights	Sortino	Omega	Sup	POS
W_FINAL	6.248585e+02	5.155061e+02	6.277097e+02	1.261184e+03	1.434957e+03	1.324981e+03	1.242241e+03	201.426025142
AVG_RETURN	-5.282443e-04	-7.642417e-04	-5.200467e-04	3.283201e-04	5.737464e-04	4.647455e-04	3.582284e-04	-0.001957634
ST_DEV_RETURN	1.136735e-02	1.191631e-02	1.158002e-02	8.436547e-03	1.539456e-02	1.483757e-02	1.301178e-02	0.011022363
SKEWNESS_RETURN	5.828048e-02	2.043928e-02	1.370585e-02	-5.621350e-01	9.541770e-02	1.156805e-01	-1.072221e-01	-0.248588929
EXCESS_KURTOSIS_RETURN	3.155539e+00	2.621314e+00	2.923196e+00	5.302798e+00	2.960669e+00	3.175313e+00	5.482144e+00	3.594027312
AVG_RETURN_ANNUALIZED	-1.388013e-01	-1.898723e-01	-1.375544e-01	7.652818e-02	1.216061e-01	9.354310e-02	7.136325e-02	-0.399018026
ST_DEV_RETURN_ANNUALIZED	1.804510e-01	1.891656e-01	1.838271e-01	1.339260e-01	2.443811e-01	2.355392e-01	2.065555e-01	0.174974588
SHARPE_RATIO_ANNUALIZED	-1.014777e+00	-1.282416e+00	-9.849027e-01	2.444384e-01	3.870352e-01	2.849456e-01	1.949769e-01	-3.105157651
SORTINO_RATIO_ANNUALIZED	-1.425422e+00	-1.756078e+00	-1.375931e+00	3.550258e-01	5.747935e-01	4.238505e-01	2.827991e-01	-3.942405232
OMEGA_0	8.634542e-01	8.258558e-01	8.657967e-01	1.091243e+00	1.095345e+00	1.076714e+00	1.064087e+00	0.600659373
VaR_5pct	-1.872788e-02	-2.122425e-02	-1.938318e-02	-1.323815e-02	-2.457588e-02	-2.337944e-02	-1.842334e-02	-0.020571733
VaR_1pct	-3.395944e-02	-3.160882e-02	-3.409074e-02	-2.172811e-02	-4.453559e-02	-4.154902e-02	-4.152508e-02	-0.030578410
VaR_halfpct	-3.462877e-02	-3.828664e-02	-3.817429e-02	-2.746454e-02	-4.968447e-02	-4.964496e-02	-4.968447e-02	-0.031740525
ES_5pct	-2.713644e-02	-2.857181e-02	-2.770955e-02	-2.006427e-02	-3.581100e-02	-3.432401e-02	-3.211387e-02	-0.026852415
ES_1pct	-4.027738e-02	-4.133910e-02	-4.078328e-02	-3.256307e-02	-5.277707e-02	-5.197930e-02	-5.316127e-02	-0.038637698
ES_halfpct	-4.626840e-02	-4.734175e-02	-4.626789e-02	-4.004593e-02	-5.746502e-02	-5.649786e-02	-5.823341e-02	-0.045682195
POSRET_PERCENTAGE	4.602774e-01	4.602774e-01	4.615385e-01	5.346784e-01	5.132409e-01	5.081967e-01	5.208071e-01	0.422446406
MEANCONDRET_POS	8.155148e-03	8.463592e-03	8.383625e-03	5.989947e-03	1.111259e-02	1.065479e-02	8.609682e-03	0.007248054
MEANCONDRET_NEG	-7.933474e-03	-8.633773e-03	-8.151766e-03	-6.177181e-03	-1.053845e-02	-1.006497e-02	-8.632516e-03	-0.008691052
CONDRET_DIFFERENTIAL	2.216743e-04	-1.701807e-04	2.318597e-04	-1.872338e-04	5.741359e-04	5.898228e-04	-2.283394e-05	-0.001442997