

Una introducción a las Matemáticas Financieras Modernas para no matemáticos

Andrés Mora



$$\Pr\{Y|X\} = \Pr\{Y \cap X\} / \Pr\{X\}$$



**Colegio de Estudios
Superiores de Administración**

**UNA INTRODUCCIÓN A LAS
MATEMÁTICAS FINANCIERAS
MODERNAS PARA NO MATEMÁTICOS**

Andrés Mora Valencia

**UNA INTRODUCCIÓN A LAS
MATEMÁTICAS FINANCIERAS
MODERNAS PARA NO MATEMÁTICOS**

513.93/ M827i

2013

Mora Valencia, Andrés. Una introducción a las Matemáticas Financieras modernas para no matemáticos/ Andrés Mora. Bogotá: Colegio de Estudios Superiores de Administración -CESA-. Dirección de Comunicaciones y Marketing, 2013. 82p.

Descriptores: 1. Matemáticas financieras. 2. Inversiones (matemáticas). 3. Tasas de interés.

© 2013 Colegio de Estudios Superiores de Administración –CESA–

© 2013 Andrés Mora Valencia

ISBN: 978-958-8722-40-5

Comunicaciones y Marketing

Carrera 5.^a No. 35-27 piso 3

Comunicaciones@cesa.edu.co

www.cesa.edu.co

www.editorialcesa.com

Bogotá, D.C., julio de 2013

Coordinación editorial:

Departamento de Comunicaciones y Marketing CESA

Diagramación, diseño y corrección de estilo:

José Ignacio Curcio Penen

Diseño de portada: Jesús Alberto Chaparro

Impresión:

Todos los derechos reservados. Esta obra no puede ser reproducida sin el permiso previo escrito

Impreso y hecho en Colombia

Printed and made in Colombia

CONTENIDO

Introducción	9
Capítulo 0. Procesos estocásticos	11
Introducción	11
Notas y comentarios	13
Capítulo 1. Esperanza condicional	15
Distribuciones marginales de probabilidad	18
Notas y comentarios	20
Propiedades de la esperanza condicional	21
Aplicación de la esperanza condicional	24
Notas y comentarios	26
Capítulo 2. Martingalas en tiempo discreto	29
Sucesión de variables aleatorias	29
Trayectoria (Sample path)	29
Martingala (Martingale)	29
Definición de martingala	30
Probabilidad neutral al riesgo	35
Un ejemplo simple de un mercado financiero	36
Valorando sin arbitraje	37
Teorema fundamental de valoración de activos (Fundamental Theorem of Asset Pricing –FTAP)	41
Activo contingente	41

Derivado	41
Mercado completo	41
Regla de valoración neutral al riesgo	42
Tiempos de parada (Stopping time)	42
Tiempo de parada:	43
Una aplicación a riesgo de crédito	48
Capítulo 3. Movimiento Browniano	51
De caminata aleatoria a mb	51
Movimiento browniano	53
Propiedades del mb	55
Variación cuadrática o segunda variación	59
Capítulo 4. Introducción al Cálculo Estocástico	63
Integral de Itô	63
Propiedades de la integral de Itô	65
Lema de Itô	67
Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes	68
Notas y comentarios	74
Bibliografía	77

INTRODUCCIÓN

Este texto va dirigido en especial a aquellos estudiantes que no estén cursando o no hayan cursado las matemáticas como asignatura en el pregrado y quieran obtener los conocimientos básicos de las matemáticas financieras modernas; también va dirigido a los profesionales de la industria financiera que deseen adquirir un conocimiento teórico como soporte para su desarrollo en la práctica; de igual manera, para enfrentar el texto que el lector tiene en sus manos debe estar familiarizado con los conceptos básicos de un curso de probabilidad y estadística.

Tanto el estudiante como el profesional, al momento de cursar una primera asignatura de valoración de derivados, se enfrentan con la conocida fórmula de Black-Scholes. A esta fórmula se puede acceder por varios caminos, y uno de los más utilizados es mediante el cálculo estocástico. En la revisión de la literatura se encuentran excelentes documentos que tratan el tema con un muy buen rigor matemático. Lo que este libro pretende es dar a conocer los resultados principales de las matemáticas financieras modernas, sin entrar en las demostraciones, pero brindando la intuición necesaria para comprenderlos.

Después de participar en varios cursos de procesos estocásticos y valoración de derivados, e impartir la asignatura de finanzas matemáticas en varias universidades en Colombia, he recopilado lo que podría ser la base, para que el lector comprenda de mejor manera los temas abordados en un curso más avanzado de matemáticas financieras modernas. Este manual también sirve de apoyo para entender las herramientas empleadas en los artículos publicados en las revistas

académicas y para que los *practitioners* puedan aproximarse de más fácilmente a los modelos de valoración de derivados.

El documento presenta en el capítulo 0 la introducción a los procesos estocásticos; en el capítulo 1 la introducción al concepto de esperanza condicional, que sirve de base para enfocar el tema del capítulo 2: Martingalas en tiempo discreto; el capítulo 3 introduce un proceso estocástico ampliamente utilizado en las finanzas modernas: el movimiento browniano, y finalmente, el capítulo 4 presenta una introducción al cálculo estocástico, también denominado cálculo de Itô.

CAPÍTULO 0

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Introducción

Un Proceso Estocástico (PE) es un proceso aleatorio que evoluciona con el tiempo. En otras palabras, es una colección de variables aleatorias X_t indexadas por el tiempo.

Tiempo, t  $\begin{matrix} \nearrow \text{Tiempo discreto } \{0, 1, 2, \dots\}: \text{ los enteros no negativos} \\ \searrow \text{Tiempo continuo } [0, \infty): \text{ los reales no negativos} \end{matrix}$

Variable, X_t  $\begin{matrix} \nearrow \text{Espacio discreto} & (\text{conjunto finito}) \\ \searrow \text{Espacio continuo} & (\text{números reales}) \end{matrix}$

La manera de representar un PE es:

$$\text{PE: } \{X_t, t \in T\}$$

Donde T comprende el espacio de parámetros y X_t el espacio de estado.

Ejemplos:

– Proceso de Markov: es un PE donde el cambio en t no depende de valores en momentos anteriores a t . Un proceso de Markov con t discreto se denomina Cadena de Markov.

– Martingalas, Proceso de Poisson y Proceso de Wiener (o Movimiento Browniano).

Propiedad de Markov

En finanzas es común observar que los precios de acciones generalmente siguen un proceso de Markov, esto es, el precio futuro de una acción no se verá afectado por el precio del día anterior, de una semana atrás, etc. Lo único relevante es el actual. A esta característica se le denomina la *propiedad de Markov*, y ella implica que la distribución de probabilidad del precio en el futuro no depende de la trayectoria del precio en el pasado. La propiedad de Markov es consistente con la forma débil de eficiencia de mercados (para más detalles ver Notas y comentarios al final de este capítulo).

Formalmente, la propiedad de Markov se representa como:

$$\Pr \{a < X_t \leq b \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n\} = \Pr\{a < X_t \leq b \mid X_{t_n} = x_n\}$$

A continuación introduciremos otro concepto importante para finanzas.

Martingalas

Son modelos apropiados para juegos justos, esto es, si un jugador tiene una cantidad de dinero A_n en el momento t_n , la cantidad promedio en t_{n+1} será A_n sin importar cuál haya sido su riqueza en el pasado. Esto se denomina la propiedad de Martingala.

Una martingala X_n es discreta si $n = 1, 2, \dots$

Una martingala X_t es continua si $0 \leq t < \infty$.

En el capítulo 2 describiremos la martingala en tiempo discreto.

Notas y comentarios

Se dice que un mercado de capitales es eficiente si los precios de las acciones reflejan completamente la información disponible acerca de tales acciones. Tal mercado se clasifica en tres tipos: 1. Forma débil: cuando los precios reflejan eficientemente los precios pasados, en otras palabras, la historia de los cambios en el precio no contiene información acerca de los cambios en el futuro y por tal razón no se podrían hacer retornos anormales a partir de modelos en los precios de las acciones; 2. Forma semifuerte: cuando los precios reflejan toda la información pública y, por ende, no se pueden obtener retornos anormales a partir de dicha información, y 3. Forma fuerte: cuando los precios reflejan toda la información disponible. Los economistas se refieren por lo general a la forma débil como un mercado “sin memoria”, o que sigue la propiedad de Markov. Esta clasificación de mercados se debe principalmente a Eugene Fama, quien la expuso en su artículo “The Behavior of Stock Market Prices” de 1965. Textos de finanzas corporativas como el de Brealey y Myers (2008) y Ross et al. (2008) explican estos tipos de eficiencia y brindan buenos ejemplos al respecto.

En este documento trataremos algunos procesos estocásticos aplicados a finanzas; sin embargo, el lector interesado en otros procesos puede consultar los textos de Klebaner (1998), Protter (2003), Brzezniak y Zastawniak (1999), Lawler (2006), Resnick (1992), y Baxter y Rennie (1996), entre otros.

CAPÍTULO 1

ESPERANZA CONDICIONAL

El concepto de esperanza condicional es crucial en el estudio de PE, en especial para martingalas.

Suponga que Y es una variable aleatoria que mide el resultado de un experimento. El mejor pronóstico de Y es $E[Y]$, la esperanza.

Si uno tiene conocimiento completo del resultado del experimento, entonces se puede conocer el valor exacto de Y .

La idea de la esperanza condicional es hacer el mejor pronóstico de Y dada alguna (pero no completa) información del resultado.

Inicialmente restringimos nuestra atención a la esperanza condicional de Y con respecto a un conjunto finito de variables aleatorias $X_1, \dots, X_n$.

Comencemos con el concepto de probabilidad condicional mediante un ejemplo.

Ejemplo (*adaptado de Canavos, 1988*)

Suponga que se tienen dos variables aleatorias X, Y que representan el número de incumplimientos en los pagos de bonos corporativos del sector automotriz y financiero respectivamente.

Sea $f(x,y) = \Pr \{X=x, Y=y\}$

La siguiente tabla muestra las probabilidades de los eventos posibles:

	Y = 1	Y = 2	Y = 3	Y = 4	$f_X(x)$
X = 1	0.01	0.07	0.09	0.03	0.20
X = 2	0.20	0	0.05	0.25	0.50
X = 3	0.09	0.03	0.06	0.12	0.30
$f_Y(y)$	0.30	0.10	0.20	0.40	1

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } f_X(x) &= 0.2 \text{ si } X = 1 \\ &0.5 \text{ si } X = 2 \\ &0.3 \text{ si } X = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= 0.3 \text{ si } Y = 1 \\ &0.1 \text{ si } Y = 2 \\ &0.2 \text{ si } Y = 3 \\ &0.4 \text{ si } Y = 4 \end{aligned}$$

Una pregunta podría ser: ¿cuál es la probabilidad de que el sector financiero presente un incumplimiento dado que el sector automotriz presenta dos? Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que $Y = 1$ dado que $X = 2$, $f(Y=1 \mid X=2)$?

De la tabla de probabilidades podemos observar:

	Y = 1	Y = 2	Y = 3	Y = 4	$f_X(x)$
X = 2	0.20	0	0.05	0.25	0.50

La respuesta es $f(Y = 1 \mid X = 2) = 0.20 / 0.50 = 0.4$

De esta manera podemos calcular la probabilidad de incumplimientos del sector financiero dado que el sector automotriz presenta dos incumplimientos.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } f(Y \mid X=2) \text{ es igual a: } &0.4 \text{ si } Y = 1, (0.20 / 0.50) \\ &0 \text{ si } Y = 2, (0 / 0.50) \\ &0.1 \text{ si } Y = 3, (0.05 / 0.50) \\ &0.5 \text{ si } Y = 4, (0.25 / 0.50) \end{aligned}$$

Esperanza condicional

Donde la probabilidad condicional se calcula como:

$$\Pr\{Y|X\} = \Pr\{Y \cap X\} / \Pr\{X\}$$

Entonces para ciertos valores de x, y :

$$\Pr\{Y = y | X = x\} = \Pr\{Y = y \cap X = x\} / \Pr\{X = x\} = f(x, y) / f_X(x)$$

$f(x, y)$ es conocida como la función de probabilidad conjunta y $f_X(x)$ es la función de probabilidad marginal de X .

Ahora, ¿cómo calcular la esperanza condicional?

Recordando la definición de esperanza incondicional (discreta):

$$E[Y] = \sum_y y f(y)$$

Entonces la esperanza condicional (discreta) está dada por:

$$E[Y | X = x] = \sum_y y f(y | x)$$

Donde $f(y|x)$ es la función de probabilidad condicional. En el ejemplo anterior, ¿cuál es el valor esperado de los incumplimientos en el sector financiero dado que el sector automotriz presentó dos incumplimientos?

$E[Y|X = 2]$ es igual a:

$$\begin{aligned} E[Y | X = 2] &= \sum_y y f(y | x = 2) = 1(0.4) + 2(0) + 3(0.1) + 4(0.5) \\ &= 2.7 \end{aligned}$$

Se esperan alrededor de tres incumplimientos en el sector financiero dado que se presentaron dos incumplimientos en el sector automotriz. La esperanza incondicional es 2.1 ($= 0.2 \times 1 + 0.5 \times 2 + 0.3 \times 3$), es decir, que sin

ninguna información adicional, se espera que el sector financiero presente alrededor de dos incumplimientos.

La probabilidad condicional refleja la información de un evento relacionado. Si los eventos fueran independientes el resultado de la esperanza condicional sería igual a la esperanza incondicional, es decir, $E[Y|X] = E[Y]$.

La esperanza condicional en el caso continuo está dada por:

$$E[Y | X = x] = \int_{\mathbb{R}} y f(y|x) dy$$

Veamos entonces qué necesitamos para calcular esta esperanza condicional.

Distribuciones marginales de probabilidad

Si X y Y son variables aleatorias continuas, integrar la función de probabilidad bivariada (conjunta) sobre el intervalo completo de Y genera la función de densidad de probabilidad univariada de X .

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$
$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Donde $f(x, y)$ es la función de probabilidad conjunta.

Ejemplo (*adaptado de Canavos, 1988*)

Sean X y Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dada. Asuma que X y Y son precios de acción y de cierta forma encontramos su función de densidad conjunta.

Esperanza condicional

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) / 8,000 & 0 < x,y < 20 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Obtenga la media (esperanza) condicional de X para Y = 10, es decir, el precio esperado de la acción X dado que el precio de la acción Y es \$10.

Hallemos primero la distribución marginal de Y

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \int_0^{20} \frac{x+y}{8,000} dx = \frac{1}{8,000} \int_0^{20} (x+y) dx = \frac{1}{8,000} \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^{20} \\ &= \frac{1}{8,000} \left(\frac{400}{2} + 20y \right) = \frac{10+y}{400} \end{aligned}$$

Entonces hallemos ahora la función de probabilidad condicional de X dado Y:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{\frac{x+y}{8,000}}{\frac{10+y}{400}} = \frac{(x+y)400}{(10+y)8,000} = \frac{x+y}{20(10+y)}$$

Cuando Y = 10, entonces:

$$f(x|y=10) = \frac{x+10}{20(10+10)} = \frac{x+10}{400}$$

La esperanza condicional de X dado que Y es igual a 10 se calcula como:

$$E[X | Y = 10] = \int_0^{20} x f(x|y=10) dx = \int_0^{20} x \left(\frac{x+10}{400} \right) dx = \frac{1}{400} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{10x^2}{2} \right]_0^{20} = 11.67$$

Entonces, el mejor pronóstico para la acción de X, dado que el precio de la acción Y es \$10, es igual a \$11.67.

Notas y comentarios

En finanzas es natural encontrar una estructura de dependencia entre activos financieros; al respecto, una herramienta útil que está tomando fuerza es el estudio de las cópulas, para cuya introducción resultan interesantes e ilustrativos los textos de Joe (1997) y Nelsen (2006); además, un texto importante sobre cópulas aplicadas a las finanzas es el de Cherubini et al. (2004). En Colombia, Becerra y Melo (2008) realizan una medición de riesgo financiero mediante el uso de cópulas aplicadas a un portafolio compuesto por tres activos del mercado colombiano.

Al complicarse un poco más las cosas podríamos tener la función de probabilidad conjunta de $X_1, X_2, \dots, X_n$ y Y .

- Esperanza condicional en el caso discreto:

$$E[Y | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] = \sum_y y f(y | x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

- Esperanza condicional en el caso continuo:

$$E[Y | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] = \int_{\Re} y f(y | x_1, x_2, \dots, x_n)$$

De nuevo $E[Y | X_1, X_2, \dots, X_n]$ es el mejor pronóstico de Y dados los valores de las variables $X_1, X_2, \dots, X_n$.

- Haciendo la notación más compacta:

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ es una sucesión de variables aleatorias, usaremos F_n para denotar la “información contenida en $X_1, X_2, \dots, X_n$ ”.

Entonces escribiremos $E[Y | F_n]$ en lugar de $E[Y | X_1, X_2, \dots, X_n]$.

- Más formalmente F_n es un σ -álgebra. Un σ -álgebra es una colección de subconjuntos de un espacio muestral que cumple

ciertas características, y aunque en este documento no se describirá su definición formal, sin embargo, para nuestro propósito, F_n representa el conocimiento en el tiempo n . A medida que n se incrementa, nuestro conocimiento del pasado también se incrementa.

$$F_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Para más detalles consultar, por ejemplo, los textos de Williams (1991) y Breiman (1968).

Las siguientes propiedades de la esperanza condicional son tomadas principalmente del texto de Brzezniak y Zastawniak (1999):

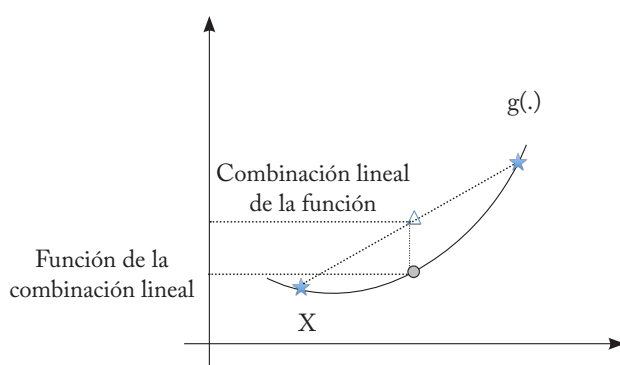
Propiedades de la esperanza condicional

1. $E[aX + bY | F_n] = aE[X | F_n] + bE[Y | F_n]$ con $a, b \in \mathbb{R}$
2. $E[E[X | F_n]] = E[X]$
3. $E[XY | F_n] = XE[Y | F_n]$ si X es F_n -medible
4. $E[X | F_n] = E[X]$ si X es independiente de F_n
5. $E[E[X | F_n] | G_n] = E[X | F_n]$ si $F_n \subset G_n$
6. Si $X \geq 0$ entonces $E[X | F_n] \geq 0$
7. Desigualdad de Jensen: sea g una función convexa, entonces $g(E[X | F_n]) \leq E[g(X) | F_n]$
8. $E[X | F_n] = X$ si X es F_n -medible (es decir si F_n contiene toda la información de X)

La propiedad 1 es conocida como la propiedad de linealidad, mientras que la 2 es la de doble esperanza; a la propiedad 3, por su parte, se la identifica como “sacando lo conocido” (*taking-out-what-is-known*), y en ella, si F_n contiene toda la información de X , entonces F_n , X es conocido y se trata como una constante; la propiedad 5 es

conocida como la propiedad torre (*tower property*), y la propiedad 7 es una aplicación de la definición de convexidad que se puede apreciar más claramente en el siguiente gráfico:

FIGURA 1
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE CONVEXIDAD



g es una función convexa

Entonces:

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)$$

Donde $\alpha \in (0, 1)$

Ejemplo (tomado de Lawler, 2006)

Suponga que $X_1, X_2, \dots, X_n$ (representa la ganancia en cada periodo $i, i = 1, 2, \dots, n$) son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) cada una con media μ .

Sea S_n la suma de todas las variables aleatorias: $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, es decir la ganancia total.

Sea F_n la información en $X_1, X_2, \dots, X_n$. Suponga que $m < n$ y solo se tiene información hasta m . ¿Cuál es la ganancia total esperada en un momento

Esperanza condicional

n dado que se tiene información (de cuánto he ganado) hasta m ?, en otras palabras, ¿qué es $E[S_n | F_m]$?

– Comencemos aplicando la propiedad 1, “linealidad”:

$$E[S_n | F_m] = E[X_1 + \dots + X_m + X_{m+1} + \dots + X_n | F_m] = E[S_m | F_m] + E[X_{m+1} + \dots + X_n | F_m]$$

– Aplicamos la propiedad 8 al lado izquierdo de la última ecuación:

$$E[S_m | F_m] = S_m$$

El valor esperado de una constante es la constante, puesto que S_m es conocido en F_m .

Entonces:

$$E[S_n | F_m] = S_m + E[X_{m+1} + \dots + X_n | F_m]$$

– Aplicamos la propiedad 4 al valor esperado del lado derecho de la igualdad, puesto que $X_{m+1}, \dots, X_n$ son independientes de $X_1, \dots, X_m$ (F_m).

$$E[X_{m+1} + \dots + X_n | F_m] = E[X_{m+1} + \dots + X_n]$$

$$\text{Pero } E[X_{m+1} + \dots + X_n] = (n - m)\mu.$$

$$\text{Entonces } E[S_n | F_m] = S_m + (n - m)\mu.$$

La ganancia total esperada en un momento n será igual a la ganancia total conocida en el momento m , más la ganancia esperada en cada periodo, multiplicado por el número de periodos restantes.

Ejercicio 1

Suponga, como en el ejemplo anterior, $X_1, X_2, \dots, X_n$ y S_n .

Pero ahora asuma que la media de cada variable aleatoria X_i es $\mu = 0$ y $\text{var}(X_i) = E[X_i^2] = \sigma^2$.

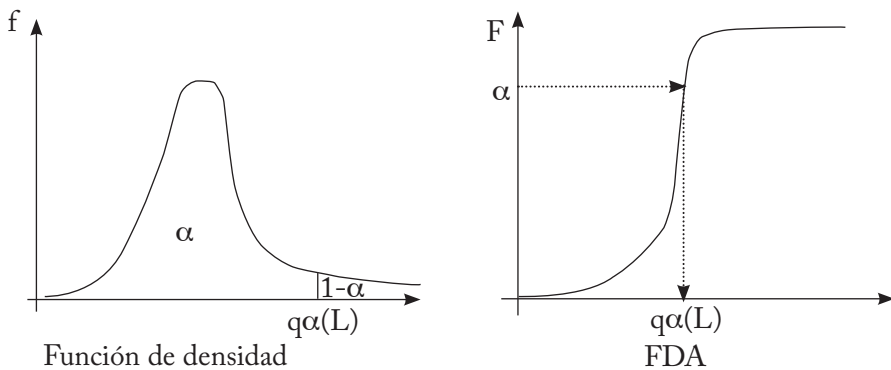
Sea $m < n$. Halle $E[S_n^2 | F_m]$.

Aplicación de la esperanza condicional al riesgo

El VaR es comúnmente usado como medida de riesgo. Se define como la máxima pérdida esperada dado un nivel de confiabilidad y en un tiempo determinado. Estadísticamente es el cuantil (q) de una función de distribución de pérdidas:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = q_\alpha(L) = \inf \{L : F(L) \geq \alpha\}$$

FIGURA 2
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL VaR COMO EL CUANTIL
DE UNA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN



Donde L representa las pérdidas y α es un valor de probabilidad. FDA es la función de distribución acumulada y se representa generalmente por F . Se ha comprobado que el VaR es una medida no coherente al riesgo (ver Artzner et al., 1999), en especial para funciones de distribución no elípticas. El VaR no es coherente al riesgo principalmente porque viola el axioma de subaditividad que, en otras palabras, dice que el riesgo de una cartera de dos activos debe ser menor o igual a la suma de los riesgos individuales de cada activo. Hay otras razones, discutidas en Nešlehová et al. (2006), como, por ejemplo, funciones de distribución con colas muy pesadas.

Esperanza condicional

Se propone entonces una medida que sí es coherente al riesgo, comúnmente conocida como el Expected Shortfall (ES) o el Tail Condicional Expectation (TCE) y se define como:

$$E[L|L \geq \text{VaR}_\alpha(L)]$$

En otras palabras, es el valor esperado de las pérdidas dado que estas pérdidas superaron el VaR.

Con lo que conocemos hallemos formalmente qué es ES

– Recordemos que $E[Y|X]$ para una función de distribución *continua* es:

$$E[Y | X = x] = \int_{\mathfrak{R}} y f(y|x) dy$$

Y que $f(y|x) = f(x, y) / f_Y(y)$, donde $f(x, y)$ es la función de probabilidad conjunta.

Aplicando este resultado a $E[L|L \geq \text{VaR}_\alpha(L)]$ se tiene que:

$$E[L | L \geq q_\alpha(L)] = \int_{q_\alpha(L)}^{\infty} L f(L | L \geq q_\alpha(L)) dL$$

Aplicando la definición de probabilidad condicional:

$$E[L | L \geq q_\alpha(L)] = \int_{q_\alpha(L)}^{\infty} L \frac{f(L, L \geq q_\alpha(L)) dL}{f(L \geq q_\alpha(L))}$$

Pero, ¿qué es $f(L \geq q_\alpha(L))$? Esto es igual a $1 - \alpha$. Entonces

$$Es_\alpha(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{q_\alpha(L)}^{\infty} L f(L, L \geq q_\alpha(L)) dL$$

Para una función de distribución continua de pérdidas.

Ejercicio 2

Suponga que $f(\cdot)$ es la distribución normal estándar. Halle ES para una normal estándar cuya función de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Con las funciones de Excel para cuantiles de una normal estándar, calcule VaR y ES al 95% (α) de probabilidad. Luego construya una tabla de datos comenzado con $\alpha = 95\%$ y con incrementos de 0.25%, halle VaR y ES para estos valores de α .

¿Qué puede concluir de la relación ES_α / VaR_α ?

Notas y comentarios

VaR fue desarrollado por J. P. Morgan en 1994 y rápidamente se convirtió en estándar de medida de riesgo para los reguladores y administradores de riesgo. Textos como el de Jorion (2006) y el reciente de Alexander (2009) muestran aplicaciones del VaR a riesgos financieros. Pero el VaR es en general una medida de riesgo *no* coherente (no es subaditivo), y esto se debe a tres razones en general:

- – **Skewness:** los activos que conforman el portafolio presentan una función de distribución con alto *coeficiente de asimetría* (ver Albanese 1997 y Artzner et al., 1999).
- – **Dependence:** aun si las funciones de distribución individuales son simétricas, su estructura de *dependencia* (o cópula) tiene una forma altamente asimétrica (ver Embrechts y Puccetti, 2006).
- – **Heavy-tailness:** las variables aleatorias subyacentes son independientes pero presentan *colas pesadas* (ver Embrechts, McNeil y Straumann, 2002).

ES fue popularizado por Artzner et al. (1999); se trata de una medida coherente al riesgo y dice cuanto se espera perder si una merma extrema ocurre. Varias críticas se han realizado al uso del VaR, y quizás una de las más acertadas es la propuesta por Danielsson et al. (2001), en la cual se concluye que el VaR puede desestabilizar una economía y ocasionar crashes. En ese documento se critica también la escogencia de inadecuadas y pobres medidas de riesgo por parte del Comité de Basilea cuando existen medidas mejores.

CAPÍTULO 2

MARTINGALAS EN TIEMPO DISCRETO

Veamos algunos conceptos básicos:

Sucesión de variables aleatorias

Una sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ se usa generalmente a modo de modelo matemático de resultados en una serie de fenómenos aleatorios, como, por ejemplo, el valor del Colcap en la bolsa de valores en días de negocio consecutivos.

Las variables aleatorias en tal sucesión se indexan por números enteros que se refieren a tiempo discreto.

Estos índices no necesariamente se relacionan con el tiempo físico en que realmente ocurren, puesto que sirven para ordenar los eventos no precisamente en forma espaciada en el tiempo físico.

Trayectoria (*Sample path*)

La sucesión de números $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ para un $\omega \in \Omega$ se llama trayectoria. Ω es el espacio muestral y ω es un evento del espacio muestral.

Martingala (*Martingale*)

El nombre proviene del francés y fue utilizado para significar estrategias de juego o apuestas populares en el siglo XVIII. La estrategia más

simple fue aplicada en el lanzamiento de una moneda y consistía en que el jugador doblaba su apuesta después de cada pérdida hasta realizar su primera ganancia, de manera que recuperaba todas las pérdidas y la ganancia terminaba siendo igual a la apuesta inicial, comenzando de nuevo el juego en ese punto.

La teoría de las martingalas en probabilidad surgió con el propósito de explicar la aparente imposibilidad de obtener ganancias apostando en “juegos justos”; su nacimiento se debe a los matemáticos Paul Lévy y Joseph L. Doob; actualmente se utiliza, en especial en el campo de las finanzas, para valorar derivados (opciones).

Definición de martingala

Sea $X = \{X_n\}$ un PE, del cual se predica ser una martingala con respecto a $\{F_n\}$ si:

$$(i) E[|X_n|] < \infty \text{ para todo } n.$$

$$(ii) E[X_{n+1} | F_n] = X_n \text{ para } n \geq 1$$

(i) dice que el valor esperado de $|X|$ en el momento n existe, y (ii) dice que el mejor pronóstico de X en el tiempo $n+1$, dado que se conoce alguna información en el tiempo n , es igual al valor de X en n .

Algunos autores como Brzezniak y Zastawniak (1999) agregan la siguiente propiedad:

$$(iii) X \text{ es adaptado a } F_n. \text{ Es decir, } X \text{ es } F_n\text{-medible.}$$

La interpretación de martingala es que la cantidad promedio que el jugador tendrá en t_{n+1} , dado que él tiene una cantidad en el momento t_n , es igual a X_n (su riqueza en t_n), sin importar cuál ha sido su fortuna en el pasado.

– X es supermartingala si:

Martingalas en tiempo discreto

$$E[X_{n+1} | F_n] \leq X_n$$

– X es submartingala si:

$$E[X_{n+1} | F_n] \geq X_n$$

Submartingala es un modelo de juego favorable, mientras que supermartingala es desfavorable.

Ejemplo (tomado de Lawler, 2006)

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes cada una con media μ . Nuevamente asuma que cada X_i representa la ganancia de un jugador (o inversor) en cada periodo i . Sea $S_0 = 0$ y para $n > 0$, S_n es la suma parcial dada por $S_n = X_1 + \dots + X_n$, es decir la ganancia total hasta el momento n . Demuestre que $M_n = S_n - n\mu$ es una martingala con respecto a F_n (información contenida en $X_1, \dots, X_n$).

En un ejemplo anterior obtuvimos: $E[S_n | F_m] = S_m + (n - m)\mu$ para $m < n$.

Entonces:

$$E[M_{n+1} | F_n] = E[S_{n+1} - (n + 1)\mu | F_n] \quad (\text{aplicando la propiedad 4 de esperanza})$$

$$E[S_{n+1} | F_n] - (n + 1)\mu$$

$$S_n + \mu - n\mu - \mu$$

$$S_n - n\mu$$

$$M_n$$

Veamos otro ejemplo:

Ejemplo

¿Es una martingala la estrategia inicial del juego del cual proviene el nombre de martingala?

El juego consiste en ganar \$1 si se lanza una moneda y cae cara, y perder \$1 si cae sello, doblando la apuesta hasta ganar.

W_n representa las ganancias (pérdidas) después de n lanzamientos:

$$W_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$E[W_{n+1} | F_n] = E[W_n + X_{n+1} | F_n]$$

Donde X_{n+1} es la ganancia en el lanzamiento $n+1$

$$E[W_{n+1} | F_n] = E[W_n | F_n] + E[X_{n+1} | F_n]$$

En el momento n se puede ganar 2^n con probabilidad $\frac{1}{2}$ o se pierde 2^n con igual probabilidad. Entonces en el lanzamiento $n+1$, $E[X_{n+1} | F_n] = 0$.

$$E[W_{n+1} | F_n] = W_n + 0$$

$$E[W_{n+1} | F_n] = W_n$$

El siguiente ejemplo requiere definir el término “camino aleatorio” (*random walk*). El camino aleatorio (o paseo aleatorio), aplicado a acciones, implica que los cambios en el corto plazo en los precios no pueden ser predichos. Sin embargo, la gente de Wall Street está en contra de esta teoría y ha lanzado técnicas como el análisis fundamental y técnico para predecir tales retornos.

Quizá el primero que trató de mostrar que los cambios de los precios siguen alguna tendencia cierta en lugar de realizar una caminata aleatoria fue Sidney Alexander, en su trabajo “Price movements in speculative markets trends or random walk” de 1961. Y la primera aplicación seria a favor de la caminata aleatoria a mercados financieros es la de Samuelson, en 1965, con “Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly” donde argumenta que si los precios incorporan completamente las expectativas de los participantes, los cambios en los precios serán impredecibles.

Un texto interesante al respecto es el de Lo y MacKinlay (1999) en el cual los autores cuestionan la aplicación de la hipótesis de la caminata aleatoria en acciones, y específicamente para retornos semanales.

Martingalas en tiempo discreto

Una caminata aleatoria sube un paso con probabilidad igual a p o baja un paso con probabilidad igual a $1 - p$.

Más formalmente, una caminata aleatoria $\{S_n\}$ se puede representar como:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

si cumple con:

$$\Pr\{X_i = 1\} = p$$

$$\Pr\{X_i = -1\} = 1 - p$$

Una caminata aleatoria es simétrica si $\Pr\{X_i = 1\} = \Pr\{X_i = -1\} = 1/2$.

Ejemplo (tomado de Brzezniak y Zastawniak, 1999)

Muestre que S_n^2 es una martingala con respecto a F_n .

$$E[S_{n+1}^2 - (n+1) \mid F_n] = E[(S_n + X_{n+1})^2 \mid F_n] - (n+1)$$

Veamos a qué es igual el valor esperado de la parte derecha de la igualdad:

$$\begin{aligned} E[(S_n + X_{n+1})^2 - (n+1) \mid F_n] &= E[S_n^2 + 2 S_n X_{n+1} + X_{n+1}^2 \mid F_n] \\ &= E[S_n^2 \mid F_n] + E[2 S_n X_{n+1} \mid F_n] + E[X_{n+1}^2 \mid F_n] \\ &= S_n^2 + 2 S_n E[X_{n+1} \mid F_n] + E[X_{n+1}^2 \mid F_n] \\ E[X_{n+1} \mid F_n] &= \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0 \\ E[X_{n+1}^2 \mid F_n] &= \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$E[S_{n+1}^2 - (n+1) \mid F_n] = S_n^2 + 0 + 1 - (n+1) = S_n^2 - n$$

Del ejemplo anterior se puede observar que S_n^2 no es martingala.

Claramente una caminata aleatoria S_n es martingala:

$$\begin{aligned} E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E[S_n + X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= E[S_n | \mathcal{F}_n] + E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = S_n$$

Ejercicio 3

Siga asumiendo S_n una caminata aleatoria y sea $Y_n = (q/p)^{S_n}$, donde $p = 1 - q$.

¿Es Y_n martingala?

Ejercicio 4

Sea S_n una caminata aleatoria simétrica.

¿Es $Y_n = (-1)^n \cos(\pi S_n)$ una martingala?

Ejercicio 5

Sea X_n una sucesión de variables aleatorias dos veces integrable. Si X_n es una martingala con respecto a $\mathcal{F}_n$, muestre que X_n^2 es una submartingala.

La importancia del estudio de martingalas en finanzas se hace evidente en la siguiente sección. Para valorar derivados se necesita el principio de no-arbitraje y las martingalas se vuelven una herramienta útil para tal fin.

Probabilidad neutral al riesgo

Esta sección está basada en Gisiger (2009), y Delbaen y Schachermayer (2006). Generalmente, la probabilidad neutral al riesgo es usada para valorar activos bajo el supuesto de no-arbitraje.

Varias cosas deben quedar claras acerca de la probabilidad neutral al riesgo:

- No es la probabilidad real (subjettiva) de que un evento ocurra.
- No asume que estemos en un mundo libre de riesgo.
- No asume que las participantes en el mercado sean neutrales al riesgo.
- No es independiente de la probabilidad del evento real.
- Es simplemente el precio libre de arbitraje en un mercado completo (más adelante se define el concepto de mercado completo).

La probabilidad neutral simplemente fuerza la consistencia de valoración lineal entre todos los activos transados en lo que se refiere a sus componentes de pago.

Un concepto importante a tener en cuenta es la medida de probabilidad *equivalente*. Una medida de probabilidad neutral al riesgo es equivalente a la medida de probabilidad real.

Se dice que dos medidas de probabilidad son *equivalentes* si ambas están de acuerdo en la posibilidad e imposibilidad de los resultados; esto es, si una medida de probabilidad asigna cero probabilidad a un resultado, la otra también. Y si una medida de probabilidad asigna probabilidad mayor a cero a un resultado la otra también.

Anteriormente se mencionó la palabra arbitraje; al respecto se puede definir *oportunidad de arbitraje* como la posibilidad de obtener beneficio en un mercado financiero sin riesgo y sin inversión de capital.

El principio de no-arbitraje dice que un modelo matemático de un mercado financiero no debería permitir posibilidades de arbitraje.

Un ejemplo simple de un mercado financiero

- Asuma que se tiene un mercado con dos activos: un bono (B) y una acción (S) con los siguientes precios

Periodo 0	Periodo 1
$B_0 = 1$	$B_1 = 1$
$S_0 = 1$	$S_1(\omega) = 2$ si ω es bueno 0.5 si ω es malo

- Bono (B) es un activo libre de riesgo y se asume una tasa de interés igual a cero para simplicidad del ejemplo.
- Acción (S) es un activo riesgoso y su precio hoy es conocido. En el periodo 1, puede suceder que el precio suba a 2 con $\Pr\{\text{bueno}\} = \frac{1}{2}$ o baje a 0.5 con $\Pr\{\text{malo}\} = \frac{1}{2}$.
- Introduzca un tercer activo al modelo, una opción en la acción con precio de ejercicio igual a K. La opción le da el derecho (más no la obligación) de comprar la acción en el periodo 1 por el valor de K preestablecido. Asuma $K = 1$.

$$\begin{array}{c} \text{Periodo 1} \\ C_1(\omega) = 1 \text{ si } \omega \text{ es bueno} \\ 0 \text{ si } \omega \text{ es malo} \end{array}$$

Puesto que si ω es bueno, $C_1 = \text{Max}(2 - 1, 0) = 1$ y si ω es malo, $C_1 = \text{Max}(0.5 - 1, 0) = 0$. El pago de una opción (call) en el periodo T está dado por $C_T = \text{Max}(S_T - K, 0)$.

- ¿Cuál es el valor de la opción en el periodo cero, C_0 ?

Por lo general, para valorar activos contingentes (opción en este caso) se usa el valor esperado, lo cual es una técnica comúnmente usada por los actuarios para valorar activos contingentes; en este caso no se descuenta a valor presente, pues se está asumiendo tasa de interés igual a cero.

$$C_0 = E[C_1] = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}$$

La idea de calcular el precio de un activo contingente como un valor esperado es que en el largo plazo el comprador de una opción no ganará ni perderá en promedio. ¿Pero es éste un precio justo?

Valorando sin arbitraje

- Veamos un enfoque un poco diferente, pero con los mismos instrumentos anteriores. Asuma la siguiente estrategia:

Periodo 0

Compra $\frac{2}{3}$ de acción

Compra $-\frac{1}{3}$ de bono (pide dinero prestado)

Se construye un portafolio π con esta estrategia.

- ¿Cuál es el valor del portafolio en el periodo 1, π_1 ?

$$\pi_1 (\omega \text{ bueno}) = \frac{2}{3}(2) + (-\frac{1}{3})1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$\pi_2 (\omega \text{ malo}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{3})1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

De esta manera el portafolio “replica” la opción, $C_1 = \pi_1$.

- ¿De dónde sale el $\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{3}$?

$$x(S_1(\omega \text{ bueno})) + yB_1 = C_1(\omega \text{ bueno})$$

$$x(S_1(\omega \text{ malo})) + yB_1 = C_1(\omega \text{ malo})$$

Entonces:

$$x(2) + y(1) = 1 \quad x = 2/3$$

$$x(1/2) + y(1) = 0 \quad y = -1/3$$

¿Cuál es el valor del portafolio en el periodo cero, π_0 ?

$$\pi_0 = 2/3S_0 - 1/3B_0 = 2/3(1) - 1/3(1) = 1/3$$

Entonces $C_0 = \pi_0 = 1/3$ es una valoración sin arbitraje.

- Suponga que $C_0 = 1/3$ es una valoración con arbitraje y que $C_0 = 1/2$, como hallamos anteriormente, es un precio justo.

Si es así podemos hacer arbitraje comprando el portafolio π y simultáneamente vender la opción C .

	Periodo 0	Periodo 1
Compro π	$-1/3$	$\pi_1(\omega \text{ bueno}) = 1$ ($\text{Pr} = 1/2$) $\pi_1(\omega \text{ malo}) = 0$ ($\text{Pr} = 1/2$)
Vendo C	$S_0 = 1$	$-1/2$ (compro C)
Ganancia	$1/6$	0

Realizo una ganancia de $1/6$ en el periodo cero, mientras que en el periodo 1 las posiciones se cancelan.

Nota: pasando de dos periodos de tiempo a un conjunto $\{0, 1, \dots, T\}$ y considerando T variables aleatorias independientes Bernoulli obtenemos un modelo binomial denominado Cox-Ross-Rubinstein.

Con el cálculo estocástico y una normalización apropiada, con T tendiendo a infinito obtenemos un movimiento browniano.

Y cuando tenemos un movimiento browniano con tendencia obtenemos el famoso modelo de valoración de opciones de Black-Scholes.

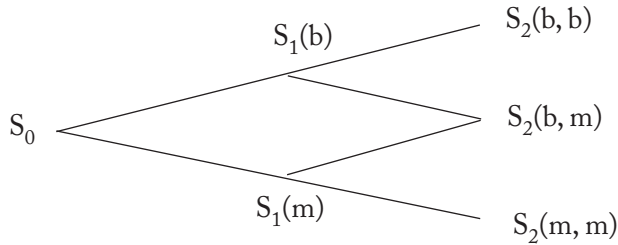
- En el ejemplo anterior asumimos una probabilidad P para los posibles escenarios del valor de la acción y, al tomar el valor esperado de P , obtuvimos un precio de opción $E[C_1] = 1/2$ el cual permitía oportunidades de arbitraje. P se denomina usualmente como la medida física o real.
- Ahora bien, suponga que el mundo es gobernado por una medida de probabilidad diferente, Q , que asigna pesos diferentes a los estados “bueno” y “malo”, de forma que con esta nueva probabilidad el retorno esperado de la acción es igual a la del bono. Estas probabilidades son $Q(\text{bueno}) = 1/3$ y $Q(\text{malo}) = 2/3$ (como se verá más adelante) y es la única solución que satisface:

$$E^Q[S_1] = S_0 = 1$$

En otras palabras, el precio de la acción S es una martingala bajo la medida Q ; y a la probabilidad neutral al riesgo Q se le conoce también como *medida martingala* para S .

De esta manera, tomar valores esperados bajo Q nos daría un precio de opción compatible con el principio de no-arbitraje. Para el ejemplo anterior $E^Q[C_1] = 1/3(1) + 2/3(0) = 1/3$.

- En este ejemplo encontramos un modelo para el precio de una acción S : el modelo de árbol binomial, donde el precio de una acción puede subir con probabilidad p , de un periodo a otro en uS , o, con probabilidad $q (=1 - p)$, bajar a dS . Se asume que $u > 1$ y $d < 1$ y que la tasa de interés (r) es cero.



- Dado S_0 , ¿cuál es el valor esperado de S_1 ?

$$E[S_1 | F_0] = puS_0 + qdS_0 = (pu + qd)S_0$$

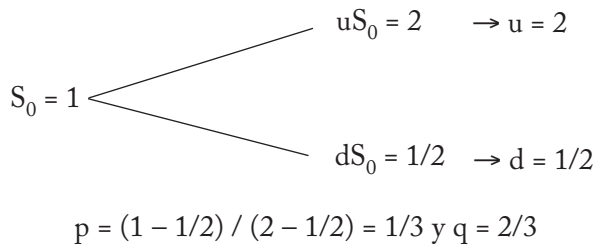
- ¿Cuál es la condición para que este proceso sea un juego justo, en otras palabras, una martingala?

La condición es: $E[S_1 | F_0] = S_0$

Entonces: $pu + qd = 1$ y si $q = 1 - p$.

Entonces: $pu + (1 - p)d = 1$ que resulta en $p = (1 - d) / (u - d)$ y $q = (u - 1) / (u - d)$. ¿Qué son p y q ?

- Verificando con los datos del ejemplo anterior:



Entonces, p y q son *medidas neutrales al riesgo* (o medidas martingalas).

- Se puede demostrar que (¡verifique!) si $r \neq 0$, entonces:

$$p = (1 + r - d) / (u - d) \quad q = (u - (1 + r)) / (u - d)$$

En otras palabras, dado un precio inicial de acción S_0 , el valor presente del valor esperado del precio de la acción en el periodo 1 es S_0 .

A continuación se presentan algunos resultados y conceptos importantes vistos en el ejemplo anterior.

Teorema fundamental de valoración de activos (Fundamental Theorem of Asset Pricing –FTAP)

Un modelo de mercado financiero es libre de arbitraje si, y solo si, existe una medida de probabilidad Q equivalente a la original P (es decir $P(A) = 0$ si, y solo si $Q(A) = 0$) tal que el proceso del precio de la acción es una martingala bajo Q . Una medida equivalente, como se mencionó anteriormente, quiere decir que si un evento es imposible bajo P , también lo será bajo la medida Q , aunque se asignen diferentes probabilidades a un evento A en particular. Este teorema fue demostrado por Harrison y Pliska (1981).

Veamos otras definiciones comúnmente usadas en finanzas:

Activo contingente

Es una variable aleatoria tal que su precio es $0 \leq C < \infty$.

Derivado

Es un activo contingente cuyo valor es medible con respecto al valor del activo subyacente S , $C = f(S)$.

Mercado completo

Un mercado es completo si cualquier derivado puede ser perfectamente cubierto (Jeanblanc et al., 2009). En palabras de Föllmer y Schied (2004), un mercado es completo si cada activo contingente es generado.

Se dice que un activo contingente es generado si existe una estrategia de portafolio de activos subyacentes que replican el pago del activo contingente (McNeil et al., 2005).

Regla de valoración neutral al riesgo

El precio justo de cualquier activo contingente puede ser calculado como el valor esperado del pago descontado bajo una medida neutral al riesgo Q (diferente a la probabilidad original o real, P). En otras palabras, valoración neutral al riesgo corresponde a usar un valor esperado con respecto a una medida martingala equivalente.

En general un activo contingente se valora de la siguiente manera:

$$C_0 = E^Q[C_T / (1 + r)^T]$$

Como se vio en el ejemplo, no es difícil hallar Q en un modelo discreto ¿Pero cómo pasar de P a Q si se trabaja, por ejemplo, en un modelo continuo? La respuesta es la derivada de Radon-Nikodym, L . La derivada de Radon-Nikodym es una variable aleatoria positiva, donde su esperanza bajo P es igual a 1, y se denota como:

$$L = \frac{\partial Q}{\partial P}$$

De esta forma, L puede ser vista como la razón de verosimilitud entre Q y P . Al ser L positiva, se puede encontrar la medida de probabilidad Q que es equivalente a P . Este concepto es útil para aplicar el Teorema de Girsanov en procesos de tiempo continuo, pero no entraremos en detalles en este texto.

Tiempos de parada (*Stopping time*)

Un tiempo de parada es una variable aleatoria que da un tiempo aleatorio en el cual la trayectoria de un proceso alcanza un valor por primera vez.

Por ejemplo, la primera vez que el precio de la acción llega a \$100 es un tiempo de parada. Sin embargo, la primera vez que lo cruza no es un tiempo de parada. El concepto de tiempo de parada se vuelve importante en el estudio de opciones americanas.

Una opción americana es aquella que puede ser ejercida en cualquier momento antes de su expiración, donde el decisor se enfrenta al problema de decidir cuál es el momento óptimo de ejercer la opción.

Sin embargo, la decisión de ejercer o no en un momento t debe estar basada en la información disponible en el momento t , de esta manera la estrategia de ejercer es un tiempo de parada. La siguiente definición es tomada de Brzezniak y Zastawniak (1999).

Tiempo de parada

Es una variable aleatoria τ con valores en el conjunto $\{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ con respecto a la filtración F_n .

$$\{\tau = n\} \in F_n$$

De manera equivalente: $\{\tau = n\} \in F_n$ si y solo si $\{\tau \leq n\} \in F_n$

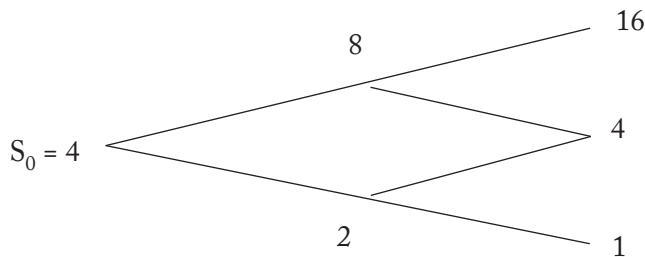
- Infinito se incluye para cubrir la posibilidad de que el proceso nunca acaba. En cada momento n se debe decidir si para o no, es decir $\tau = n$ o no. Por lo tanto el evento $\tau = n$ debe pertenecer a F_n , donde F_n representa la información del proceso hasta n .
- Por ejemplo, asuma que se está en un casino y X_n representa la cantidad de riqueza en el momento n . Entonces

$$\tau: \inf\{n: X_n = 1,000 \text{ ó } 0\}$$

representa el momento (por primera vez) en que la riqueza en n sea \$1,000 ó 0 y ahí para el juego. En este caso un tiempo de parada se conoce como tiempo de la primera llegada (*"first hitting time"*).

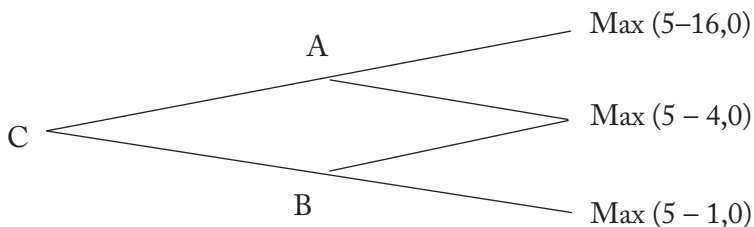
Ejemplo (tomado de Shreve, 2004)

Asuma un modelo de dos periodos donde $S_0 = 4$, $K = 5$, $r = \frac{1}{4}$, $u = 2$ y $d = \frac{1}{2}$. Considere una opción put cuyo pago es $\text{Max}(K - S, 0)$.



Las medidas neutrales al riesgo son $p = q = 1/2$.

- Valoremos una put europea:



Las siguientes expresiones representan los pagos de la opción en cada nodo:

$$(A) \frac{1}{(1 + \frac{1}{4})} [\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(1)] = \frac{4}{5}(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$$

$$(B) \frac{4}{5} [\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(4)] = 2$$

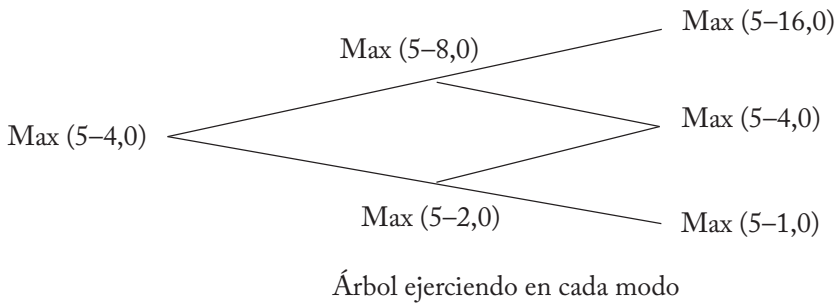
$$(C) \frac{4}{5} [\frac{1}{2}(\frac{2}{5}) + \frac{1}{2}(2)] = \frac{24}{25}$$

Por lo tanto esta put europea vale $\$24/25$.

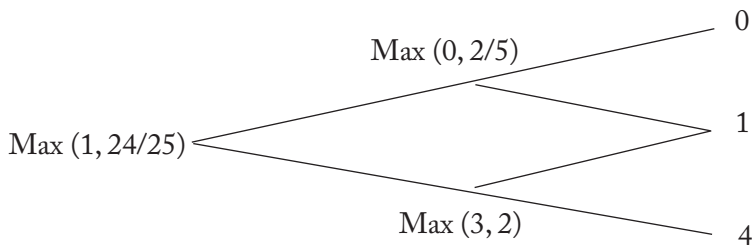
- Valorar una opción americana es diferente: puesto que se puede ejercer antes de su madurez, debemos incorporar el derecho de ejercer tempranamente. En cada nodo del árbol se debe evaluar si el decisor está mejor entre ejercer la opción o esperar.

Martingalas en tiempo discreto

Veamos primero cuando ejerce:



- Ahora comparemos con el valor de esperar: el valor de esperar es el valor del put (europeo) en ese nodo.



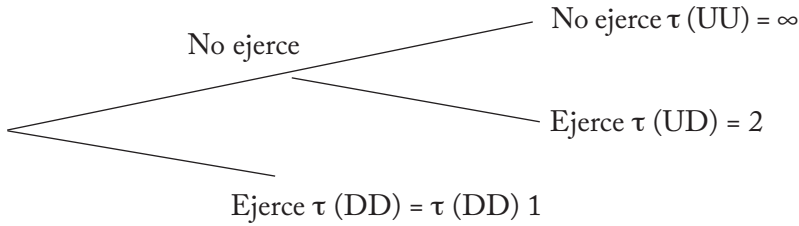
- El valor del put (americano) en el periodo 0 es por lo tanto:

$$4/5 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \right) + \frac{1}{2} (3) \right] = 34/25 = 1.36$$

Como se observa el precio del put americano es mayor al del put europeo, esto se debe a la flexibilidad de ejercer en cualquier momento.

Ahora veamos el mismo ejercicio desde el punto de vista de tiempos de parada.

En general, el momento en el que una opción americana debería ser ejercida es aleatorio. Este depende del movimiento de precios del activo subyacente. Para el ejemplo anterior:



$$\tau(UU) = \infty \quad \tau(UD) = 2 \quad \tau(DU) = 1 \quad \tau(DD) = 1$$

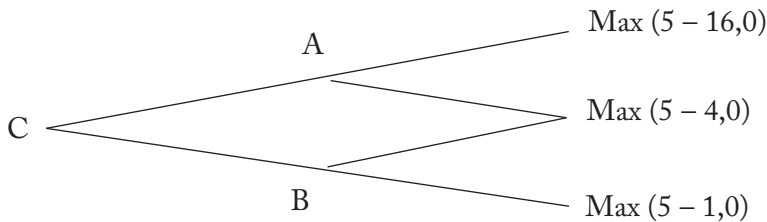
Cuando $\tau = \infty$, quiere decir que la opción debe dejarse expirar sin ejercer. En este caso los tiempo de parada son:

$$\tau = \{1, 2\} \cup \{\infty\}$$

Se pueden valorar opciones americanas (put) con tiempos de parada mediante:

$$V_n = \sup_{\tau \in \mathcal{F}_n} E^Q \left[\frac{1}{(1+r)^{\tau-n}} \max(K - S_\tau) \right]$$

Cuando $n = N$, es decir, en el último periodo: $V_n = \max(0, K - S_N)$. En el ejemplo de la opción americana se tiene



- Sea $n = 1$. En el *nodo A* vimos que no ejerce, entonces para hacer $E^Q[\cdot]$ lo más grande posible, hay dos posibilidades ó $\tau = \infty$ ó $\tau = 2$ debido a que después de este nodo la acción sube a 16 (no ejerce) o baja a 4 (ejerce, entonces $\tau = 2$)

Martingalas en tiempo discreto

$$V_n = \sup_{\tau \in F_n} E^Q \left[\frac{1}{(1+r)^{\tau-n}} \max (K - S_\tau) \right] \quad \text{con } \tau = \infty \text{ ó } \tau = 2$$

$$V_{n=1}^{UD} = \sup_{\tau \in F_1} E^Q \left[\frac{1}{(1 + \frac{1}{4})^{\tau-1}} \max (5 - S_\tau) \right]$$

$$V_{n=1}^{UD} = \frac{1}{2} (0) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^{2-1}} \max (5 - 4, 0) \right] = \frac{2}{5}$$

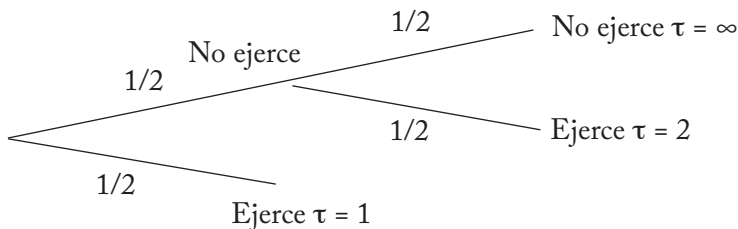
- En $n = 1$, pero en el nodo B, para hacer $EQ[.]$ lo más grande posible, tenemos dos alternativas: o ejercemos en $t = 1$ o en $t = 2$. Si ejercemos en $t = 1$, entonces $VD1 = 3 = \max(K - S_1)$. Hallemos $EQ[.]$ si ejercemos en $t = 2$:

$$V_n^D = E^Q \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\tau-1}} \max (5 - S_\tau) \right]$$

$$V_n^{UD} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right) (1) + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right) (4) = 2$$

De esta manera se puede observar que el valor más grande en el nodo B es 3 (V^D_1).

- Ahora hallemos $V_n=0$, es decir en el nodo C. Sabemos que $\tau(UU) = \infty, \tau(UD) = 2$ y $\tau(DU) = \tau(DD) = 1$.



$$V_0 = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(4/5)^2 V^{UD}_1 + \frac{1}{2}(4/5) V^D_1$$

$$V_0 = 0 + \frac{1}{4}(16/25)(2/5) + \frac{1}{2}(4/5)(3)$$

$$V_0 = 34/25 = 1.36$$

- El valor de la opción americana (put) se puede resumir de la siguiente manera:

Para el último periodo, N:

$$V_N = \max(K - S_N, 0)$$

En otros periodos:

$$V_n = \max\{(K - S_n, 0), 1/(1+r)[p^*V_{n+1}^U + q^*V_{n+1}^D]\}$$

En el caso de una opción call se cambia $\max(K - S_n, 0)$ por $\max(S_n - K, 0)$.

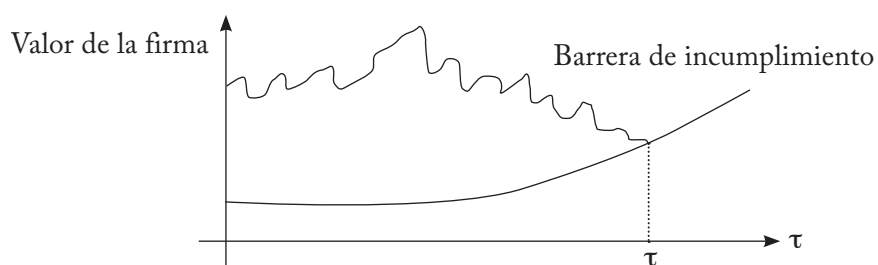
Resultado: el valor (precio) de una opción americana es siempre mayor o igual a su valor intrínseco en $t = 0$. En el ejemplo anterior vimos que $(K - S_{t=0}) = 1$, pero $V_{n=0} = 1.36$.

Una aplicación a riesgo de crédito

Una extensión importante al modelo de Merton en riesgo crediticio es el enfoque del tiempo de la primera llegada introducido por Black y Cox (1976).

Este enfoque consiste en incluir una barrera de incumplimiento, dependiente del tiempo, permitiendo así que el incumplimiento ocurra antes de la madurez de la deuda.

Martingalas en tiempo discreto



De esta manera se puede introducir el estudio de tiempos de parada a riesgo crediticio y otras aplicaciones financieras.

CAPÍTULO 3

MOVIMIENTO BROWNIANO

En esta sección introduciremos los conceptos de modelos probabilísticos básicos usados para capturar el comportamiento de una acción, opción u otro título.

Los árboles discretos de la sección anterior son una aproximación de un modelo de cómo se comportan realmente las acciones. En realidad, el precio puede cambiar en cualquier instante. Bachelier analizó en 1900 el movimiento de la bolsa de valores de París mediante un modelo matemático, y a partir de ahí se ha tratado de comparar el precio con el movimiento de una partícula de gas, que es un proceso continuo, como el movimiento browniano (mb).

Se puede decir que el botánico Robert Brown fue el primero en observar y describir, en 1827, el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en un líquido, resultante de impactos sucesivos y aleatorios con sus partículas vecinas aparentemente (de ahí el término movimiento browniano). En 1905 Albert Einstein propuso una teoría matemática de mb, la cual fue desarrollada más adelante por Norbert Wiener en 1923, razón por la cual se le conoce también como proceso de Wiener.

De caminata aleatoria a mb

Recuerde que una caminata aleatoria $\{S_n\}$ es un proceso tal que:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

y cumple con:

$$\Pr\{X_i = 1\} = p \text{ y } \Pr\{X_i = -1\} = 1 - p$$

Es simétrica si $p = 1/2$.

- Tome el periodo $[0, T]$
- Divídalo en n intervalos de igual tamaño, Δt . Entonces $\Delta t = T/n$.
- Estos intervalos tienen puntos finales $t_k = k\Delta t$, con $k = 0, 1, \dots, n$.
- Ahora asuma un proceso $Z(t_{k+1}) = Z(t_k) + \varepsilon(t_k) \sqrt{\Delta t}$. Donde $\varepsilon(t_k) \sim N(0, 1)$ y con $Z(t_0) = 0$. ¿Es el proceso Z una caminata aleatoria?
- Este es un proceso que arranca en el periodo cero con valor de cero y se mueve hacia arriba o hacia abajo en cada punto de tiempo por una cantidad $\sqrt{\Delta t}$ amplificada por un valor distribuido normal (puede ser positivo o negativo).
- Las variables aleatorias $\varepsilon(\cdot)$ son mutuamente no correlacionadas $E[\varepsilon(t_j) \varepsilon(t_k)] = 0$
- La diferencia de dos puntos del proceso es una variable aleatoria normal por ser suma de normales:

$$Z(t_k) - Z(t_j) = \sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon(t_i) \sqrt{\Delta t} \sim \text{Normal}$$

- ¿Cuál es el valor esperado y la varianza de esta diferencia?
 - $E[Z(t_k) - Z(t_j)] = 0$ puesto que $E[\varepsilon(t_i)] = 0$ (¡verifique!)
 - $\text{var}[Z(t_k) - Z(t_j)] = t_k - t_j$ (¡verifique!)

Movimiento Browniano

- Tomando límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$Z(t_k) - Z(t_i) = \varepsilon(t_k) \sqrt{\Delta t},$$

$$\text{entonces } \Delta Z = \varepsilon(t_k) \Delta t,$$

$$\text{entonces } dZ = \varepsilon_t dt$$

dZ se denomina un proceso de Wiener o mb.

Ejercicio 6

Asuma una caminata aleatoria $\{S_n\}$ con $S_n = \sum X_i$ con $X_i = \pm \sqrt{\Delta t}$ y $p = 1/2$. Simule y grafique caminatas aleatorias con $n = 16, 64, 256$ y 1024 respectivamente.

Halle la media y varianza de X_i y S_n .

Ahora asuma $n = 6$ y dibuje un árbol binomial con los valores que puede tomar la caminata aleatoria en el último nodo. Halle también la probabilidad total de terminar en un nodo en particular. Dibuje el histograma de probabilidades de estos valores y concluya.

Ahora estamos listos para definir mb:

Movimiento browniano

El PE $B = \{B(t), t \geq 0\}$ es un mb estándar (o proceso de Wiener) si cumple:

1. B tiene incrementos independientes.
2. Para $0 \leq s < t$:

$$B(t) - B(s) \sim N(0, t - s).$$

Los incrementos se distribuyen normalmente con media cero y varianza igual al tamaño del incremento entre t y s .

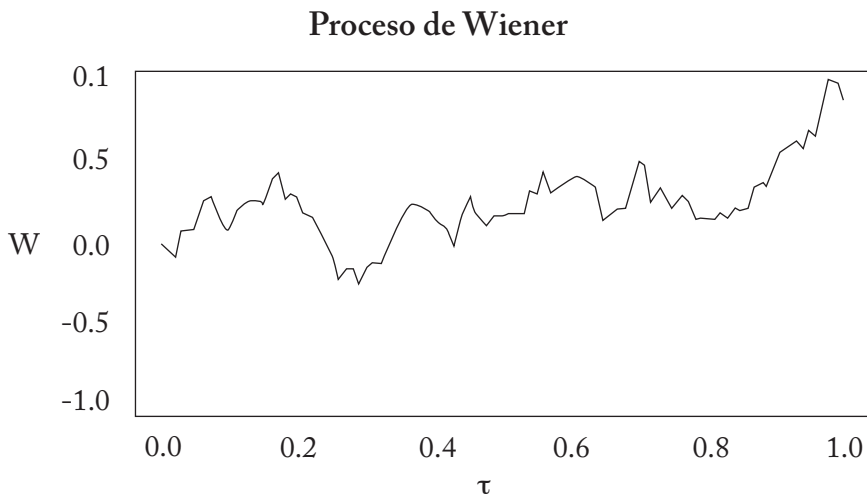
3. B es un proceso continuo (sin saltos), pero no diferenciable.

4. $B(0) = 0$. El proceso se inicia en cero.

Es usual encontrar en textos y artículos que el proceso B es un P-mb si la condición 2 se da bajo la medida de probabilidad P , y además es independiente de F_s (la historia hasta el momento s). La condición 3 es importante en finanzas por cuanto si se modela el retorno de una acción mediante un mb, la no diferenciabilidad (con respecto al tiempo) implica que no podremos predecir su retorno futuro y por ende su precio, lo cual es una propiedad deseable para modelar este tipo de procesos en finanzas. Si bien es cierto que se podrían introducir saltos a un proceso más general, sin embargo, este tipo de modelos queda fuera del alcance del presente texto. Ejemplos de este tipo de procesos son los modelos de Merton (1976) y Kou (2002).

En resumen, un mb es un proceso gaussiano con incrementos independientes y estacionarios. De las condiciones 2 y 4 se puede concluir que $B(t) \sim N(0, t)$, puesto que $B(t) - B(s=0) \sim N(0, t - 0)$.

El siguiente gráfico muestra una simulación de 100 pasos de un mb:



Las trayectorias del mb aunque son continuas son muy irregulares. Las siguientes propiedades de mb son tomadas de Resnick (1992):

Propiedades del mb

1. Propiedad de Markov: mb es un proceso sin memoria.
2. El Movimiento browniano es una martingala (en tiempo continuo).

Martingala en tiempo continuo es:

$$E[X_t | F_s] = X_s \text{ para } s < t$$

$$\text{Entonces: } E[B_t | F_s] = B_s$$

3. Propiedad de Escala.

Para cualquier $c > 0$, entonces:

$$\{\sqrt{c} B(t/c), t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{B(t), t \geq 0\};$$

donde $\sqrt{c} B(t/c)$ es también un mb.

Donde $\stackrel{d}{=}$ quiere decir igualdad en distribución.

Dado que $B(t) \sim N(0, t)$, entonces, $B(t/c) \sim N(0, t/c)$.

Por lo tanto, $\sqrt{c} B(t/c) \sim \sqrt{c} N(0, t/c)$ y por ende $\sqrt{c} B(t) \sim N(0, c(t/c))$.

Se puede observar que en $t = 0$, el proceso es igual a cero, y como se acaba de demostrar $\sqrt{c} B(t/c) \sim N(0, t)$.

Se concluye entonces que $\sqrt{c} B(t/c)$ es un mb.

Gráficamente esta propiedad dice que las formas de las curvas en diferentes intervalos de tiempo lucen similares y es conocida también como propiedad de autosimilaridad. Más detalles de procesos autosimilares se pueden encontrar, por ejemplo, en Embrechts y Maejima (2002).

4. Simetría

El negativo de un mb es (y se puede demostrar, como en la propiedad anterior que) también un mb.

$$-B(t) \stackrel{d}{=} B(t)$$

5. Gaussiano

mb es gaussiano y con función de covarianza $\text{cov}[B_t, B_s] = E[B_t B_s] = s^\wedge t$. Donde $^\wedge$ significa el mínimo entre dos expresiones.

$$\text{cov}[B_t, B_s] = \text{cov}[(B_t - B_s + B_s), B_s] = \text{cov}[(B_t - B_s), B_s] + \text{cov}[B_s, B_s]$$

utilizando la condición 1 (incrementos independientes), y contando con que la covarianza de una variable con ella misma es la varianza, $\text{cov}[B_t, B_s] = s^\wedge t$.

6. No es diferenciable con respecto al tiempo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_{t+\Delta t} - B_t}{\Delta t} \right) = \infty$$

Puesto que mb no es diferenciable, es imposible decir en cualquier momento t en qué dirección irá el camino del mb.

7. Variación no acotada

Las trayectorias del mb no tienen primera variación acotada en cualquier intervalo finito de tiempo $[0, T]$:

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^n |B(t_i) - B(t_{i-1})| = \infty$$

Donde el supremo se toma sobre todas las posibles particiones

$$\tau: 0 = t_0 < \dots < t_n = T \text{ de } [0, T]$$

Movimiento Browniano

Las propiedades 6 y 7 del mb hacen que los métodos clásicos de integración no funcionen con este tipo de procesos por lo que necesitaremos una herramienta especial, como veremos más adelante.

Ejercicio 7

Muestre la propiedad 2 de mb.

Ejercicio 8 (*tomado de Wiersema, 2008*)

1. Diseñe un programa que calcule la primera variación, la variación cuadrática y la tercera variación de una función diferenciable (p. ej., X^2) para valores de X en $[0, 1]$ dividiéndolo inicialmente en $n = 2,000$ pasos, doblándolo sucesivamente hasta $n = 1,024,000$ pasos.
2. Luego use el mismo programa para calcular la primera variación, la variación cuadrática y la tercera variación de un mb. Compare y concluya.
3. Para la primera variación utilice la siguiente expresión:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |B(t_{k+1}) - B(t_k)|$$

Para la variación cuadrática (segunda variación) utilice:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (B(t_{k+1}) - B(t_k))^2$$

Y para la tercera variación:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (B(t_{k+1}) - B(t_k))^3$$

La primera variación de un mb no es acotada. Esto se puede ver intuitivamente, puesto que $\Delta Bt \approx (\Delta t)^{1/2}$ y, al sumarlos muchas veces, el resultado no tendrá cota. Mientras que $\Delta Bt^2 = \Delta t$ y, por lo tanto, su suma convergerá en T. Esto es, un mb tiene variación cuadrática acotada. La siguiente nota aclara estos conceptos.

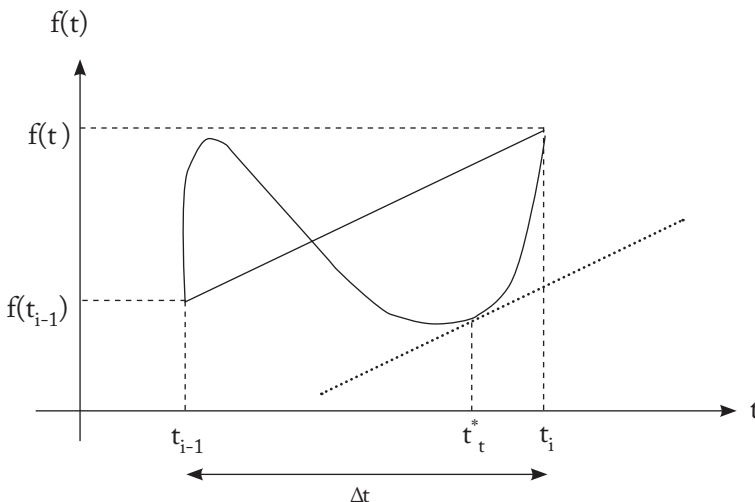
Nota sobre la primera variación:

Asuma una función f continua y diferenciable. Puede pensarse $f(t)$ como la posición de una partícula en una línea.

Normalmente en cálculo se define primera variación de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

Recordemos: el teorema del valor medio nos dice que existe un punto t_t^* en el intervalo (t_{i-1}, t_i) tal que la tangente en el punto t_t^* es paralela a la secante que une los puntos $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ y $(t_i, f(t_i))$. El siguiente gráfico aclara esto:



Movimiento Browniano

Matemáticamente el teorema del valor medio es:

$$\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = f'(t_i^*)$$

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*) [t_i - t_{i-1}]$$

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*) \Delta t$$

Aplicando el teorema del valor medio a la definición de primera variación se obtiene:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N |f'(t)| \Delta t = \int_0^T |f'(t)| dt$$

Esta expresión converge en una función diferenciable.

Una interpretación física de la primera variación indica que es la distancia total recorrida por la partícula en el tiempo T. La primera variación para una función continua y diferenciable es finita pero para un mb es infinita.

La primera variación infinita implica que mb se mueve en una distancia infinita en cualquier periodo de tiempo finito. Representado gráficamente, la vibración del mb es tan intensa que mueve una partícula sobre un camino infinitamente largo en cualquier periodo de tiempo; en otras palabras, la naturaleza fractal del mb es lo que se vería gráficamente.

$$\int_0^T |f'(t)| dt = \infty \quad \text{para mb}$$

Variación cuadrática o segunda variación

La segunda variación o variación cuadrática se estima de la siguiente forma:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \left(f(t_i) - f(t_{i-1}) \right)^2$$

Aplicando el teorema del valor medio a la expresión anterior se obtiene:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \left(f'(t_i^*) \right)^2 (\Delta t)^2 = \Delta t \int_0^T \left(f'(t) \right)^2 dt$$

El cual es cero para una función diferenciable (ver ejercicio 8).

Para un mb sabemos que $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$ y también que $E[B(t) - B(s)] = 0$, el cual denotaremos como $E[\Delta B] = 0$.

$$\text{Por consiguiente } \text{var}[\Delta B] = E[\Delta B^2] - (E[\Delta B])^2 = E[\Delta B^2].$$

$$\text{Entonces } E[\Delta B^2] = t - s = \Delta t.$$

En resumen $E[\Delta B] = 0$ y $E[\Delta B^2] = \Delta t$. Además se puede mostrar que $E[\Delta B^4] = 3(\Delta t)^2$.

La segunda variación para un mb es:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \left(B(t_i) - B(t_{i-1}) \right)^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \left(\Delta B(t_i) \right)^2$$

Como se puede observar, la segunda variación para un mb es una variable aleatoria.

Veamos su media y varianza, y luego tomamos límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\bullet \quad E \left[\sum_{i=1}^N \left(\Delta B(t_i) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^N E \left[\Delta B(t_i) \right]^2 = \sum_{i=1}^N \Delta t = T$$

Movimiento Browniano

$$\begin{aligned} \text{var} \left[\sum_{i=1}^N \left(\Delta B(t_i) \right)^2 \right] &= \sum_{i=1}^N E \left[\Delta B^2(t_i) - \Delta t \right]^2 = \sum_{i=1}^N E \left[\Delta B^4(t_i) - 2\Delta B^2(t_i) \Delta t + \Delta t^2 \right] \\ &\bullet \\ \sum_{i=1}^N \left[3(\Delta t)^2 - 2(\Delta t)^2 + \Delta t^2 \right] &= \sum_{i=1}^N \left[2(\Delta t)^2 \right] = 2(\Delta t)T \end{aligned}$$

Al tomar límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ (hallamos la variación cuadrática):

$$E[\text{variación cuadrática}] = 0$$

$$\text{Var}[\text{variación cuadrática}] = T$$

Por lo tanto la variación cuadrática de un mb converge a su valor esperado T .

CAPÍTULO 4

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Integral de Itô

Las trayectorias de un mb no son diferenciables (con respecto al tiempo) y no tienen primera variación acotada, por tal razón necesitamos introducir el concepto de la integral estocástica con respecto a un mb.

En finanzas la integral estocástica de Itô es importante en la teoría de valoración de opciones.

Intuición:

Considere el periodo $[0, T]$ y divídalo en n intervalos de tamaño $\Delta t = T/n$ con puntos $t_k = k\Delta t$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Estos puntos pueden ser vistos como los momentos en que el mercado abre y se transan las acciones. Sea $a(t_0)$ la cantidad de acciones que compra un inversor en $t = 0$ a un precio $B(t_0)$, por ejemplo:

- En t_0 un inversor compra 10 acciones a \$100 y en t_1 vende 5 acciones a \$110.

En $t = 1$ la acción cambia a $B(t_1)$ y el inversor cambia su portafolio por $a(t_1)$.

- De esta manera $a(t_0) = 10$ y $a(t_1) = 5$, $B(t_0) = \$100$ y $B(t_1) = \$110$, entonces $\Delta B(t_1) = \$10$ y la ganancia total es \$50 ($= 5 \times \10)

- De t_k a t_{k+1} : el cambio en el precio de la acción es $B(t_{k+1}) - B(t_k)$ (que es un retorno en términos absolutos).
- Por lo tanto, las ganancias hasta t_k son:

$$I_n = \sum_{i=1}^N a(t_i) \Delta B(t_i)$$

I_n es denominada la *integral estocástica discreta* y $\Delta B(t_k) = B(t_{k+1}) - B(t_k)$. Tomando límite de I_n cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$I_n = \int_0^T a_t dW_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_n$$

I se denomina la *integral estocástica de Itô*.

Algunos ejemplos de integrales de Itô son (tomado de James, 2003):

- $\int_0^T dW_t = W_t - W_0$
- $\int_0^T (dW_t)^2 = T$
- $\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} T$

De la segunda integral se tiene que $(dW_t)^2 = dt$. De la tercera integral, si la comparamos con una integral de Riemman, el término inesperado es $(1/2)T$, esto se debe a que la variación cuadrática de un mb no es cero (pero sí lo es para una función diferenciable).

Una condición complementaria, para que una integral de Itô exista, es impuesta a la función $a(t)$:

$$E \left[\left(\int_0^T a_t dB_t \right)^2 \right] = E \left[\int_0^T a_t^2 dt \right] < \infty$$

Esta es conocida como la condición de integrabilidad cuadrada (*Square Integrability Condition*). Las siguientes propiedades de la integral de Itô son tomadas de Wiersema (2008).

Propiedades de la integral de Itô

1. Linealidad

$$\int_0^T \alpha a_t dB_t + \int_0^T \beta b_t dB_t = \int_0^T (\alpha a_t + \beta b_t) dB_t$$

2. Distribución

$$E \left[\int_0^T a_t dB_t \right] = 0$$

$$\text{var} \left[\int_0^T a_t dB_t \right] = \int_0^T E[a_t^2] dt$$

3. Propiedad martingala

$$E \left[\int_0^T a_t dB_t \mid F_s \right] = \int_0^s a_t dB_t \quad S < T$$

4. Producto

$$E \left[\int_0^T a_t dB_t \int_0^T b_t dB_t \right] = \int_0^T E[a_t b_t] dt$$

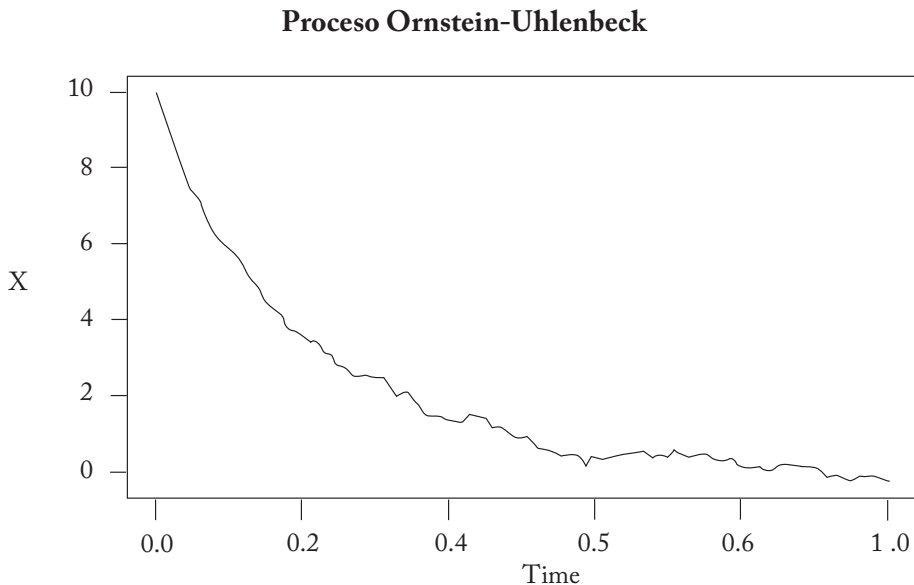
Un mb es la pieza fundamental para construir otros procesos como:

- Proceso generalizado de Wiener: $dX_t = a dt + b dB_t$
- Proceso de Itô: $dX_t = a(x,t)dt + b(x,t)dB_t$

Del proceso de Itô se pueden obtener los siguientes procesos comúnmente usados en finanzas para dinámicas de precios de acciones (y otros activos) o tasas de interés.

- Ornstein – Uhlenbeck: $dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dB_t$, $\lambda, \sigma > 0$ (constantes)
- Reversión a la media: $dr_t = -\lambda(r_t - r) dt + \sigma dB_t$, $\lambda, \sigma, r > 0$ (constantes)
- Reversión a la media con raíz cuadrada: $dr_t = -\lambda(r_t - r) dt + \sigma \sqrt{r_t} dB_t$
- Anidada:
$$dS_t/S_t = \mu_t dt + \sqrt{v_t} dB_t^1$$
$$dv_t = -\alpha(v_t - v)dt + \beta\sqrt{v_t} dB_t^2$$

El siguiente gráfico muestra un ejemplo de una simulación de un proceso Ornstein-Uhlenbeck.



Lema de Itô

El lema de Itô es muy usado en el cálculo de precios de derivados, como veremos en un ejemplo más adelante.

Antes de ver el lema de Itô veamos la siguiente tabla de multiplicación:

	dt	dB1t	dB2t
dt	0	0	0
dB1t	0	ρdt	ρdt
dB2t	0	ρdt	dt

Donde ρ es la correlación entre los procesos.

El lema de Itô es:

$$df_t = \frac{\partial f_t}{\partial t} dt + \frac{\partial f_t}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial X_t^2} (dX_t)^2$$

Asumiendo que el precio de una acción sigue un proceso de Itô, $dX_t = a(x,t)dt + b(x,t)dB_t$, aplicamos el lema de Ito:

$$\begin{aligned} df_t &= \frac{\partial f_t}{\partial t} dt + \frac{\partial f_t}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial X_t^2} (dX_t)^2 \\ &= \frac{\partial f_t}{\partial t} dt + \frac{\partial f_t}{\partial X_t} (adt + bdB_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial X_t^2} (adt + bdB_t)^2 \\ &= \frac{\partial f_t}{\partial t} dt + \frac{\partial f_t}{\partial X_t} adt + \frac{\partial f_t}{\partial X_t} bdB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t}{\partial X_t^2} b^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} + a \frac{\partial f_t}{\partial X_t} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial X_t^2} \right) dt + b \frac{\partial f_t}{\partial X_t} dB_t \end{aligned}$$

Se ha simplificado $a(x,t)$ por a y $b(x,t)$ por b . La relación anterior brinda el inicio para valorar derivados. La ecuación diferencial parcial de Black Scholes utiliza el lema de Itô para tal fin, como se verá a continuación:

Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Suponga que el precio de una acción sigue el proceso:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Donde W_t es un proceso de Wiener. Este es conocido como Movimiento Browniano Geométrico (MBG). Aplique lema de Ito:

$$df_t = \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} (\sigma S_t)^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} dW_t$$

Ahora construya un portafolio en el cual compra Δ unidades de una acción y vende 1 unidad del derivado, por lo tanto el valor del portafolio en cualquier momento t , V_t es igual a:

$$V_t = \Delta S_t - f_t$$

El aumento del valor del portafolio en cualquier dt es igual a:

$$dV_t = \Delta dS_t - df_t$$

Se asume que la cantidad de acciones Δ se mantiene fija en cualquier momento. Reemplazando dS_t y df_t por las expresiones anteriores, se tiene que el cambio en el valor del portafolio en un instante de tiempo es:

$$dV_t = \Delta(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \left[\left(\frac{\partial f_t}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} (\sigma S_t)^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} dW_t \right]$$

Reacomodando términos:

$$dV_t = \left[\Delta \mu S_t - \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} (\sigma S_t)^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \right) \right] dt + \left[\sigma S_t \left(\Delta - \frac{\partial f_t}{\partial S_t} \right) \right] dW_t$$

Para que el cambio en el valor del portafolio sea determinístico y no dependa de dW_t , se escoge entonces $\Delta = df/dS_t$ de donde:

$$dV_t = \left[-\frac{\partial f_t}{\partial t} - \frac{1}{2} (\sigma S_t)^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \right] dt$$

De esta manera se obtiene un portafolio libre de riesgo y, por el principio de no arbitraje, este cambio en el valor del portafolio debe ser igual al rendimiento de la cantidad f invertida en un bono:

$$dV_t = \left[-\frac{\partial f_t}{\partial t} - \frac{1}{2} (\sigma S_t)^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} \right] dt = rV_t dt$$

Reemplazando V_t por $\Delta S_t - f_t$ y $\Delta = df/dS_t$ se obtiene:

$$-\frac{\partial f_t}{\partial t} - \frac{1}{2} (\sigma S_t)^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} = r \left(\frac{\partial f_t}{\partial S_t} S_t - f_t \right)$$

Reacomodando términos se obtiene la famosa ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma S_t)^2 \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial f_t}{\partial S_t} = r f_t$$

Esta relación permite valorar un derivado f en un tiempo t , el cual, por lo general, se está interesado en valorarlo en $t = 0$. Para solucionar este tipo de ecuaciones se requieren condiciones de frontera, y en este caso necesitamos de la función de pagos del derivado que se quiere valorar. En ocasiones no es fácil encontrar una solución de manera analítica, por lo que para lograrlo se requiere de métodos numéricos. Al observar la ecuación obtenida, ésta no depende de μ ; en otras palabras, es independiente del retorno de la acción.

Ejemplo (*Simulación de precios de acción*)

Asuma que la dinámica del precio de la acción sigue un MBG:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

donde W_t es un proceso de Wiener.

Sea $f_t = \ln S_t$, aplique el lema de Itô.

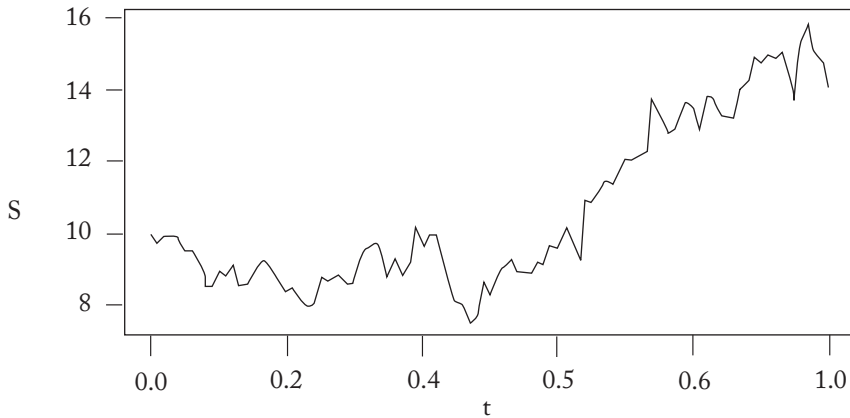
$$a = \mu S \text{ y } b = \sigma S$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_t}{\partial t} &= 0 \quad \frac{\partial f_t}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t} \quad \frac{\partial^2 f_t}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2} \\ d(\ln S_t) &= \left(0 + \mu S_t \right) = \frac{1}{S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{1}{S_t} dW_t \\ \int_0^T d(\ln S_t) &= \int_0^T \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \int_0^T \sigma dW_t \\ d(\ln S_t) &= \frac{S_t}{S_0} \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_t \sim N \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2, \sigma^2 \right) \\ S_t &= S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_t \right\} \sim LN \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2, \sigma^2 \right) \end{aligned}$$

Con esta expresión se pueden simular caminos de precios de acciones. Si se cambia μ por la tasa libre de riesgo r se pueden realizar simulaciones de varios precios de acción y obtener el precio de un derivado mediante simulación Monte Carlo.

El siguiente gráfico muestra una simulación de 100 pasos de un MBG:

Movimiento Browniano Geométrico



Ejercicio 8

Utilice lema de Itô para encontrar:

$$\int_0^T B_t dB_t$$

Ayuda: use $f_t = B^2(t)$ y $dB_t = dB(t)$.

Otro modelo usado en finanzas para tasas de interés de corto plazo es el de Vasicek que asume la siguiente dinámica:

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma dW_t$$

Donde a es la tasa de interés a largo plazo y b la velocidad con que el proceso revierte a la tasa de largo plazo. Como se puede ver, el modelo de Vasicek es un caso especial de un proceso de Itô y, más específicamente, a un caso de reversión a la media.

Asuma que $f(r,t) = -re^{-a(T-t)}$, se desea aplicar lema de Itô a $f(r,t)$ y las derivadas parciales son:

$$f_t = -ae^{-a(T-t)}$$

$$f_r = -e^{-a(T-t)}$$

$$f_{rr} = 0$$

Entonces, aplicando lema de Itô:

$$df = (are^{-a(T-t)} + a(b - r_t)[-e^{-a(T-t)}] + 0)dt + \sigma(-e^{-a(T-t)})dW_t$$

$$df = -abe^{-a(T-t)}dt - \sigma e^{-a(T-t)}dW_t$$

$$\int_0^T df = -be^{-a(T-t)} \Big|_0^T - \sigma \int_0^T e^{-a(T-s)}dW_s$$

$$-r_t + r_0e^{-aT} = -b + be^{-aT} - \sigma \int_0^T e^{-a(T-s)}dW_s$$

$$-r_t = r_0e^{-aT} + b(1 - e^{-aT}) + \sigma \int_0^T e^{-a(T-s)}dW_s$$

El último término del lado derecho de la igualdad es una integral estocástica que no tiene solución analítica, entonces, ¿qué hacer para poder simular las trayectorias de la tasa de corto plazo?

Existen varias alternativas: una de ellas es expresar la integral estocástica en términos de mb con el tiempo cambiado, utilizando la técnica conocida como “cambio de reloj” (*change the clock*); otra manera es aplicar una discretización de Euler al proceso original, sin embargo, esto conllevaría a errores de discretización. Pero, mirando con cuidado la expresión obtenida, se observa que el proceso de r_t se distribuye normalmente, por lo tanto, si se logra calcular el valor esperado y la varianza de este proceso se podrá obtener un método para simular sus trayectorias.

- Comencemos con el valor esperado:

Por propiedades de la integral estocástica, su valor esperado es cero, por lo tanto:

$$E[r_T] = r_0 e^{-aT} + b(1 - e^{-aT})$$

Veamos ahora la varianza:

La varianza del proceso de r_t está dada por la varianza de la integral estocástica (llame este término IE), puesto que los otros términos son determinísticos. Por lo tanto:

$$\text{Var}[\text{IE}] = E[\text{IE}^2] - (E[\text{IE}])^2$$

Por propiedades de la integral estocástica, el último término del lado derecho de la igualdad anterior es cero, entonces:

$$\text{var}(r_t) = E \left[\sigma^2 \left(\int_0^T e^{-a(T-s)} dW_s \right)^2 \right] = \sigma^2 E \left[\left(\int_0^T e^{-a(T-s)} dW_s \right)^2 \right] = \sigma^2 E \left[\int_0^T e^{-2a(T-s)} ds \right] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2aT})$$

Note que la última integral se puede resolver gracias a que $(dW_s)^2 = ds$. Por lo tanto r_T es un proceso que se distribuye normalmente con media y varianza conocidas:

$$r_t \sim \left(r_0 e^{-aT} + b(1 - e^{-aT}), \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2aT}) \right)$$

Recuerde que para estandarizar una variable aleatoria normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se procede de la siguiente manera:

$$Z = (X - \mu)/\sigma$$

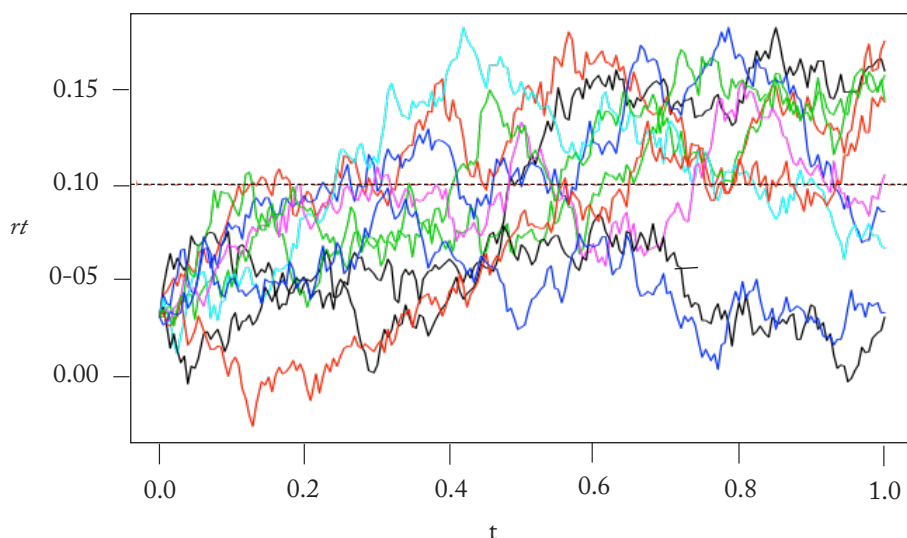
De esta manera se obtiene una variable aleatoria normal estándar Z con media cero y varianza igual a uno. Entonces si $X = \mu + \sigma Z$, tenemos una manera de simular el proceso r_T de la siguiente manera:

$$r_{t+\Delta t} = r_t e^{-a\Delta t} + b(1 - e^{-a\Delta t}) + Z \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a\Delta t})}$$

Donde $Z \sim N(0,1)$.

A continuación se muestra la simulación de diez trayectorias siguiendo la última ecuación.

Trayectorias Vasicek



Como se puede observar en el gráfico, una de las desventajas que posee este modelo es que la tasa de interés puede ser negativa y esto no es deseable.

Notas y comentarios

Entre otros, el MBG asume que los cambios en el logaritmo del precio en intervalos fijos de tiempo se distribuyen normalmente, sin embargo, existe evidencia que rechaza este supuesto, pues, por lo general, estas distribuciones tienen colas más pesadas. Un ejemplo que trata este problema es el texto de Epps (2007), específicamente la sección 8.1. Una solución para este tipo de problemas es usar modelos estructurales y no estructurales con el fin de estimar las Densidades Neutrales al Riesgo (RND, por sus siglas en inglés). Los capítulos 11 y 12 de Jondeu et al. (2007) describen estos modelos. Los autores denominan modelos estructurales aquellos que representan completamente la dinámica del

precio de la acción y, en algunos casos, también el de la volatilidad. Mientras que los modelos no estructurales describen el RND sin referir completamente la dinámica del precio. Los modelos no estructurales se pueden clasificar en i. Paramétricos; ii. Semiparamétricos, y iii. No paramétricos; los paramétricos incluyen por lo general una mezcla de distribuciones, por ejemplo, lognormales, hipergeométricas y beta generalizadas.

Una manera de mejorar el modelo de Vasicek para que la tasa de interés no sea negativa es utilizar un modelo de reversión a la media con raíz cuadrada. Tal modelo para tasas de interés es conocido como el modelo CIR (por las iniciales de sus autores: Cox, Ingersoll y Ross, 1985). Sin embargo, bajo este modelo el proceso de la tasa de interés ya no sigue una distribución normal sino una de prueba chi-cuadrado no centrada.

Otros textos de gran utilidad para el estudio de cálculo estocástico son, por ejemplo: Karatzas y Shreve (1988), Klebaner (1998), Øksendal (2000), Protter (2003), Revuz y Yor (1999), y Williams y Rogers (2000).

BIBLIOGRAFÍA

- Albanese, C. (1997). "Credit exposure, diversification risk and coherent VaR". Preprint, Department of Mathematics, University of Toronto.
- Alexander, C. (2009). *Market Risk Analysis*, Volume IV: *Value at Risk Models*, Wiley.
- Artzner, P.; Delbaen, F., Eber, J. M. y Heath, D. (1999). "Coherent measures of risk". *Mathematical Finance* 9: 203-228.
- Baxter, M. y Rennie, A. (1996). *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge University Press
- Becerra, O. y Melo, L. F. (2008). "Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones". *Borradores de Economía*, No. 489.
- Black, F. y Cox, J. C. (1976). "Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions". *J Finance* 31: 351-367.
- Brealey, R.; Myers, S. y Marcus, A. (2008). *Fundamentals of Corporate Finance*, 6.^a ed. McGraw-Hill e Irwin.
- Breiman, L. (1968). *Probability Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA. (Republished [1991] in *Classics of Mathematics*. SIAM, Philadelphia).
- Brzezniak, Z. y Zastawniak, T. (1999). *Basic Stochastic Processes*. Springer.

- Canavos, G. (1988). *Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos*. McGraw-Hill.
- Cox, J. C.; Ingersoll, Jr., J. E. y Ross, S. A. (1985). "A theory of the term structure of interest rates". *Econometrica* 53, 385-408.
- Cherubini, U.; Luciano, E. y Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. Wiley.
- Danielsson, J.; Embrechts, P., Goodhart, C., Keating, C., Muennich, F., Renault, O. y Shin, H. S. (2001). "An academic response to Basel II", London School of Economics Financial Markets Group, *Special Paper*, No. 130.
- Delbaen, F. y Schachermayer, W. (2006). *The Mathematics of Arbitrage*. Berlin, Springer.
- Dixit, A. y Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.
- Embrechts, P. y Maejima, M. (2002). *Selfsimilar Processes*, Princeton University Press.
- Embrechts, P. y Puccetti, G. (2006). "Aggregating risk capital, with an application to operational risk". *The Geneva Risk and Insurance Review* 31(2): 71-90.
- Embrechts, P.; McNeil, A. J. y Straumann, D. (2002). "Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls". en *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. M. Dempster (ed.), Cambridge University Press: pp. 176-223.
- Epps, T. W. (2007). *Pricing Derivative Securities*. 2.^a ed., World Scientific.
- Föllmer, H. y Schied, A. (2004). *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. 2.^a ed., Walter de Gruyter.

Bibliografia

- Gisiger, N. (2009). "Risk-Neutral Probabilities Explained". Disponible en SSRN: [<http://ssrn.com/abstract=1395390>].
- Harrison, J. M. y Pliska, S. R. (1981). "Martingales and Stochastic integrals in the theory of continuous trading". *Stochastic Processes and their Applications* 11 (3): 215-260.
- Iacus, S. M. (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations With R Examples*, Springer, NY.
- James, P. (2003). *Option Theory*. Wiley.
- Jeanblanc, M.; Yor, M. y Chesney, M. (2009). *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, Londres, UK.
- Jondeau, E.; Poon, S.-H. y Rockinger, M. (2007). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer, New York.
- Jorion, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3.^a ed. McGraw-Hill.
- Karatzas, I. y Shreve, S.E. (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer,
- Klebaner, F. C. (1998). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press.
- Kou, S. (2002). "A jump-diffusion model for option pricing". *Management Science*, 48: 1086-1101.
- Lawler, G. F. (2006). *Introduction to Stochastic Processes*. 2.^a ed. Chapman and Hall, New York.
- Lo, A. W. y MacKinlay, A. C. (1999). *A Non-Random Walk Down Wall Street*. Princeton.
- Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press.

Merton, R. (1976). "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous", *J.*

Financial Economics, 3: 125-144.

McNeil, A. J.; Frey, R. y Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton.

Mikosch, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific.

Nelsen, R. (2006): *An Introduction to Copulas*. Springer, Nueva York.

Nešlehová, J.; Chavez-Demoulin, V. y Embrechts, P. (2006). "Infinite-mean models and the LDA for operational risk". *Journal of Operational Risk*, 1 (1): 3-25.

Øksendal, B. (2000). *Stochastic Differential Equations*, Springer.

Protter, P. (2003). *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer.

Resnick, S. (1992). *Adventures in Stochastic Processes*. Boston. Birkhauser.

Revuz D. y Yor M. (1999). *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer Verlag.

Ross, S.; Westerfield, R. y Jaffe, J. (2008). *Corporate Finance*, 8.^a ed. McGraw-Hill/Irwin.

Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer.

Wiersema, U. (2008). *Brownian Motion Calculus*. Wiley.

Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press.

Williams D. y Rogers, L. (2000). *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, Cambridge University Press.

Colegio de Estudios Superiores de Administración –CESA–
Este libro se terminó de imprimir el 30 de julio de 2013 en Bogotá D.C.

Se compuso en caracteres Adobe Calson Pro de 12 pts.
y se imprimió en papel Bond de 70 gramos

Este libro pretende explicar de manera sencilla las matemáticas financieras modernas a estudiantes sin formación matemática que quieran realizar un postgrado en finanzas cuantitativas. También va dirigido a profesionales que trabajan a diario en un ambiente financiero como analistas cuantitativos y requieren un conocimiento más a fondo de los supuestos de los modelos financieros como el de Black-Scholes

