

Andrés Mora

Black-Scholes

Proceso Estocástico

Proceso de Wiener

Propiedad de Markov

Proceso de Poisson

Martingalas

$$\Pr\{Y|X\} = \Pr\{Y \cap X\} / \Pr\{X\}$$



**Colegio de Estudios
Superiores de Administración**

**UNA INTRODUCCIÓN A LAS
MATEMÁTICAS FINANCIERAS
MODERNAS PARA NO MATEMÁTICOS**

Andrés Mora Valencia

**UNA INTRODUCCIÓN A LAS
MATEMÁTICAS FINANCIERAS
MODERNAS PARA NO MATEMÁTICOS**

513.93/ M827i

2013

Mora Valencia, Andrés. Una introducción a las Matemáticas Financieras modernas para no matemáticos/ Andrés Mora. Bogotá: Colegio de Estudios Superiores de Administración -CESA-. Dirección de Comunicaciones y Marketing, 2013. 82p.

Descriptores: 1. Matemáticas financieras. 2. Inversiones (matemáticas). 3. Tasas de interés.

© 2013 Colegio de Estudios Superiores de Administración –CESA–

© 2013 Andrés Mora Valencia

ISBN: 978-958-8722-40-5

Comunicaciones y Marketing

Carrera 5.^a No. 35-27 piso 3

Comunicaciones@cesa.edu.co

www.cesa.edu.co

www.editorialcesa.com

Bogotá, D.C., julio de 2013

Coordinación editorial:

Departamento de Comunicaciones y Marketing CESA

Diagramación, diseño y corrección de estilo:

José Ignacio Curcio Penen

Diseño de portada: Jesús Alberto Chaparro

Impresión:

Todos los derechos reservados. Esta obra no puede ser reproducida sin el permiso previo escrito

Impreso y hecho en Colombia

Printed and made in Colombia

CONTENIDO

Introducción	9
Capítulo 0. Procesos estocásticos	11
Introducción	11
Notas y comentarios	13
Capítulo 1. Esperanza condicional	15
Distribuciones marginales de probabilidad	18
Notas y comentarios	20
Propiedades de la esperanza condicional	21
Aplicación de la esperanza condicional	24
Notas y comentarios	26
Capítulo 2. Martingalas en tiempo discreto	29
Sucesión de variables aleatorias	29
Trayectoria (Sample path)	29
Martingala (Martingale)	29
Definición de martingala	30
Probabilidad neutral al riesgo	35
Un ejemplo simple de un mercado financiero	36
Valorando sin arbitraje	37
Teorema fundamental de valoración de activos (Fundamental Theorem of Asset Pricing –FTAP)	41
Activo contingente	41

Derivado	41
Mercado completo	41
Regla de valoración neutral al riesgo	42
Tiempos de parada (Stopping time)	42
Tiempo de parada:	43
Una aplicación a riesgo de crédito	48
Capítulo 3. Movimiento Browniano	51
De caminata aleatoria a mb	51
Movimiento browniano	53
Propiedades del mb	55
Variación cuadrática o segunda variación	59
Capítulo 4. Introducción al Cálculo Estocástico	63
Integral de Itô	63
Propiedades de la integral de Itô	65
Lema de Itô	67
Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes	68
Notas y comentarios	74
Bibliografía	77

INTRODUCCIÓN

Este texto va dirigido en especial a aquellos estudiantes que no estén cursando o no hayan cursado las matemáticas como asignatura en el pregrado y quieran obtener los conocimientos básicos de las matemáticas financieras modernas; también va dirigido a los profesionales de la industria financiera que deseen adquirir un conocimiento teórico como soporte para su desarrollo en la práctica; de igual manera, para enfrentar el texto que el lector tiene en sus manos debe estar familiarizado con los conceptos básicos de un curso de probabilidad y estadística.

Tanto el estudiante como el profesional, al momento de cursar una primera asignatura de valoración de derivados, se enfrentan con la conocida fórmula de Black-Scholes. A esta fórmula se puede acceder por varios caminos, y uno de los más utilizados es mediante el cálculo estocástico. En la revisión de la literatura se encuentran excelentes documentos que tratan el tema con un muy buen rigor matemático. Lo que este libro pretende es dar a conocer los resultados principales de las matemáticas financieras modernas, sin entrar en las demostraciones, pero brindando la intuición necesaria para comprenderlos.

Después de participar en varios cursos de procesos estocásticos y valoración de derivados, e impartir la asignatura de finanzas matemáticas en varias universidades en Colombia, he recopilado lo que podría ser la base, para que el lector comprenda de mejor manera los temas abordados en un curso más avanzado de matemáticas financieras modernas. Este manual también sirve de apoyo para entender las herramientas empleadas en los artículos publicados en las revistas

académicas y para que los *practitioners* puedan aproximarse de más fácilmente a los modelos de valoración de derivados.

El documento presenta en el capítulo 0 la introducción a los procesos estocásticos; en el capítulo 1 la introducción al concepto de esperanza condicional, que sirve de base para enfocar el tema del capítulo 2: Martingalas en tiempo discreto; el capítulo 3 introduce un proceso estocástico ampliamente utilizado en las finanzas modernas: el movimiento browniano, y finalmente, el capítulo 4 presenta una introducción al cálculo estocástico, también denominado cálculo de Itô.

Colegio de Estudios Superiores de Administración –CESA–
Este libro se terminó de imprimir el 30 de julio de 2013 en Bogotá D.C.

Se compuso en caracteres Adobe Calson Pro de 12 pts.
y se imprimió en papel Bond de 70 gramos

Este libro pretende explicar de manera sencilla las matemáticas financieras modernas a estudiantes sin formación matemática que quieran realizar un postgrado en finanzas cuantitativas. También va dirigido a profesionales que trabajan a diario en un ambiente financiero como analistas cuantitativos y requieren un conocimiento más a fondo de los supuestos de los modelos financieros como el de Black-Scholes

