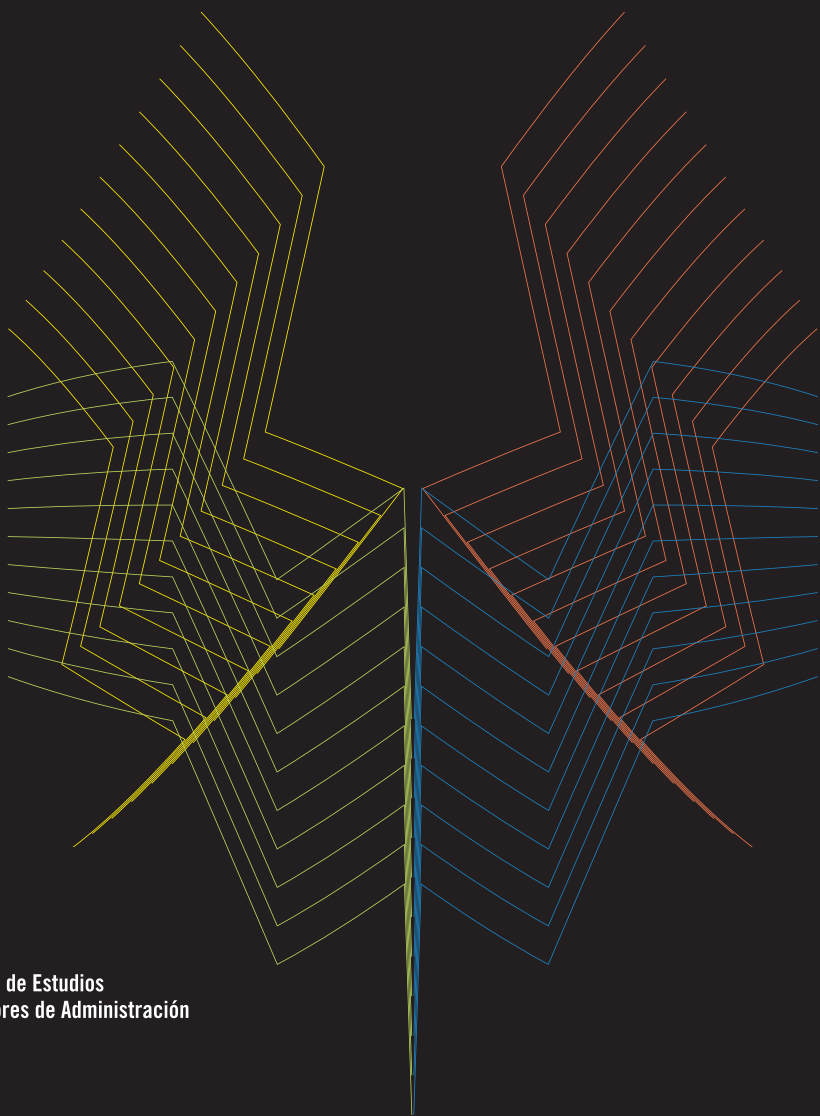


Introducción a la **Programación Lineal**

Alina Fedossova
Oscar Yecid Buitrago Suescún
Rodrigo Alberto Britto Agudelo



Colegio de Estudios
Superiores de Administración

INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Con Aplicaciones en Administración de Operaciones



**Colegio de Estudios
Superiores de Administración**

**INTRODUCCIÓN A LA
PROGRAMACIÓN LINEAL**
Con Aplicaciones en
Administración de Operaciones

—AUTORES—
ALINA FEDOSSOVA
ÓSCAR YECID BUITRAGO SUESCÚN
RODRIGO BRITTO AGUDELO

PRIMERA EDICIÓN, BOGOTÁ, D.C., FEBRERO DE 2011

COORDINACIÓN EDITORIAL: DEPARTAMENTO DE
COMUNICACIONES Y MARKETING CESA
CORRECCIÓN DE ESTILO: JENNY JIMÉNEZ MEDINA
DIAGRAMACIÓN EN $\text{\LaTeX}$: DANIEL CONTRERAS NIÑO
DISEÑO DE CUBIERTA: DIEGO ROMERO
IMPRESIÓN:

© 2011 COLEGIO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE
ADMINISTRACIÓN CESA
© 2011 ALINA FEDOSSOVA, ÓSCAR YECID BUITRAGO
SUESCÚN, RODRIGO BRITTO AGUDELO

ISBN: 978-958-97648-7-9

COMUNICACIONES
CRA. 6 NO. 35-28 CASA LLERAS
COMUNICACIONES@CESA.EDU.CO

TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS.
ESTA OBRA NO PUEDE SER REPRODUCIDA SIN EL PERMISO
PREVIO ESCRITO.

REGISTRO BIBLIOGRÁFICO:

FEDOSSOVA, ALINA; BUITRAGO SUESCÚN, OSCAR YECID; AGUDELO BRITTO, RODRIGO. INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL CON APLICACIONES EN ADMINISTRACIÓN DE OPERACIONES / OSCAR YECID BUITRAGO SUESCÚN, ALINA FEDOSSOVA Y RODRIGO BRITTO AGUDELO. BOGOTÁ: COLEGIO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ADMINISTRACIÓN -CESA- DEPARTAMENTO DE COMUNICACIONES Y MARKETING, 2010. 256P.

DESCRIPTORES:

PROGRAMACIÓN LINEAL / ALGEBRA LINEAL / ADMINISTRACIÓN DE OPERACIONES / MATRICES

ISBN:978-958-97648-7-9

512.5/F294I/2011

Índice general

INTRODUCCIÓN	1
1. CONTEXTO DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL	7
2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS: ALGEBRA LINEAL Y CONVEXIDAD DE CONJUNTOS	11
2.1. VECTORES	11
2.1.1. Operaciones con vectores	12
2.2. MATRICES	15
2.2.1. Operaciones con matrices	16
2.3. CONVEXIDAD DE CONJUNTOS	22
2.3.1. Conjunto convexo	22
2.3.2. Conjuntos poliédricos	27
3. ESTRUCTURA DE LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL Y SOLUCIÓN GRÁFICA	35
3.1. VARIABLES DE HOLGURA Y DE EXCESO	37
3.2. FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL	38
3.3. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL POR EL MÉTODO GRÁFICO	39

3.4.	ANÁLISIS GRÁFICO DE SENSIBILIDAD	46
3.4.1.	Cambios en los términos constantes de las restricciones (lados derechos)	51
4.	MODELAMIENTO DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL	63
4.1.	COMPONENTES DE UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL	65
4.2.	PASOS PARA LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL	66
4.3.	TIPOS DE VARIABLES	67
4.3.1.	Consideraciones sobre la utilización de variables enteras y binarias	68
5.	SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL: EL MÉTODO SIMPLEX	99
5.1.	MULTIPLICADORES DE LAGRANGE	135
5.2.	TABLAS SIMPLEX	136
6.	BÚSQUEDA DE UNA SOLUCIÓN INICIAL	151
6.1.	MÉTODOS DE ELIMINACIÓN DE LAS VARIABLES ARTIFICIALES	152
6.2.	MÉTODO DE LAS DOS FASES	152
7.	DUALIDAD EN PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL	173
7.1.	PRIMAL CON RESTRICCIONES EN FORMA DE DESIGUALDAD	175
7.2.	PRIMAL CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD . .	176
7.3.	CONSIDERACIONES SOBRE DUALIDAD	179
7.4.	CONDICIONES DE ÓPTIMALIDAD DE KARUSH - KUHN - TUCKER, KKT	182
7.5.	INTERPRETACIÓN PRÁCTICA DEL PROBLEMA DUAL	184
8.	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD O POSTÓPTIMO	195

8.1.	CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO	196
8.2.	CAMBIOS EN LOS VALORES DEL LADO DERECHO DE LAS RESTRICCIONES	204
8.3.	REGLA DEL CIEN POR CIENTO	208
9.	SOFTWARE PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL: SOLVER Y GAMS	217
9.1.	SOLVER PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL	218
9.2.	GAMS	231
	ÍNDICE ANALÍTICO	245

INTRODUCCIÓN

La Programación Lineal es tal vez la herramienta más famosa y utilizada de la Investigación de Operaciones. A ella recurren los matemáticos, ingenieros de diferentes disciplinas, economistas, administradores de empresas, estadísticos, veterinarios y en general cualquier profesional que esté involucrado en la toma de decisiones con recursos escasos. Es por ello que en los planes curriculares de diversos programas de formación a nivel de pregrado, especialización, maestría e incluso doctorado, la incluyen directamente como asignatura o como tema en cursos de investigación de operaciones.

No obstante su utilidad y popularidad, la experiencia ha demostrado que los cursos de Programación Lineal son de los que más dificultad causan a los estudiantes y de los que menos entusiasmo despiertan en la mayoría de ellos.

El presente libro surge de la iniciativa de tres profesores que han tenido a su cargo cursos de programación lineal e investigación de operaciones en varias de las mejores Universidades de Colombia: Autónoma de Bucaramanga, Central, Colegio de Estudios Superiores de Administración CESA, de Boyacá, de los Andes, Industrial de Santander, Libre, Nacional de Colombia y Pontificia Javeriana. Los autores de esta obra quieren plasmar su variada experiencia para brindar una alternativa novedosa, tendiente a facilitar a los estudiantes la asimilación de los conceptos de la Programación Lineal y a los profesores facilitarles la labor de enseñanza.

Durante el ejercicio de la actividad académica, los autores han tenido la oportunidad de interactuar con estudiantes de diversas disciplinas, regiones y expectativas. Ello les ha permitido comprobar que aún perteneciendo a disciplinas afines y con condiciones similares, los intereses y motivaciones de cada individuo son diferentes, mucho más si los programas académicos son diferentes. Por supuesto que no debe darse el mismo enfoque para un curso de Programación Lineal en Ingeniería que para uno de Administración o de Matemáticas; no obstante, los autores consideran que una división muy marcada por disciplinas llega a ser nociva para la asimilación de los conceptos que debe tener un estudiante que curse una asignatura de Programación Lineal.

Teniendo en cuenta las dificultades que han percibido en los estudiantes que han pasado por sus cursos y los criterios deseables en un texto guía, se llegó a:

- Se deben proporcionar al estudiante varias alternativas para que pueda asimilar los conceptos. Presentarlos desde diferentes enfoques.
- El estudiante debe tener la opción de elegir un nivel basal mínimo que le permita adquirir las competencias necesarias para saber y aplicar satisfactoriamente los conceptos de la Programación Lineal, pero también debe tener la opción de profundizar cuanto quiera por encima de ese mínimo.
- Hacer énfasis en la modelación y formulación de problemas, puesto que este aspecto es estadísticamente dificultoso para los estudiantes y es de gran importancia para poder entender y aplicar los conceptos posteriores.
- Ser atractivo para un estudiante que guste del rigor matemático pero también a alguien pragmático.
- No ser mecanicista ni memorístico.
- Enseñar varias alternativas de software para la solución de problemas de Programación Lineal.

Al revisar los libros disponibles en el mercado nos encontramos con unos bastante buenos, pero no obstante su calidad están diferenciados

de acuerdo a la disciplina y ninguno de ellos cumple plenamente las características arriba mencionadas. Es por ello que se decidió escribir este libro de Programación Lineal.

En los diferentes capítulos se presentan los conceptos desde varios enfoques, de acuerdo a los intereses del estudiante o del profesor, sin perder la claridad conceptual. Por ejemplo, un estudiante decide si estudia el método simplex de forma matricial o en forma de tablas, pero en ambos casos debe saber cómo se calcula un costo reducido, qué significa y cómo se interpreta.

Para el capítulo de formulación de problemas de Programación Lineal se han recogido las observaciones y dificultades más comunes que tienen los estudiantes, cuando se enfrentan por primera vez a plasmar en lenguaje matemático una situación real.

Otro aspecto de interés es que los ejemplos de aplicación y los ejercicios propuestos se han enmarcado en el contexto nacional haciéndolos más familiares para el estudiante. Así mismo, se han incluido gráficas y tablas elaboradas por los autores para ilustrar la aplicación de métodos, resumir conceptos y enseñar el manejo del software especializado.

Esperamos que este libro sea de utilidad para todas aquellas personas que lleguen a tenerlo en sus manos y agradecemos profundamente los comentarios, críticas y sugerencias que nos permitan mejorarlo.

Atentamente,

Los autores.

LOS AUTORES



Alina Fedosova

Matemática de la Universidad Estatal de Moscú Lomonosov. PhD en Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú, Lomonosov. Uno de sus trabajos de investigación fue reconocido por Colciencias como uno de los mejores que ha financiado esta institución en los últimos 15 años. Actualmente es profesora asociada del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia.

e-mail: afedosova@unal.edu.co



Óscar Yecid Buitrago Suescún

Ingeniero Químico de la Universidad Nacional de Colombia. Magíster en Ingeniería Industrial en la Universidad de los Andes. Ha sido catedrático del Colegio de Estudios Superiores en Administración, -CESA-, en el área de administración de operaciones y del pregrado y maestría en Ingeniería Industrial de la Pontificia Universidad Javeriana.

Estuvo vinculado como profesor investigador en la Universidad de Boyacá, donde ganó el premio al Merito Investigativo en dos ocasiones; en la Universidad Central y en la Universidad Libre de Colombia.

Actualmente se desempeña como profesor de tiempo completo del programa de Ingeniería Industrial en la Universidad de La Salle en la ciudad de Bogotá D.C.

e-mail: oybuitrago@unisalle.edu.co



Rodrigo Alberto Britto Agudelo

Ingeniero Químico de la Universidad Nacional de Colombia. Magíster en Ingeniería Industrial en la Universidad de los Andes. Candidato a PhD en Logística en la Universidad de Maryland, Estados Unidos.

Se encuentra vinculado como profesor de Operaciones y Logística de la Facultad de Administración de Empresas de la Universidad de los Andes.

e-mail: ro-britt@uniandes.edu.co

CAPÍTULO 1

CONTEXTO DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La Programación Lineal es una rama de la investigación de operaciones que estudia la optimización de una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones, también lineales.

Su origen no es del todo claro ya que el contexto de la Guerra Fría dificultó la difusión de los trabajos provenientes de la Unión Soviética. A pesar de estas circunstancias, los pioneros en este campo son el matemático soviético Leonid Kantorovich y el estadounidense George B. Dantzig.

Kantorovich, antes de la Segunda Guerra mundial, fue una autoridad muy conocida en diversas áreas de las matemáticas, especialmente por ser uno de los creadores de la escuela de análisis funcional. Él fue responsable de conectar los conceptos de Programación Lineal con el análisis funcional.

Kantorovich inicio un área de estudio que no tuvo el debido seguimiento e interés: el uso de Programación Lineal como método de la solución aproximada de los problemas físico-matemáticos. En 1939 planteó y solucionó un problema con estructura de Programación Lineal, pero su trabajo se difundió solo en 1959 [1].

Por su parte, George Dantzig, hijo del también matemático ruso Tobias Dantzig, nació en Oregon Estados Unidos, es reconocido co-

mo el más famoso exponente de la Programación Lineal. En el año 1947, durante la Segunda Guerra mundial, mientras trabajaba para el pentágono, estructuró un problema de Programación Lineal para el entrenamiento, planeamiento y suministro de la fuerza aérea de los Estados Unidos [2].

Sin embargo, Dantzig es tal vez más conocido por ser el creador del procedimiento más famoso para resolver problemas de Programación Lineal, **el método simplex**, publicado en 1949 y que se detalla en el capítulo 5. Este método fue la principal herramienta para solucionar problemas de Programación Lineal, hasta cuando Khachiyan en 1980 propuso un algoritmo elipsoidal de solución [3]. Este algoritmo tiene bases teóricas muy interesantes pero infortunadamente su implementación práctica no fue muy eficiente.

No obstante, el trabajo de Khachiyan fue tomado como base para que Karmarkar en 1984 propusiera su algoritmo elipsoidal de punto interior [4], el cual resultó ser muy eficiente computacionalmente y de gran aplicabilidad para solucionar problemas de tamaño considerable. AT&T patentó el algoritmo de Karmarkar suscitando una gran polémica en el medio académico.

Después del algoritmo de punto interior de Karmarkar se han propuesto nuevos métodos de solución, como el del corrector primal dual [5] y el de Zhao [6].

Retomando a Dantzig, existe una anécdota que cuenta que en una presentación para la sociedad de econometría en 1948, él exponía su trabajo “Programming in a Linear Structure” y Harold Hotelling objetó que “el mundo no es lineal”, John Von Neumann, quien moderaba la sesión, defendió el trabajo de Dantzig argumentando que es aplicable en las situaciones en las que se cumplan los axiomas del modelo [2].

La respuesta de Von Neumann es bastante ilustrativa y aplica para cualquier modelo. Si se satisfacen los supuestos en que se basa el modelo es aplicable, de lo contrario no; y quien hace uso de la herramienta tiene la responsabilidad de verificar si los supuestos se cumplen.

A pesar de que el mundo es no lineal, afortunadamente existen muchas aplicaciones en las que se puede aplicar la Programación Lineal, la cual sigue siendo una herramienta bastante útil en nuestros días. Algunas de las más conocidas son:

- Problemas de mezcla: definición de la dieta y los requerimientos nutricionales.
- Finanzas: Portafolio óptimo de inversión y asignación de presupuesto
- Mercadeo: Mezcla óptima de publicidad.
- Producción: planeación de la producción, programación de producción y turnos.

En la práctica la aplicación de la Programación Lineal requiere una gran cantidad de esfuerzo que no está asociado directamente con la solución del modelo, sino con la determinación de los valores que tomarán los parámetros. Ello requiere la recolección y análisis de una gran cantidad de datos confiables. Por ejemplo, una de las compañías más importantes de Colombia, para la planeación de sus operaciones, corre un programa que maneja 211.000 variables y 130.000 restricciones. Adicionalmente se requiere la recopilación de información asociada a los coeficientes necesarios en el modelo.

En la actualidad los trabajos de investigación en Programación Lineal se enfocan en la introducción de variabilidad en el planteamiento y solución de los problemas, por ejemplo la propuesta de Guan y Fang [7], el trabajo de Van Hop [8] sobre “programación lineal difusa” y el de Malek y Yar [9] sobre interacción de Programación Lineal con inteligencia artificial.

Las aplicaciones que se han hecho de la Programación Lineal son tan diversas como interesantes. Recientemente son muy llamativos los trabajos en medicina de Zhang, Shi y Gao [10] y en ingeniería industrial de Kiliç Y Güngör [11].

Referencias bibliográficas

[1] BAZARAA, Mokhtar. JARVIS Jhon & SHERALI, Hanif. *Programación lineal y flujo en redes*. 2 ed en español, Limusa, México. 1998.

[2] COTTLE, Richard W. “George B. Dantzig: a legendary life in mathematical programming”. *Mathematical Programming*. Vol. 105, Number 1. 2006. pp 1-8.

[3] KHACHIYAN, Leonid. “On the exact solution of systems of linear inequalities and linear programming problems”. *URSS Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Vol. 22, Issue 4. 1982. pp 239-242.

[4] KARMARKAR, N. “New Polynomial-Time algorithm for linear programming”. *Combinatorica*. Vol. 4, Issue 4. 1984. pp 373-395.

[5] CARTIS, Coralia. “Some disadvantages of a Mehrotra-type primal-dual corrector interior point algorithm for linear programming”. *Applied Numerical Mathematics*. Vol. 59, 2009. 1110-1119 pp

[6] ZHAO, Y.B. “Enlarging neighborhoods of interior-point algorithms for linear programming via least values of proximity measure functions”. *Applied Numerical Mathematics*. Vol. 57, 2007. 1033-1049 pp.

[7] S. GUAN, S. FANG, C. “Linear Programming with Stochastic Elements: An On-Line Approach”. *Computers Math. Applic.* Vol. 33, No. 9. 1997. pp. 61-82

[8] Van Hop, Nguyen. “Solving linear programming problems under fuzziness and randomness environment using attainment values”. *Information Sciences*. Vol. 177. 2007. 2971-2984 pp

[9] MALEK, A. YAR, “Primal-dual solution for the linear programming problems using neural networks”. *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 167, 2005. 198-211 pp

[10] ZHANG, Zhiwang. SHI, Yong, GAO, Guangxia “A rough set-based multiple criteria linear programming approach for the medical diagnosis and prognosis”. *Expert Systems with Applications*. Vol. 36, 2009. 8932-8937 pp.

[11] KILIÇ DELICE, Elif. GÜNGÖR, Zülal. “A new mixed integer linear programming model for product development using quality function deployment”. *Computers & Industrial Engineering*. Vol. 57, 2009. 906-912 pp.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS: ALGEBRA LINEAL Y CONVEXIDAD DE CONJUNTOS

En este capítulo se ofrece un repaso de los conceptos fundamentales del álgebra lineal y convexidad de conjuntos, que el lector debe tener para poder avanzar más fácil en el estudio de la Programación Lineal y entender sus fundamentos. Quienes hayan tomado cursos de álgebra lineal pueden omitir el capítulo o centrarse en los aspectos relacionados con la convexidad de conjuntos.

También se incluyen secciones en las que se muestra cómo realizar la multiplicación e inversión de matrices en Excel.

2.1. VECTORES

Un vector de dimensión n es un arreglo de n números que se escriben en una fila o en una columna. Gráficamente se puede simbolizar mediante un punto o por medio de una flecha con cola en el origen y cabeza en el punto.

Ejemplo:

$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$ es un vector columna de dimensión $n = 3$

$(1 \ 0 \ -5 \ 9 \ 13)$ es un vector fila de dimensión $n = 5$

$(0 \ 0 \ 0)$ es un vector cero de dimensión $n=3$. En general el vector cero de dimensión n , tiene un cero en cada una de sus componentes. Puede ser fila o columna y se simboliza $\mathbf{0}$.

$\mathbf{e}_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i -ésimo vector unitario. En la i -ésima posición tiene un 1 y en las demás 0.

$(1 \ 1 \ 1 \ 1)$ es un vector suma de dimensión $n = 4$. Todas las componentes son 1.

2.1.1. Operaciones con vectores

Suma

Solo se pueden sumar vectores de la misma dimensión. El vector resultante tiene en cada componente la suma de las respectivas componentes de los vectores adicionados. La suma de los vectores $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ y $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ es:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (v_1 + u_1 \ v_2 + u_2 \ \dots \ v_n + u_n)$$

Multiplicación de un vector por un escalar

Dado un vector $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$, se puede multiplicar por un escalar k . El vector resultante es cada una de las componentes del vector original multiplicada por k .

$$(kv_1 \ kv_2 \ \dots \ kv_n)$$

En esta operación es importante observar la dirección del vector $k\mathbf{v}$, si k es positivo entonces $k\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma dirección. Si k es negativo $k\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas.

Producto punto

A esta operación también se le conoce como producto escalar o producto interior. Se puede realizar entre dos vectores de la misma dimensión. El resultado es un escalar definido de la siguiente forma:

Sean los vectores $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ y $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ entonces:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1u_1 + v_1u_1 + \dots + v_iu_i + \dots + v_nu_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_iu_i$$

Norma euclidea de un vector

Es una medida de la magnitud o tamaño del vector. Para obtenerla se toma el producto punto del vector consigo mismo y se extrae la raíz cuadrada. Se simboliza $\|\mathbf{v}\|$.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_i^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} v_i^2}$$

Espacio euclidiano de dimensión n , E^n

Es el conjunto de todos los vectores de dimensión n .

Combinación lineal

Dado un conjunto de vectores $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_k$ en E^n , su combinación lineal está definida por $\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i \mathbf{a}_i$, donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Combinación lineal afín

Es una combinación lineal que cumple la condición adicional

$$\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i = 1.$$

Subespacios lineales

Se simboliza por S_L . Es un subconjunto de E^n tal que toda combinación lineal entre pares de vectores que pertenecen a S_L también pertenece a S_L .

Subespacios lineales afines S_A

Subconjunto de E^n tal que toda combinación lineal entre pares de vectores que pertenecen a S_A también pertenece a S_A .

Vectores linealmente independientes

Un conjunto de vectores $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_k$ de dimensión n son linealmente independientes si cumplir la condición $\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i \mathbf{a}_i = 0$ implica que $\lambda_i = 0 \forall i$.

Si existen valores de $\lambda_i \neq 0$ que hacen cumplir la condición indicada, entonces se dice que el conjunto de vectores es linealmente dependiente.

Conjunto generador

Un conjunto de vectores $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_k$ de dimensión n genera a E^n si cualquier vector $\mathbf{b}$ en E^n se puede representar como una combinación lineal de $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_k$.

Base de E^n

Un conjunto de vectores $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_k$ de dimensión n genera a E^n si:

- $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_k$ generan a E^n .
- Quitando alguno de los vectores no se puede generar E^n .

Para tener una base de E^n se necesitan n vectores linealmente independientes, es decir, que la dimensión de la base siempre es n . Sin embargo la base de E^n no es única (¿por qué?)

2.2. MATRICES

Las matrices son arreglos rectangulares de números. La matriz está caracterizada por el número de filas y de columnas que la conforman. Si la matriz tiene m filas y n columnas, entonces su dimensión es $m \times n$ (m por n). Se simbolizarán con letras mayúsculas en negrilla $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$.

También se puede considerar una matriz como un arreglo de vectores, por ejemplo: m vectores fila de dimensión n , o n vectores columna de dimensión m . Por ello, todo vector es una matriz.

A continuación se muestra una matriz de m filas y n columnas.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,i} & a_{3,i+1} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m,i} & a_{m,i+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Algunas observaciones importantes sobre matrices:

- Si una matriz tiene todos sus elementos iguales a cero, se conoce como **matriz cero**.
- Una matriz cuadrada ($n \times n$) que tiene los elementos ubicados en la diagonal iguales a uno y en las demás posiciones ceros, se denomina **matriz identidad** y se simboliza $\mathbf{I}$.

- Una matriz cuadrada ($n \times n$) es **triangular superior** si todos los elementos por debajo de la diagonal son ceros. Por otra parte, si todos los elementos por encima de la diagonal son ceros se tiene una matriz **triangular inferior**.

2.2.1. Operaciones con matrices

Suma de matrices

Dos matrices de la misma dimensión se pueden sumar componente a componente. Los componentes c_{ij} de la matriz $C = A + B$ (de $m \times n$) son:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Multiplicación por un escalar

Si la matriz $\mathbf{A}$ de $(m \times n)$ se multiplica por un escalar k , se obtiene la matriz $k\mathbf{A}$ de $(m \times n)$ con elemento $ij := ka_{ij}$.

Transposición de matrices

Cuando la j -ésima columna de una matriz $\mathbf{A}$ de $m \times n$ se toma como la j -ésima fila se obtiene la matriz $\mathbf{A}^T$ de $n \times m$, que se denomina matriz transpuesta de $\mathbf{A}$. De manera formal, el elemento a_{ji} de la matriz $\mathbf{A}$ ($m \times n$) es el elemento ij de $\mathbf{A}^T$.

En la transposición de matrices se cumple:

- Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es simétrica si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.
- Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es antisimétrica si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.
- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de $m \times n$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.
Si el producto $\mathbf{AB}$ está definido, entonces $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

Multiplicación de matrices

Dos matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de la matriz ubicada al lado izquierdo es igual al número de filas de la matriz ubicada al lado derecho. La operación solo es posible si el número de columnas de **A** es igual al número de filas de **B**.

Sea **A** una matriz de $m \times n$ y **B** una matriz de $n \times p$. El producto **AB** representado en la matriz **C** tiene dimensión $m \times p$. Su elemento c_{ij} es el producto punto de la i -ésima fila de **A** con la j -ésima columna de **B**, es decir:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad \text{y} \quad j = 1, 2, \dots, p$$

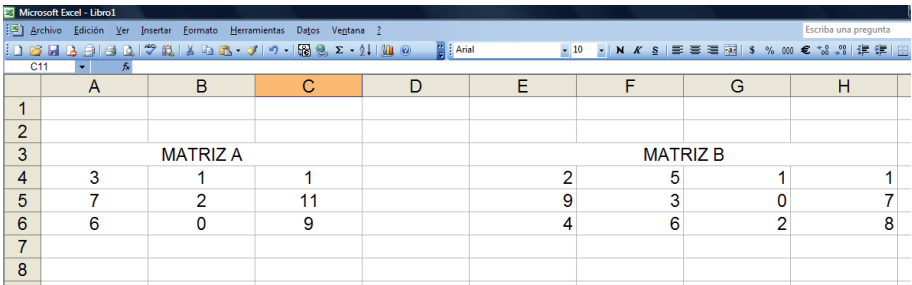
Obsérvese que en la multiplicación de matrices importa el orden en que se efectúe la operación (¿por qué?) Y aunque los productos **AB** y **BA**, eventualmente, se puedan obtener, no necesariamente son iguales.

Multiplicación de matrices con Excel

Para este efecto se utiliza el comando *mmult* y el procedimiento es similar al de inversión de matrices. Se quiere multiplicar $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$,

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 11 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, se siguen los siguientes pasos:

- Escribir las matrices a multiplicar.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4	3	1	1			2	5	1
5	7	2	11			9	3	0
6	6	0	9			4	6	2
7								
8								

Figura 2.1: Escritura de matrices en Excel.

- Definir el área donde se desea, aparezca la matriz $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, verificando que la operación sea factible. En este ejemplo se está multiplicando una matriz de 3×3 con una de 3×4 , por lo tanto el resultado es una matriz de 3×4 .
- En la primera celda del área definida escribir *mmult* (seleccionar matriz **A**, seleccionar matriz **B**). Las matrices seleccionadas se separan con una coma, o punto y coma, de acuerdo con la configuración.

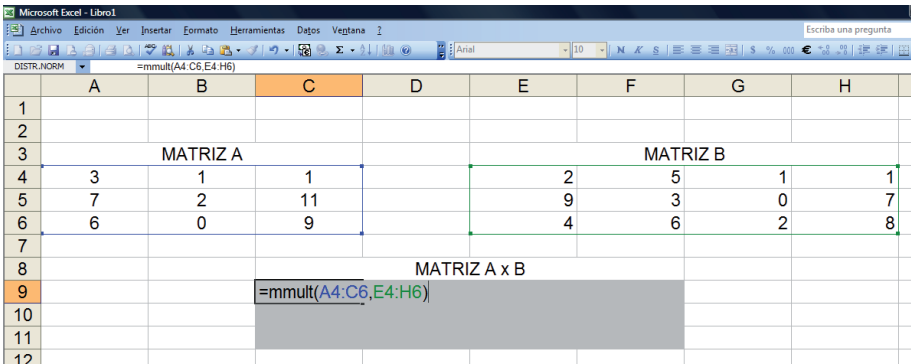


Figura 2.2: Utilización de función *mmult* en Excel

- Dar enter, aparecerá el primer término del producto, seleccionar el área reservada para $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y presionar F2.

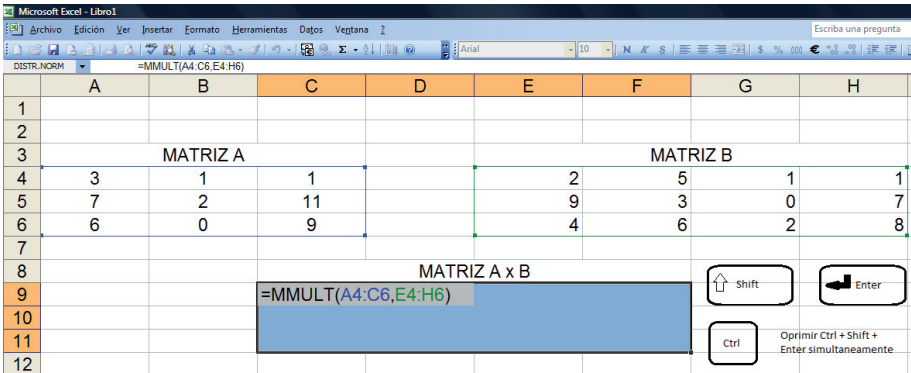


Figura 2.3: Paso final en la multiplicación de matrices en Excel

- Presionar simultáneamente las teclas ctrl, shift y enter. Aparecerá la matriz solicitada.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	MATRIZ A					MATRIZ B		
4	3	1	1			2	5	1
5	7	2	11			9	3	0
6	6	0	9			4	6	2
7								
8				MATRIZ A x B				
9			19	24	5	18		
10			76	107	29	109		
11			48	84	24	78		
12								

Figura 2.4: Resultado de la multiplicación de las matrices del ejemplo

Inversión de matrices

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de $n \times n$. Si existe una matriz $\mathbf{B}$ de $n \times n$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, entonces a $\mathbf{B}$ se le llama matriz inversa de $\mathbf{A}$ y se simboliza con $\mathbf{B}^{-1}$.

Las matrices cuadradas que tienen inversa se denominan *no singulares*. Si no tienen inversa entonces son matrices *singulares*.

La condición para la existencia de la inversa es que las filas (o las columnas) de la matriz sean linealmente independientes.

Con respecto a la inversión de matrices se cumple:

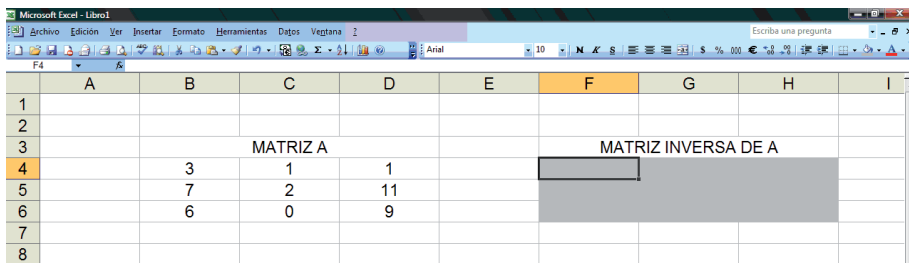
- Si $\mathbf{A}$ tiene inversa, entonces $\mathbf{A}^T$ también y $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
- Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices invertibles de $m \times n$, entonces $\mathbf{AB}$ es invertible y $\mathbf{AB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
- Una matriz triangular con elementos diagonales diferentes a cero tiene inversa.

Inversión de matrices con Excel

La inversión de matrices en Excel se realiza utilizando el comando =MINVERSA. Por ejemplo, si se quiere hallar la inversa de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 11 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ se procede así:}$$

- Escribir la matriz en la hoja de cálculo.
- Determinar las celdas en las que se escribirá la matriz inversa. En la hoja de cálculo mostrada se hará la selección en las celdas que van desde la F4 hasta la H7.



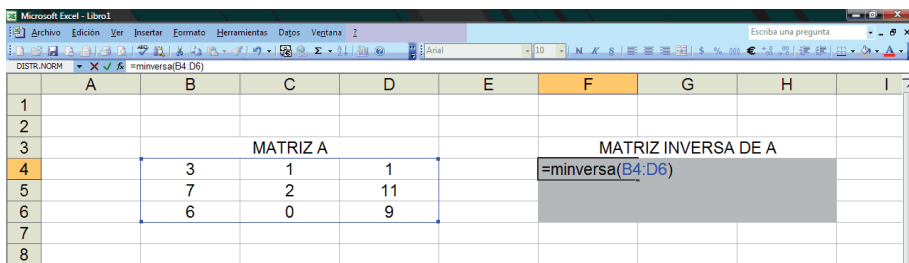
The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4		3	1	1					
5		7	2	11					
6		6	0	9					
7									
8									

Matrix A is located in cells B4:D6. The area F4:H7 is selected and labeled "MATRIZ INVERSA DE A".

Figura 2.5: Selección del área donde aparecerá la matriz inversa solicitada

- En la primera celda donde se ubicará la matriz inversa (F4 en este caso) se escribe =minversa (selección de la matriz a invertir).



The screenshot shows the same Excel spreadsheet as Figure 2.5, but with the formula =minversa(B4:D6) entered in cell F4. The formula bar at the top shows "=minversa(B4:D6)".

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3									
4		3	1	1		=minversa(B4:D6)			
5		7	2	11					
6		6	0	9					
7									
8									

Figura 2.6: Función minversa de Excel

- Se da enter (aparecerá el primer término de la matriz inversa), se selecciona toda el área designada para la matriz inversa y se presiona la tecla F2.

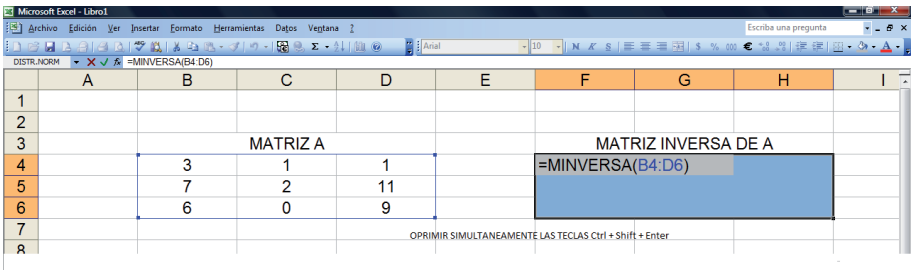


Figura 2.7: Función minversa de Excel

- Por último, se presiona simultáneamente ctrl, shift y enter. En la zona seleccionada aparecerá la matriz inversa.

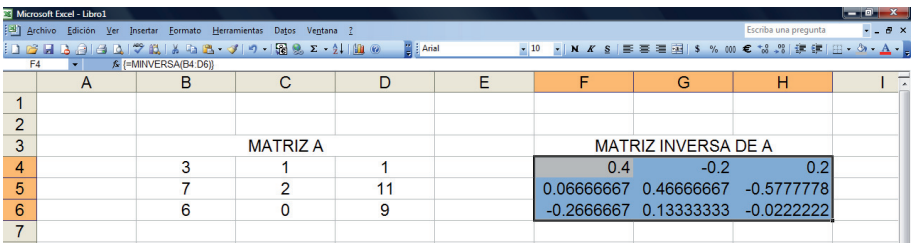


Figura 2.8: Matriz inversa del ejemplo

Rango de una matriz

Sea **A** una matriz de $m \times n$.

- El rango por fila de la matriz es el máximo número de filas linealmente independientes.
- El rango por columna de la matriz es el máximo número de columnas linealmente independientes.
- El rango por fila siempre es igual al rango por columna.

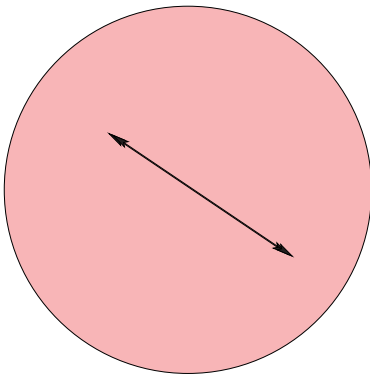
- Rango de $\mathbf{A} \leq \text{mínimo}(m, n)$.
- Si rango de $\mathbf{A} = \text{mínimo}(m, n)$, se dice que $\mathbf{A}$ es de rango completo.

2.3. CONVEXIDAD DE CONJUNTOS

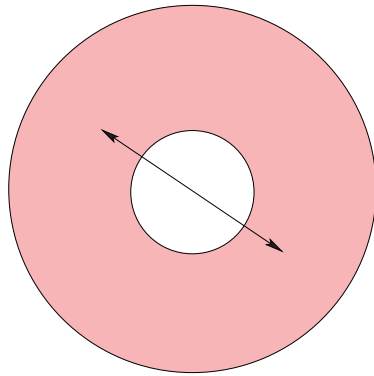
2.3.1. Conjunto convexo

Se dice que un conjunto $\mathbf{X}$ en E^n es convexo si dados dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{X}$ y $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$, entonces la combinación $\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda\mathbf{x}_2) \in \mathbf{X} \forall \lambda \in [0, 1]$. Puesto que $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda\mathbf{x}_2)$ se conoce como combinación convexa o promedio ponderado de $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

Para el caso de E^2 y E^3 se puede hacer una interpretación gráfica. El punto $\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda\mathbf{x}_2)$ se encuentra ubicado entre la recta que une $\mathbf{x}_1$ con $\mathbf{x}_2$ y el conjunto $\mathbf{X}$ es convexo si para cualquier par de puntos la recta que los une también pertenece a $\mathbf{X}$.



Conjunto convexo



Conjunto no convexo

Figura 2.9: Ejemplo de conjuntos convexos y no convexos en E^2

Para demostrar que un conjunto no es convexo es suficiente encontrar al menos una pareja de puntos cuya combinación convexa no está dentro del conjunto. Por otra parte, aunque es evidente que el interior del círculo mostrado en la figura 2.9 es un conjunto convexo, el gráfico no es una demostración de ello.

La convexidad del conjunto mostrado en la figura 2.9 se demuestra analíticamente, teniendo en cuenta que es un círculo con ecuación general $\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 \leq r$.

Definiendo en E^2 el conjunto $\mathbf{C} = \{\mathbf{x} | x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$. Téngase en cuenta que en E^2 un punto está representado por dos componentes; $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Si $\mathbf{C}$ es un conjunto convexo, entonces dados dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}_a = \begin{pmatrix} x_{a1} \\ x_{a2} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}_b = \begin{pmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \end{pmatrix}$ que pertenezcan a $\mathbf{C}$, se debe cumplir que el punto:

$$\lambda \mathbf{x}_a + (1 - \lambda) \mathbf{x}_b \in \mathbf{C}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_{a1} \\ x_{a2} \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \end{pmatrix} \in \mathbf{C} \implies \begin{pmatrix} \lambda x_{a1} + (1 - \lambda) x_{b1} \\ \lambda x_{a2} + (1 - \lambda) x_{b2} \end{pmatrix} \in \mathbf{C}$$

Para que esto sea cierto se debe satisfacer:

$$(\lambda x_{a1} + (1 - \lambda) x_{b1})^2 + (\lambda x_{a2} + (1 - \lambda) x_{b2})^2 \leq r$$

$$\lambda^2 x_{a1}^2 + 2\lambda(1 - \lambda)x_{a1}x_{b1} + (1 - \lambda)^2 x_{b1}^2 + \lambda^2 x_{a2}^2 + 2\lambda(1 - \lambda)x_{a2}x_{b2} + (1 - \lambda)^2 x_{b2}^2 \leq r$$

$$\lambda^2 (x_{a1}^2 + x_{a2}^2) + 2\lambda(1 - \lambda)x_{a1}x_{b1} + x_{b1}^2 - 2\lambda x_{b1}^2 + \lambda^2 x_{b1}^2 + 2\lambda(1 - \lambda)x_{a2}x_{b2} + x_{b2}^2 - 2\lambda x_{b2}^2 + \lambda^2 x_{b2}^2 \leq r$$

$$\lambda^2 (x_{a1}^2 + x_{a2}^2) + \lambda^2 (x_{b1}^2 + x_{b2}^2) + 2\lambda(1 - \lambda)(x_{a1}x_{b1} + x_{a2}x_{b2}) + (x_{b1}^2 + x_{b2}^2) - 2\lambda(x_{b1}^2 + x_{b2}^2) \leq r$$

Pero $(x_{a1}x_{b1} + x_{a2}x_{b2})$ es el producto punto de $\mathbf{x}_a$ y $\mathbf{x}_b$, que máximo puede valer r .

Entonces:

$$\begin{aligned} \lambda^2 r + \lambda^2 r + 2\lambda(1 - \lambda)r + r - 2\lambda r &\leq r \\ r(2\lambda^2 + 2\lambda - 2\lambda^2 - 2\lambda + 1) &\leq r \\ r &\leq r \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

La importancia de los conjuntos convexos en el contexto de la Programación Lineal está explicada por el hecho de que los conjuntos:

- $\{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{b}$ un vector de $m \times 1$
- $\{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{b}$ un vector de $m \times 1$
- $\{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{b}$ un vector de $m \times 1$

son convexos y son parte de la estructura de los problemas de Programación Lineal, como se verá en capítulos posteriores.

Puntos extremos de un conjunto convexo

Sea $\mathbf{X}$ un conjunto convexo. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ es extremo si no se puede representar como una combinación lineal convexa estricta ($\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$) de dos puntos distintos en $\mathbf{X}$.

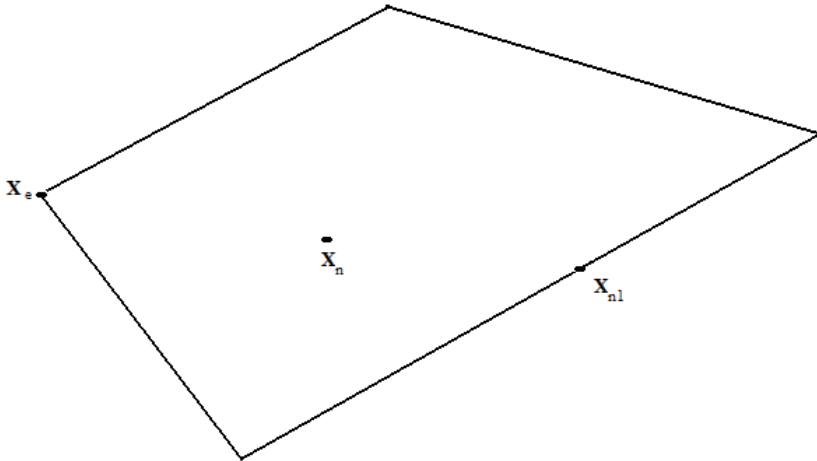


Figura 2.10: Puntos extremos y no extremos de un conjunto convexo

En la figura 2.10, es $\mathbf{x}_e$ un punto extremo, en tanto que $\mathbf{x}_n$ y $\mathbf{x}_{n1}$ son puntos no extremos.

Hiperplanos

Un hiperplano H en el espacio n -dimensional E^n es un conjunto de forma:

$$\{\mathbf{x} | \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = k\}$$

Donde $\mathbf{p}$ es un vector diferente de cero, denominado normal o gradiente del hiperplano, y k un escalar. Si se toma como referencia un punto $\mathbf{x}_0 \in H$, se puede eliminar la constante k y el hiperplano se representa como $\{\mathbf{x} | \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0\}$.

En E^2 un hiperplano es una recta y en las demás dimensiones la generalización de esta.

Semiespacio

Al definir un hiperplano H en un espacio E^n , este queda dividido en dos regiones denominadas semiespacios:

- $\{\mathbf{x} | \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \geq k\}$
- $\{\mathbf{x} | \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq k\}$

Donde $\mathbf{p}$ es un vector diferente de cero y k un escalar.

Al hacer referencia a un punto fijo $\mathbf{x}_0 \in H$, los semiespacios se representan como $\{\mathbf{x} | \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq 0\}$ y $\{\mathbf{x} | \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 0\}$.

Rayo

Es un conjunto convexo de forma $\{\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d} | \lambda \geq 0\}$ donde $\mathbf{d} \neq 0$. $\mathbf{x}_0$ es el origen del rayo y $\mathbf{d}$ es la dirección.

El concepto de rayo es importante porque permite definir direcciones en los *conjuntos* convexos no acotados.

Un vector $\mathbf{d} \neq 0$ es una dirección del conjunto convexo $\mathbf{X}$, si para todo el rayo $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$. Si la dirección $\mathbf{d} \neq 0$ no se puede representar como una combinación lineal positiva de otras dos direcciones extremas del conjunto, entonces se dice que $\mathbf{d}$ es una *dirección extrema* de $\mathbf{X}$.

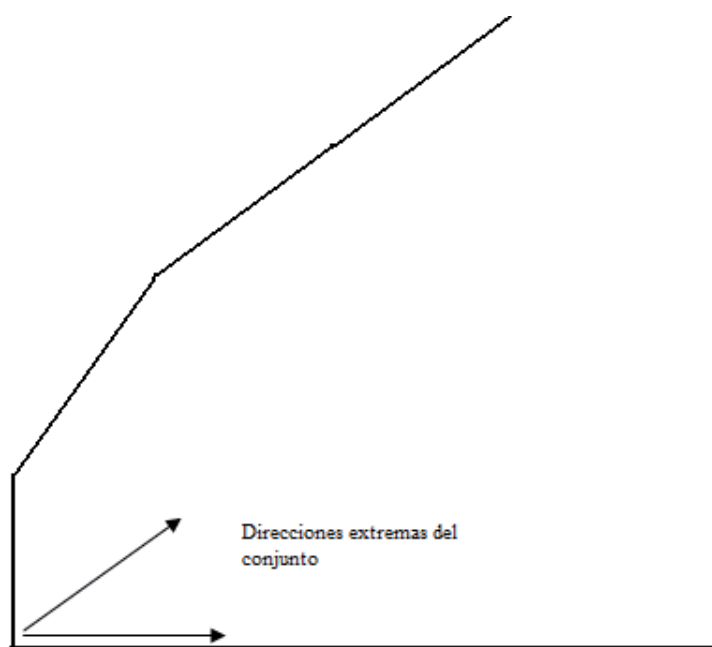


Figura 2.11: Direcciones extremas de un conjunto convexo no acotado

Conos convexos

Es un conjunto convexo $\mathbf{C}$ que cumple la propiedad adicional de que para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ el punto $\lambda \mathbf{x} \in \mathbf{C} \forall \lambda \geq 0$. Dada esta definición, un cono convexo siempre contiene al origen y para definirlo simplemente se necesitan sus direcciones extremas.

Con un conjunto de vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, siempre se puede generar un cono convexo con las combinaciones lineales no negativas de estos, es decir:

$$\mathbf{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i \mathbf{a}_i : \lambda_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, k \right\}$$

2.3.2. Conjuntos poliédricos

La intersección de un número finito de semiespacios se denomina *poliedro*, el cual puede ser abierto o acotado. En este último caso se conoce como *politopo*.

Los poliedros son una clase especial de conjuntos convexos y su importancia radica en que, dada su definición, se pueden representar de la forma $\{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$, $\mathbf{x}$ un vector de n componentes y $\mathbf{b}$ un vector de m componentes.

Si los hiperplanos de los semiespacios que se intersectan para formar el poliedro pasan por el origen, al conjunto poliédrico se le denomina *cono poliédrico* y tiene la forma:

$$\{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}\}$$

En el contexto de la Programación Lineal la razón por la que es importante el estudio de los conjuntos convexos se debe a los poliedros, puesto que las restricciones de un problema de Programación Lineal definen un poliedro.

Representación de conjuntos poliédricos y teorema de representación

Para representar un politopo solo se necesitan los puntos extremos, debido a que cualquier punto del conjunto se puede representar en función de estos.

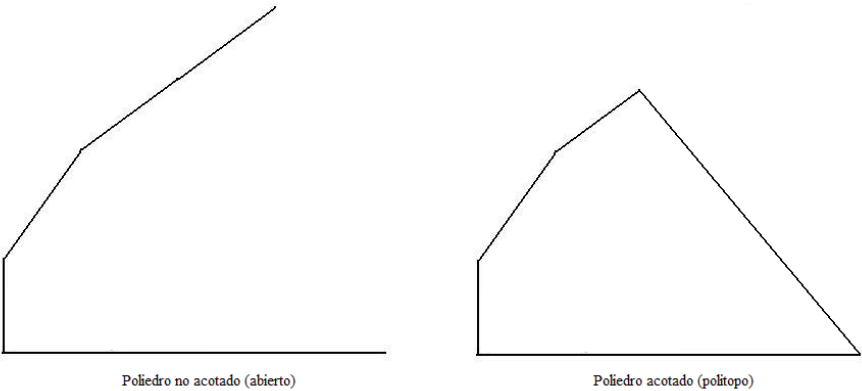


Figura 2.12: Poliedros acotado y no acotado

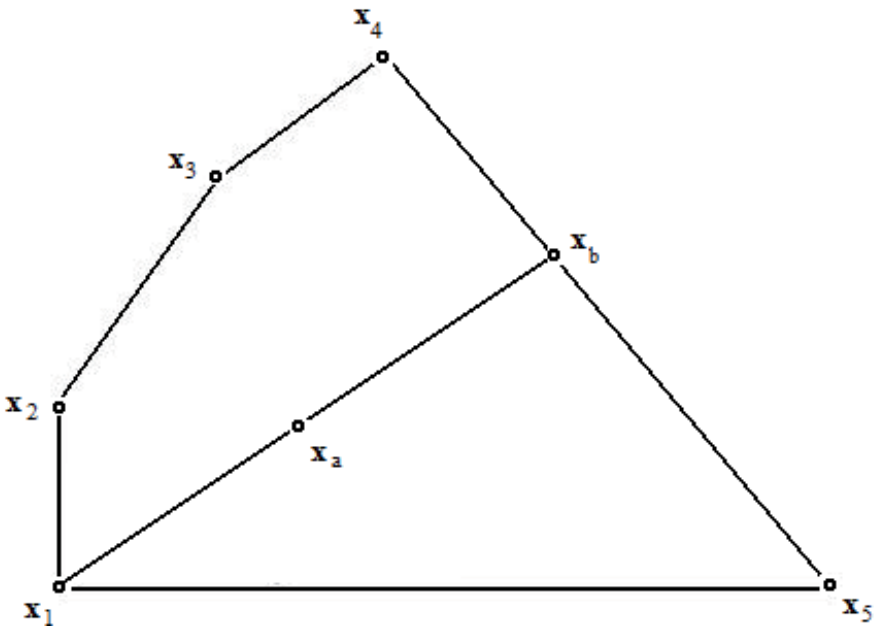


Figura 2.13: Representación de un punto no extremo en función de puntos extremos

El conjunto representado en la figura 2.13 tiene cinco puntos extremos, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5$ y cualquier punto en el conjunto puede representarse con ellos. Para los puntos ubicados sobre las aristas del conjunto es evidente que se pueden expresar como el promedio ponderado de los dos puntos extremos que definen la arista.

Un punto interior tal como $\mathbf{x}_a$, también puede representarse en términos de los puntos extremos. Para ello se expresa como una combinación lineal convexa de $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_b$;

$$\mathbf{x}_a = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_b \quad \lambda \in (0, 1)$$

Al ser $\mathbf{x}_b$ un punto no extremo, puede representarse como una combinación lineal convexa de $\mathbf{x}_4$ y $\mathbf{x}_5$;

$$\mathbf{x}_b = \gamma \mathbf{x}_4 + (1 - \gamma) \mathbf{x}_5 \quad \gamma \in (0, 1)$$

Al realizar la sustitución:

$$\mathbf{x}_a = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)(\gamma \mathbf{x}_4 + (1 - \gamma) \mathbf{x}_5) = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\gamma \mathbf{x}_4 + (1 - \lambda)(1 - \gamma) \mathbf{x}_5$$

Se tiene además que $\gamma\lambda, (1 - \lambda)\gamma, (1 - \lambda)(1 - \gamma) \in (0, 1)$ y $\gamma + \lambda - \gamma\lambda + 1 - \gamma - \lambda + \gamma\lambda = 1$, por lo tanto $\mathbf{x}_a$ quedó representado en función de los puntos extremos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4$ y $\mathbf{x}_5$. El procedimiento aplicado se puede extender a cualquier punto del politopo.

En el caso de los poliedros no acotados, no son suficientes los puntos extremos para representar un punto arbitrario del conjunto. Adicionalmente, se requieren las direcciones extremas, con lo cual cualquier punto del conjunto se puede representar como una combinación lineal convexa de los puntos extremos, más una combinación lineal no negativa de las direcciones extremas. Considere la situación mostrada en la figura 2.14, para representar el punto $\mathbf{x}_b$.

La representación de $\mathbf{x}_b$ puede ser el punto $\mathbf{x}_a$, que es expresable como la combinación lineal convexa de $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_3$, más un múltiplo positivo de la dirección extrema $\mathbf{d}_1$

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_a + \alpha \mathbf{d}_1 = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_3 + \alpha \mathbf{d}_1$$

con $\lambda \in (0, 1)$ y $\alpha > 0$.

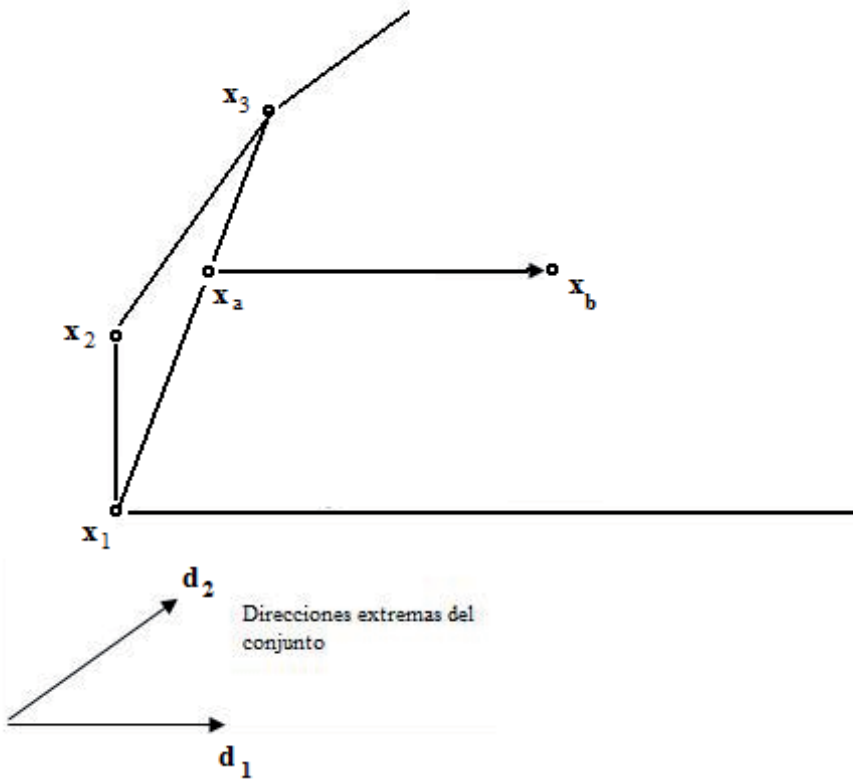


Figura 2.14: Representación de un punto no extremo en función de puntos y direcciones extremas

Note que la representación mostrada no es única.

El llamado **teorema de representación** indica que dado un conjunto poliédrico $\{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ con k puntos extremos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ y l direcciones extremas $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_l$, cualquier punto $\mathbf{x}$ del conjunto se puede representar como una combinación lineal convexa de los puntos extremos, más una combinación lineal no negativa de las direcciones extremas:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^l \beta_j \mathbf{d}_j$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\beta_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l$$

EJERCICIOS

1. Determine el rango de las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 11 & 8 \end{pmatrix}$.

Ayuda: Para encontrar el rango de una matriz A , se efectúan sobre esta operaciones de Gauss–Jordán hasta transformarla en una matriz, en la cual cada fila contenga máximo un uno (1) y los demás elementos sean cero (0). El rango será el número resultante de filas (o columnas) no nulas.

2. Calcule el producto $\mathbf{AB}$ para las matrices definidas en el ejercicio anterior. Hágalo manualmente y utilizando Excel.
3. Utilice Excel para calcular las inversas de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.
4. Encontrar los valores de x_1 , x_2 y x_3 que solucionen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5x_1 + 4x_2 = 28$$

$$3x_1 + 8x_2 + x_3 = 40$$

$$2x_1 + x_2 = 12$$

Ayuda: Expresa el problema de la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ es el vector de

variables y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 28 \\ 40 \\ 12 \end{pmatrix}$ es el vector de términos libres. De esta forma puede “despejar” $\mathbf{x}$ aplicando las operaciones matriciales apropiadas.

5. Con respecto al problema anterior ¿qué sucede si se cambia la matriz

$$\mathbf{A} \text{ por la matriz } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 11 & 8 \end{pmatrix}?$$

6. Demostrar que el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ solo tiene solución si el rango de $\mathbf{A}$ es igual al rango de la matriz aumentada $\mathbf{Ab}$ (a la matriz $\mathbf{A}$ agréguele una columna correspondiente al vector $\mathbf{b}$).
7. Cada semestre los profesores deben reportar las notas definitivas de los estudiantes. La nota del primer corte vale el 30 %, la del segundo corte el 30 % y la del tercer corte el 40 %. Mediante un sistema matricial calcule el vector de notas definitivas, dada la siguiente información.

Estudiante	1er corte	2do corte	3er corte
Álvarez	3.0	1.5	4.0
Bernal	3.4	2.5	2.8
Casas	4.2	3.0	2.5
Duarte	1.8	5.0	2.5

Continúa

Figueroa	2.6	3.0	3.0
Guzmán	3.1	3.0	3.0
Murcia	4.0	4.0	4.0
Pérez	4.0	4.5	3.0
Sandoval	3.6	3.8	3.6
Zapata	4.5	3.0	5.0

8. ¿Qué cambios tendría que hacer el profesor sobre el sistema anterior para calcular las notas definitivas si: en el primer corte hace tres pruebas escritas de igual valor; en el segundo corte hace un parcial que vale el 70 % del corte y dos parciales de igual valor; y en el último corte realiza un examen final que vale el 60 % del corte y un informe final?
9. ¿Es el conjunto $\{\mathbf{x} | ax_1^2 + bx_2^2 \leq c\}$ un conjunto convexo? Demuéstrelo.
10. Demuestre que el conjunto $\{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{b}$ un vector de $m \times 1$, es un conjunto convexo.
11. Encuentre una expresión algebraica en función del parámetro $0 \leq \lambda \leq 1$ para la combinación lineal convexa de los puntos $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Adicionalmente, encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

Referencias bibliográficas

BAZARAA, Mokhtar. JARVIS Jhon & SHERALI, Hanif. *Programación lineal y flujo en redes*. 2 ed en español, México. Limusa, 1998.

LUENBERGER, David. YINYU, Ye. *Linear and Nonlinear Programming*. Third Edition. New York, Springer Science, 2008.

WINSTON, W. *Investigación de Operaciones, Aplicaciones y algoritmos*. Cuarta edición en español, México. Thomson, 2005.

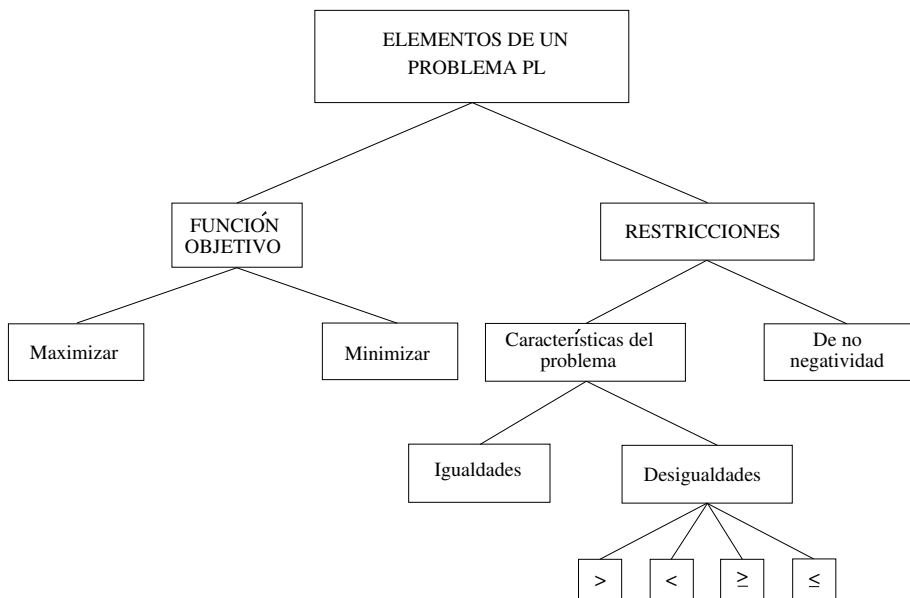
CAPÍTULO 3

ESTRUCTURA DE LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL Y SOLUCIÓN GRÁFICA

La Programación Lineal es un conjunto de técnicas de modelado y solución de problemas en los que todas las funciones involucradas son lineales. La estructura típica de un problema de Programación Lineal consta de una función objetivo que debe ser maximizada o minimizada, y de una serie de restricciones que deben cumplirse.

Concretamente, se dice que en un problema de Programación Lineal deben cumplirse las siguientes condiciones:

- Proporcionalidad: la contribución de cada variable en la función objetivo y en las restricciones es directamente proporcional al valor que tome la variable. En otras palabras, las variables no pueden tener un exponente diferente de 1 en la función objetivo ni en las restricciones y lo máximo que se les permite es estar multiplicadas por un coeficiente.
- Aditividad: cada función en un modelo de PL está constituida por la suma de variables multiplicadas por su respectivo coeficiente, es decir, no se permite multiplicación entre variables.



- Divisibilidad: las variables en un modelo de PL pueden tomar cualquier valor que satisfaga las restricciones, sin importar que estos no sean valores enteros.
- Certidumbre: todos los parámetros son constantes conocidas.

En el contexto de la Programación Lineal es muy común emplear la letra z para simbolizar la variable que se quiere maximizar o minimizar en la función objetivo. En cuanto a las restricciones, se da por descontado que las variables de decisión son estrictamente no negativas, a estas condiciones se les conoce como restricciones de no negatividad. Sin embargo cuando se estudie dualidad se verá que esta exigencia no es siempre necesaria.

Cada problema tiene una serie de condiciones propias que deben cumplirse y que pueden expresarse por medio de igualdades y/o desigualdades (estrictas y no estrictas).

Teniendo en cuenta las consideraciones mencionadas, algebraicamente los elementos de un problema de Programación Lineal son los siguientes:

- Función objetivo (que se debe maximizar o minimizar).

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_jx_j + c_{j+1}x_{j+1} + \dots + c_nx_n$$

Donde los c_j son los coeficientes y las x_j las variables de decisión.

- Restricciones que deben cumplirse o “espacio factible” (cada una puede ser igualdad o desigualdad).

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n < / \leq / > / \geq / = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n < / \leq / > / \geq / = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3j}x_j + \dots + a_{3n}x_n < / \leq / > / \geq / = b_3$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n < / \leq / > / \geq / = b_i$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n < / \leq / > / \geq / = b_m$$

Donde x_j es la j -ésima variable, a_{ij} es el coeficiente de x_j en la i -ésima restricción y b_i es una constante representativa de la i -ésima restricción (puede ser cero).

- Restricciones de no negatividad.

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

3.1. VARIABLES DE HOLGURA Y DE EXCESO

Si bien es cierto que, acorde con el contexto en cada problema de Programación Lineal pueden existir restricciones de desigualdad (estricta o no estricta), estas siempre pueden convertirse en igualdades con lado derecho (b_i) positivo.

Para ello es necesario recurrir al empleo de dos clases de variables no negativas, que se denominan variables de *holgura* y variables de *exceso*. Las primeras se utilizan en restricciones del tipo $<$ o $\leq$ y las segundas cuando el signo de la desigualdad es $>$ o $\geq$.

La restricción $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ al agregarle una variable de holgura h_i se convierte en:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n + H_i = b_i$$

Con la condición de que $H_i \geq 0$.

Si se tiene $x_1 + 3x_2 \leq 5$, utilizando una variable de holgura (no negativa), se puede transformar en $x_1 + 3x_2 + H = 5$.

Si se tiene una restricción de tipo $>$ o $\geq$, se debe recurrir al empleo de una variable no negativa denominada de *exceso* que se debe **restar** a la restricción.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

Al sustraerle una variable de exceso se convierte en:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n - E_i = b_i \quad \text{donde} \quad E_i \geq 0$$

La desigualdad $x_1 + 3x_2 \geq 5$ se convierte en una desigualdad al restarle una variable no negativa de exceso:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - E &= 5 \\ E &\geq 0 \end{aligned}$$

En la formulación de algunos problemas de Programación Lineal el contexto no exige la no negatividad de alguna variable. Dicha variable se puede representar como la resta de dos variables no negativas.

Sea x_i una variable no restringida en el signo, ella se puede expresar como:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^H - x_i^E \\ x_i^H &\geq 0, \quad x_i^E \geq 0 \end{aligned}$$

3.2. FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Forma canónica

Las restricciones son inecuaciones.

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ &\text{sujeto a:} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad \quad \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\
\text{Sujeto a} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, \dots, m \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
\end{array}$$

Forma estándar

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximizar o Minimizar} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
\text{sujeto a:} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n
\end{array}$$

3.3. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL POR EL MÉTODO GRÁFICO

Los problemas de Programación Lineal que no involucren más de tres variables pueden resolverse gráficamente. Aunque en la práctica son muy escasas las situaciones en las que se puede emplear tan reducido número de variables, (aspecto que limita la utilidad del método gráfico). Es interesante analizar este elemento porque facilita el entendimiento de los conceptos involucrados en la solución de problemas de Programación Lineal.

El primer paso de este método es la determinación de la región factible y consiste en graficar cada una de las restricciones.

Posteriormente y recurriendo a la definición de gradiente¹ de una función, se determina la solución óptima.

Ejemplo

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

¹Dirección en la cual una función crece más rápidamente.

sujeto a:

$$\mathbf{R}_1 : x_2 - x_1 \leq 4$$

$$\mathbf{R}_2 : x_1 + 9x_2 \leq 54$$

$$\mathbf{R}_3 : 5x_1 - 3x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Obtener la gráfica de la región factible es trivial, ya que se trata de rectas en R^2 , y por lo tanto para cada una de ellas basta obtener dos puntos y unirlos.

Para determinar hacia dónde apunta la desigualdad se toma un punto de prueba y se verifica si cumple o no con ella. Si se cumple, entonces la desigualdad va orientada hacia el punto, de lo contrario va hacia el otro lado. El punto mas fácil de probar es el $(0,0)$, sin embargo no sirve en todas las ocasiones, ¿cuándo no es adecuado?

En la figura 3.1 se muestra el espacio factible definido por las restricciones.

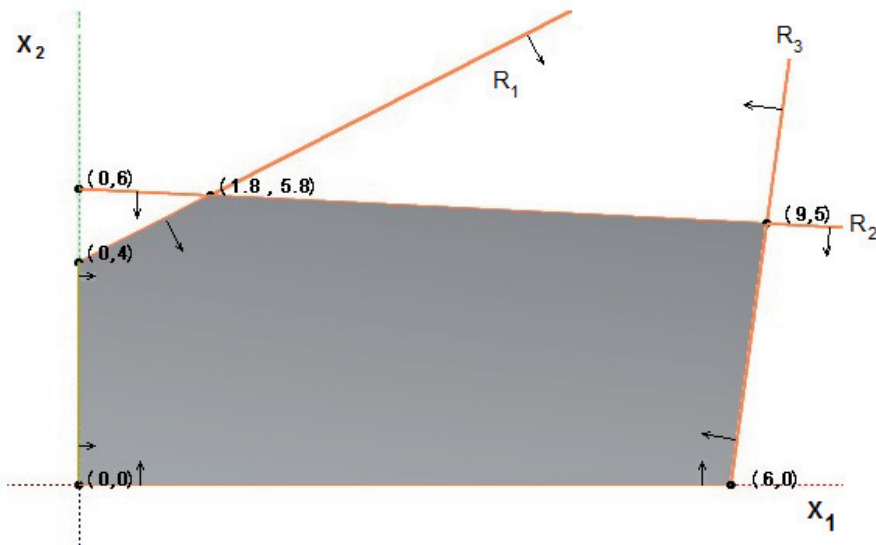


Figura 3.1: Región factible

Para definir la solución óptima del problema se debe calcular el gradiente de la función objetivo (los coeficientes):

$$\nabla z = [3, 2]$$

y trazar líneas perpendiculares a ∇ hasta justo antes de abandonar la región factible. El punto en la región factible determinado por esta recta es la solución óptima del problema.

Pero ¿qué significan esas perpendiculares a ∇ ? Estos son valores constantes de la función objetivo y crecen en la dirección del gradiente.

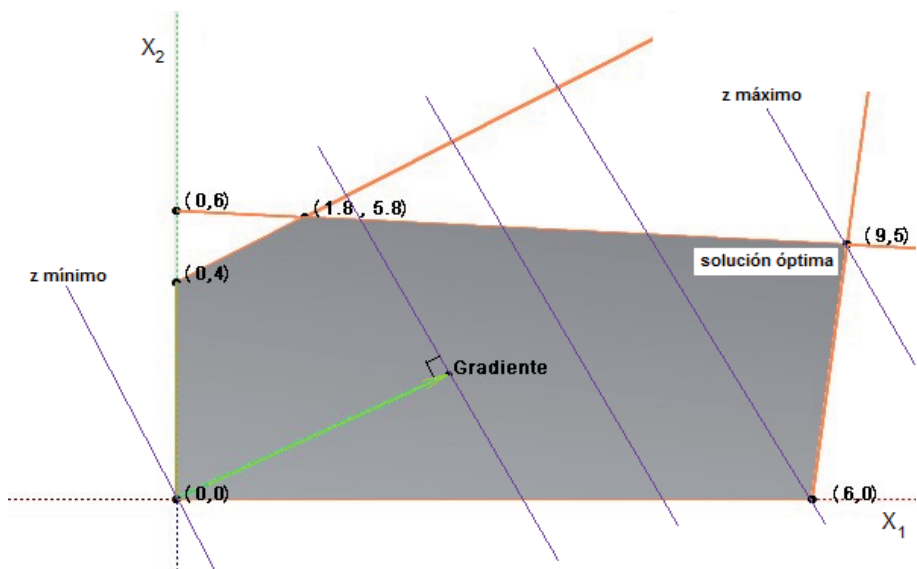


Figura 3.2: Determinación gráfica del punto óptimo

En el ejemplo considerado se encuentra que la última perpendicular a ∇ que se puede trazar sin salirse de la región factible pasa por el punto $(9,5)$, indicando los valores de las variables en la solución óptima. El valor de la función objetivo se obtiene sustituyendo en z .

$$x_1 = 9$$

$$x_2 = 5$$

$$z = (3 * 9) + (2 * 5) = 37$$

En resumen, la función objetivo toma un valor máximo de 37 cuando las variables de decisión valen 9 y 5, respectivamente.

Existencia de infinitas soluciones

Hay dos hechos que son importantes de resaltar:

- En la definición de la región factible solo intervienen las restricciones.
- Una vez delimitada la región factible, la ubicación del punto óptimo depende de la función objetivo (la dirección que indique el gradiente).

Es conveniente preguntarse ¿qué pasa si hay cambios en el gradiente? La respuesta es que la solución óptima puede cambiar. En el ejemplo anterior cámbiese la función objetivo por:

Maximizar $x_1 + 9x_2$

La nueva situación se ilustra en la figura 3.3.

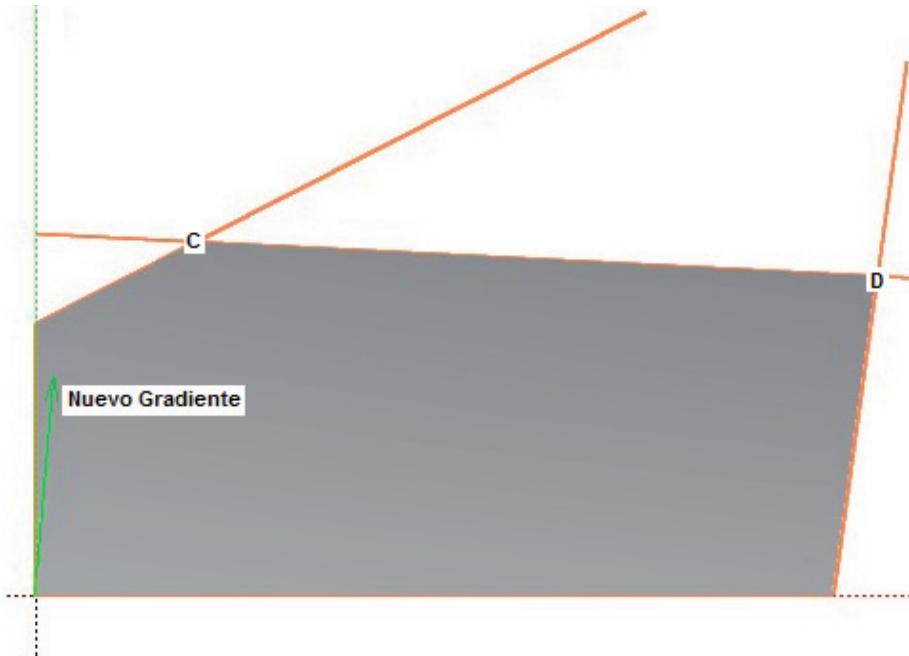


Figura 3.3: Problema con infinitas soluciones óptimas

Antes de salir de la región factible la última perpendicular al vector gradiente que se puede trazar no se intersecta con un punto único, sino

que lo hace con el segmento de recta que une los puntos C y D.

Cuando una situación como esta ocurre, el problema tiene infinitas soluciones. En el ejemplo cualquier punto sobre el segmento C–D tiene el mismo valor de z (¿cuánto?) y es una solución óptima del problema.

Si el nuevo gradiente se *gira* un poco hacia la izquierda la solución óptima sería única y correspondería al punto C (¿por qué?)

Solución no acotada

Si al problema considerado se le quitan las dos últimas restricciones se tiene:

Maximizar: $z = 3x_1 + 2x_2$,
sujeto a:

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &\leq 4 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Se pueden trazar perpendiculares al gradiente tan lejos como se quiera, con lo cual el valor de z crece de forma indefinida. En estas situaciones se dice que el valor óptimo de la función objetivo no está acotado (en el caso de la maximización tiende a infinito).

No siempre que la región factible es abierta (no acotada) el valor de la solución óptima tiende a infinito (maximización), ya que ello depende del valor del vector gradiente. La figura ilustra mejor la situación.

Al trazar las perpendiculares al gradiente, la última de ellas toca el punto C antes de abandonar la región factible; por lo tanto, a pesar de tener una región factible no acotada se tiene una solución óptima única.

También puede pasar que en este tipo de regiones se tengan infinitas soluciones para el problema de Programación Lineal que se está solucionando (¿cuándo ocurre ello?)

Un resumen de lo considerado hasta ahora permite ver que en un problema de Programación Lineal se cumple alguna de las siguientes situaciones:

- Tiene una única solución.
- Tiene infinitas soluciones.

- Tiene solución no acotada.
- No tiene soluciones.

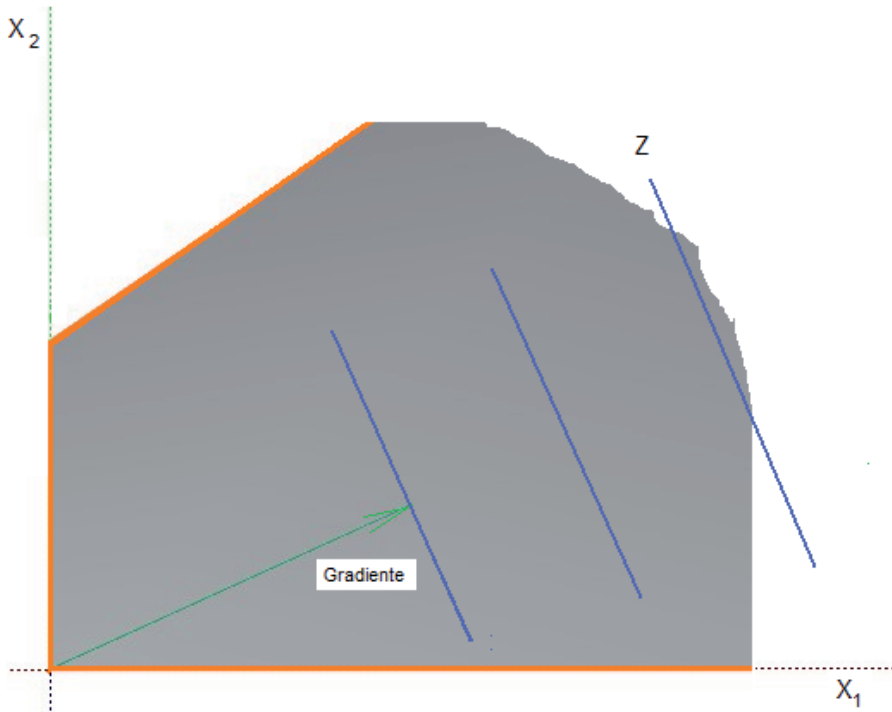


Figura 3.4: Representación de un problema con solución no acotada

La última situación ocurre cuando no existe región factible porque no se pueden cumplir todas las restricciones.

Ejemplo

Minimizar $30x_1 + 18x_2$,
sujeto a :

$$2.24x_1 + 2.6x_2 \geq 9$$

$$5.76x_1 + 10.4x_2 \geq 22$$

$$x_1 \geq 1.5x_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

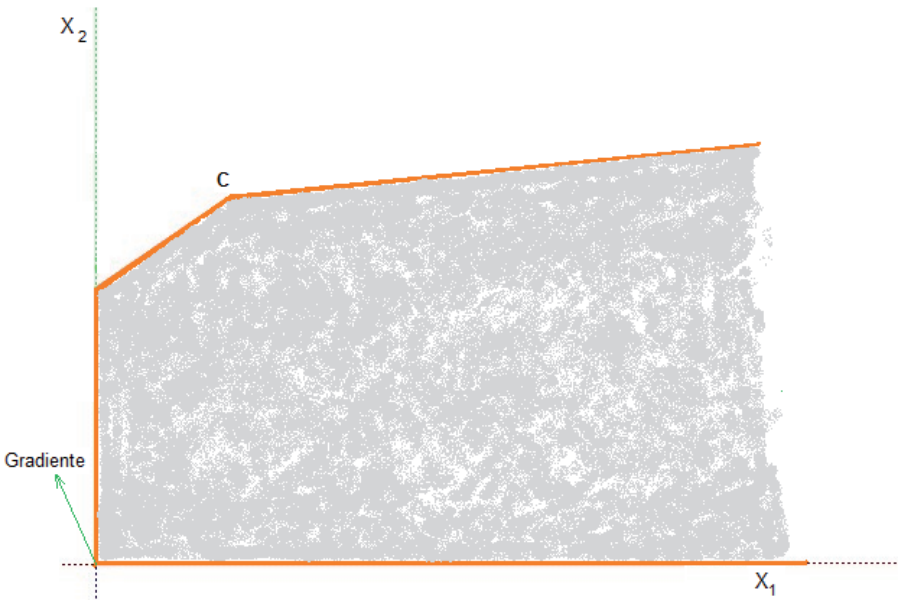


Figura 3.5: Problema con región factible abierta y solución única

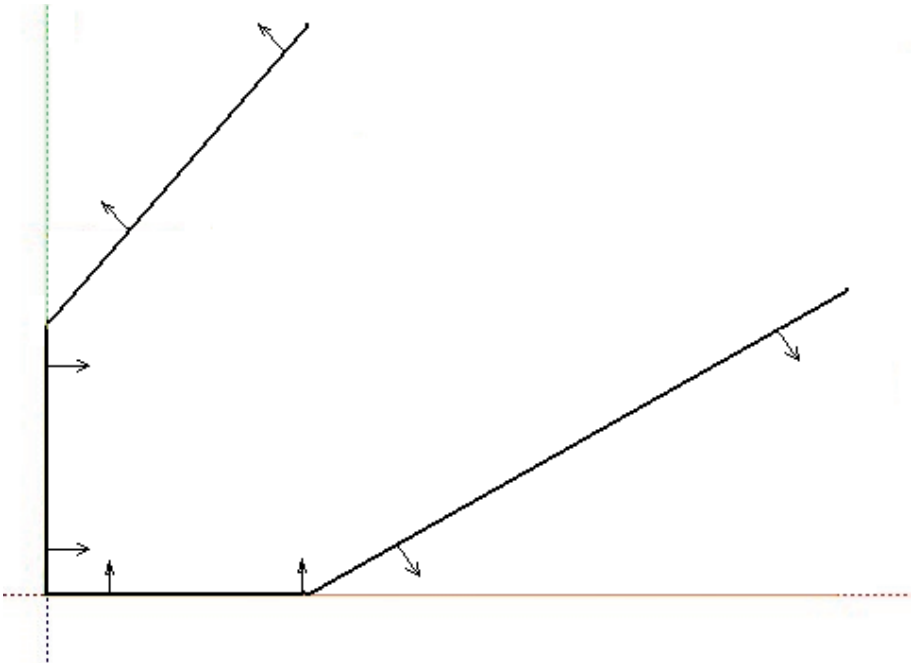


Figura 3.6: Caso de inexistencia de región factible

La región factible se muestra en la figura 3.7. Ahora identifique cada una de las restricciones.

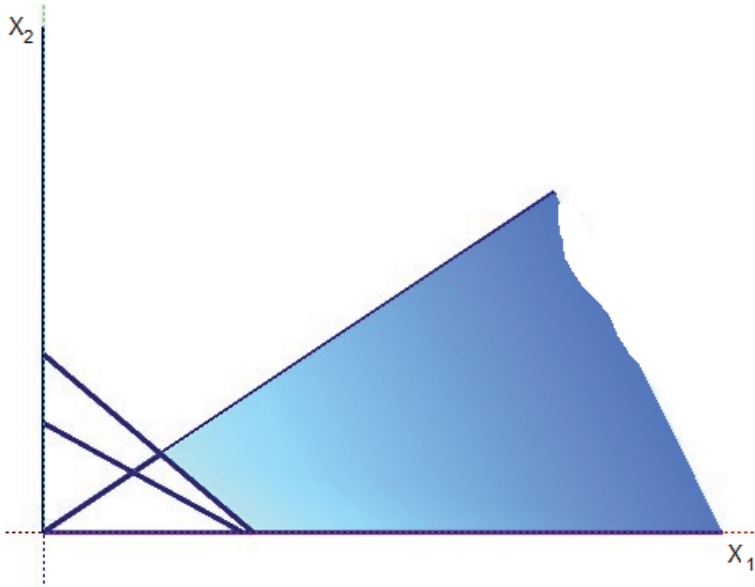


Figura 3.7: Representación de la región factible

Por ser un problema de minimización se trazan las perpendiculares en el *sentido contrario* al gradiente hasta justo antes de salirse de la región factible. Se deja como ejercicio al lector calcular el valor de la solución óptima y el valor de la función objetivo.

3.4. ANÁLISIS GRÁFICO DE SENSIBILIDAD

Considere nuevamente el problema

Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$,
sujeto a:

$$\mathbf{R}_1 : x_2 - x_1 \leq 4$$

$$\mathbf{R}_2 : x_1 + 9x_2 \leq 54$$

$$\mathbf{R}_2 : 5x_1 - 3x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

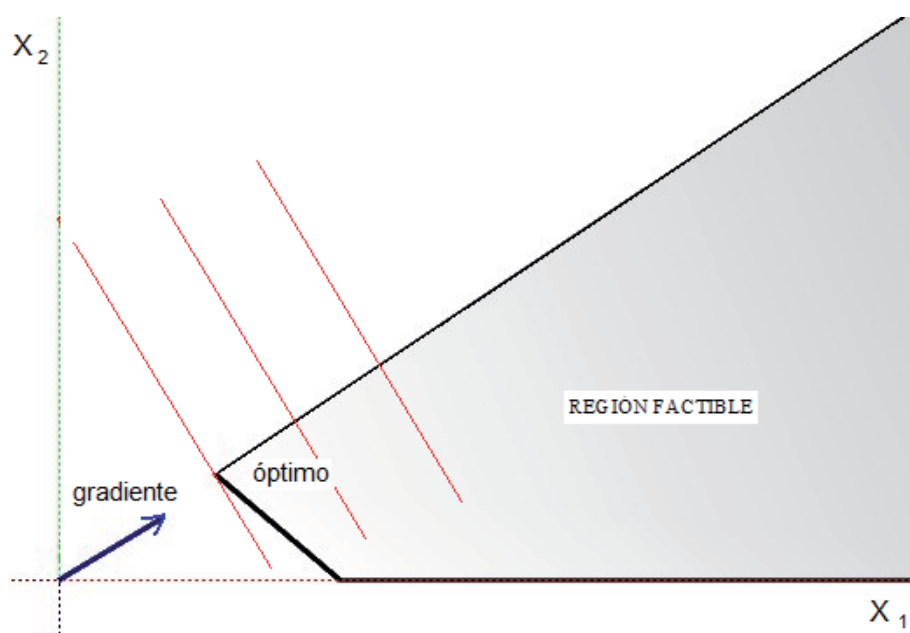


Figura 3.8: Determinación de la solución óptima por método gráfico en un problema de minimización

Como se vio, al aplicar el método gráfico de solución, una vez definida la región factible, la ubicación del punto óptimo está dada por la dirección del gradiente. Lo anterior lleva a la pregunta ¿cuál es el máximo cambio en la dirección del gradiente que se puede hacer (en cada sentido), de tal forma que la ubicación del punto óptimo siga inalterada?

Cambiar el gradiente equivale a modificar los coeficientes de la función objetivo, que en la práctica corresponden a precios de productos, utilidades unitarias, costos, etc., que pueden variar con facilidad en intervalos cortos de tiempo. Por ello, al tomador de decisiones le interesa saber bajo qué circunstancias la solución óptima que encontró es y sigue siendo válida.

Preguntas de este tipo son las que contesta el denominado análisis de sensibilidad o análisis post-óptimo.

Cambios en los coeficientes de la función objetivo

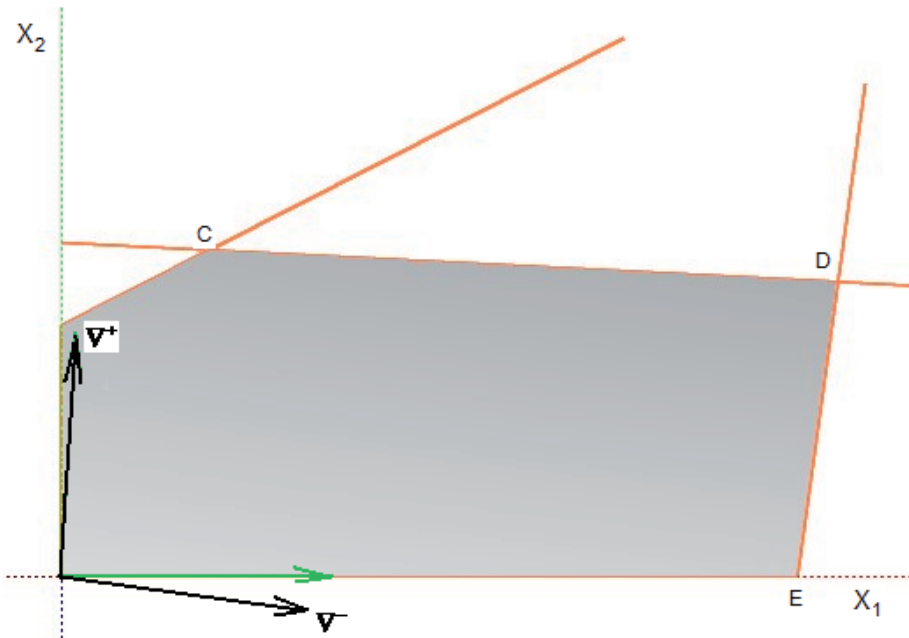


Figura 3.9: Análisis gráfico de sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo

El gradiente $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ actual de la función objetivo indica que el punto óptimo es D. Al hacer cambios en ∇ , la figura 3.10 permite ver que los nuevos vectores gradientes que se encuentren en el cono generado por ∇^- y ∇^+ (sin incluirlos), conducen al punto óptimo D.

Sin embargo, si el gradiente toma el valor ∇^+ la solución óptima es cualquier punto en el intervalo C–D, y si se mueve un poco más se encontraría en el punto C.

Al moverse en el sentido de las manecillas del reloj, si el gradiente vale ∇^- , la solución óptima es cualquier punto en el segmento D–E; y si se rota un poco más en esa dirección el óptimo se ubicará en el punto E.

Si existiese la restricción de que las componentes del gradiente fuesen no negativas, el giro máximo que puede hacerse en el sentido de las manecillas del reloj estaría limitado por el vector que se muestra sobre el eje horizontal de la figura 3.10, en tal caso el punto óptimo corresponde al punto D.

Falta calcular cuál es el valor de ∇^- y ∇^+ , para ello simplemente basta observar que:

- ∇^+ es perpendicular a la recta $x_1 + 9x_2 = 54$, es decir $\nabla^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$.
- ∇^- es perpendicular a la recta $5x_1 - 3x_2 = 30$, por lo que $\nabla^- = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Las dos condiciones anteriores unidas indican que para que D sea la solución óptima del problema, el gradiente de la función objetivo debe pertenecer al cono generado por ∇^- y ∇^+ .

Concretamente, el vector ∇ debe ser de la forma $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$: $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, lo que lleva a que los coeficientes de la función objetivo cumplan con:

$$c_1 = \lambda_1 + 5\lambda_2 \quad \text{y} \quad c_2 = 9\lambda_1 - 3\lambda_2 \quad \text{con} \quad \lambda_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2 \geq 0.$$

Se recalca que esta expresión es útil para cambios simultáneos en los coeficientes de la función objetivo.

Un solo cambio a la vez en los coeficientes de la función objetivo

Usualmente se calculan los valores entre los que puede variar un coeficiente de la función objetivo si los restantes se mantienen constantes, de forma tal que se mantenga el mismo punto óptimo.

Suponga que c_1 se mantiene en 3 y se desea saber el intervalo en el que puede variar, para que el punto óptimo siga estando en D.

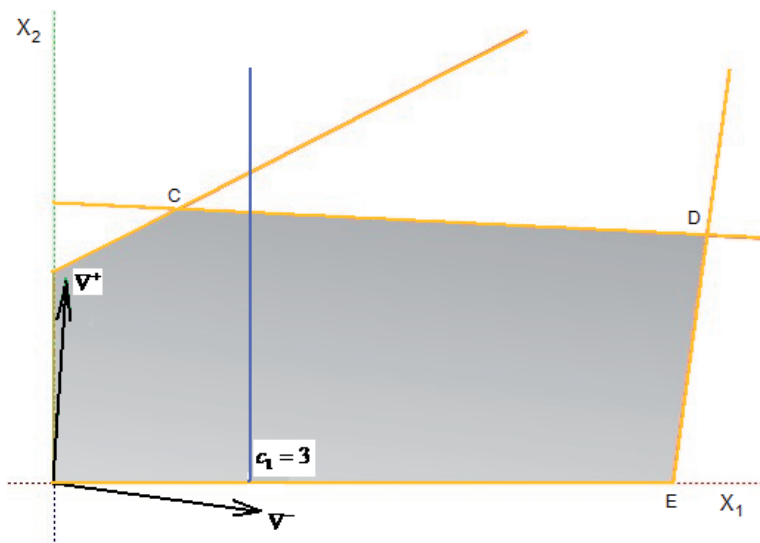


Figura 3.10: Análisis gráfico de sensibilidad con solo un cambio a la vez de los coeficientes de la función objetivo

Se debe simplemente encontrar la intersección de la rectas $x_2 = 9x_1$ y $x_2 = -\frac{3}{5}x_1$ con la recta $x_1 = 3$. Al hacer los cálculos correspondientes se obtiene $x_2 = 27$ y $x_2 = -1.8$.

Es decir que si $c_1 = 3$ y $-1.8 < c_2 < 27$, D sigue siendo óptimo.

La figura 3.11 ilustra la situación cuando se mantiene la condición $c_2 = 2$

Se busca la intersección de las rectas $x_2 = 9x_1$ y $x_2 = 2$, que se da en $x_1 = \frac{2}{9}$. Observando la gráfica es evidente que a partir de este último valor, puede aumentarse indefinidamente y el vector $\begin{bmatrix} c_1 \\ 2 \end{bmatrix}$ siempre permanecerá en el cono generado por ∇^- y ∇^+ .

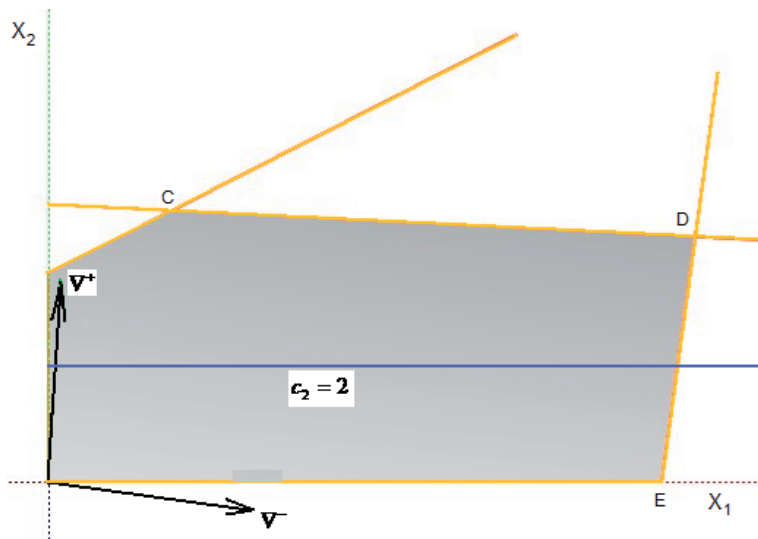


Figura 3.11: Análisis gráfico de sensibilidad para el cambio de un solo coeficiente de la función objetivo

Entonces para que D siga siendo óptimo el intervalo en el cual puede variar c_1 si $c_2 = 2$ es: $\frac{2}{9} < c_1 < \infty$

3.4.1. Cambios en los términos constantes de las restricciones (lados derechos)

Los lados derechos de las restricciones de un problema de Programación Lineal usualmente están asociados con disponibilidades de recursos, demandas máximas o mínimas estimadas, presupuestos, metas que deben cumplirse y otros parámetros por el estilo. Al igual que los coeficientes de la función objetivo, los lados derechos de las restricciones suelen representar un caso puntual de la situación que se está modelando y por lo tanto pueden cambiar con facilidad (en una fábrica la disponibilidad de materia prima, por ejemplo, no es igual todas las semanas).

Los lados derechos están asociados con la región factible del problema y gráficamente afectan los puntos de corte de las rectas asociadas a la igualdad en la restricción, pero no su pendiente. Dada la solución óptima de un problema, bajo esta consideración es interesante verificar

hasta qué punto se pueden desplazar (mediante paralelas) las rectas que delimitan la región factible, de tal forma que el punto óptimo siga estando definido por la intersección de las mismas restricciones.

Nótese que en este caso las coordenadas del punto óptimo sí cambian y, obviamente, el valor de la función objetivo también. De lo que se trata es de mantener el mismo conjunto de restricciones cuya intersección define el punto óptimo. A estas restricciones se les denomina activas, ya que se cumplen en forma de igualdad.

Considere nuevamente el problema

Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$,

sujeto a:

$$R_1 : x_2 - x_1 \leq 4$$

$$R_2 : x_1 + 9x_2 \leq 54$$

$$R_3 : 5x_1 - 3x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Al aplicar el método gráfico de solución se encontró que el punto óptimo está definido por la intersección de las restricciones R_2 y R_3 . ¿Qué pasa si se deja fija la restricción R_2 y se mueve R_3 hacia la izquierda? La figura 3.12 ilustra la situación.

Puesto que el vector gradiente no se ha modificado, se pueden trazar rectas paralelas a R_3 hacia la izquierda hasta antes del punto $(1.8, 5.8)$, y el punto óptimo seguirá definido por la intersección de R_2 y R_3 (es lo que sucede con R'_3). La paralela que pasa por el punto $(1.8, 5.8)$ define a este como punto óptimo y si se mueve un delta hacia la izquierda la restricción R_2 ya no es activa, puesto que el punto óptimo estará dado por la intersección de R_1 y R_2 .

Ahora es evidente que la recta que acota a R_3 se puede desplazar máximo hasta $(1.8, 5.8)$; pero ¿a qué valor del lado derecho de la restricción corresponde? Al hacer los cálculos se encuentra que este valor es -8.4.

Al trazar paralelas a R_3 hacia la derecha, el límite permisible está dado por la intersección de R_2 con el eje X_1 (¿por qué?) que se da en el punto $(0, 54)$. Después de este punto, el óptimo se define por la intersección de R_2 y $X_2 = 0$. El valor del lado derecho de R_3 cuando pasa por $(54, 0)$ es 270.

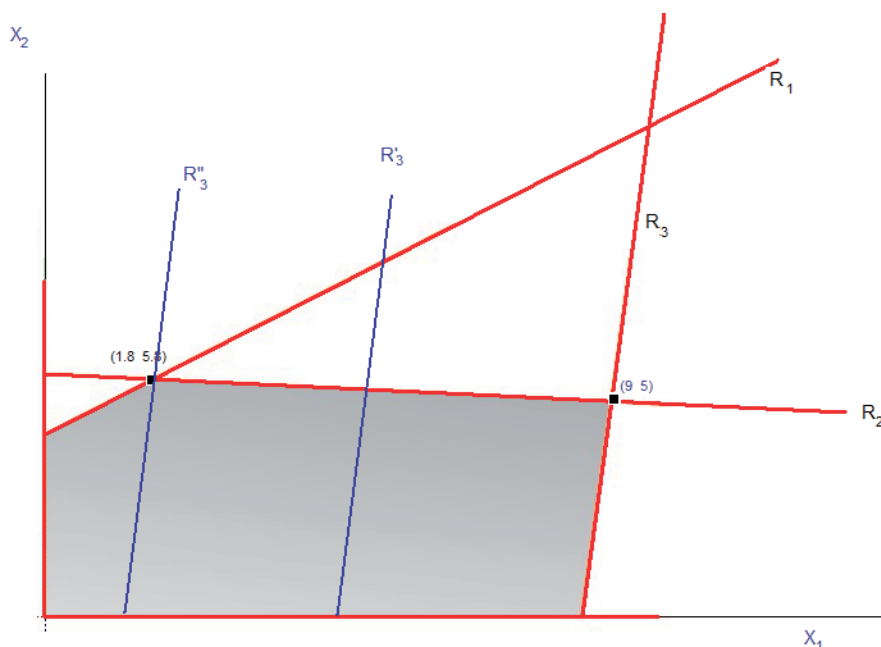


Figura 3.12: Cambios en el lado derecho de las restricciones

Resumiendo, si el lado derecho de R_3 (b_3) se mantiene en el intervalo $-8,4 \leq b_3 \leq 270$ y todos los demás parámetros no se modifican, el punto óptimo estará dado por la intersección de R_2 y R_3 .

Un análisis similar se puede hacer con la restricción R_2 . Si se mueve hacia arriba solo se podrá hacerlo hasta el punto $(21, 25)$ tal como lo muestra la recta R_2' en la figura 3.12; de tal forma que el punto óptimo siga estando definido por R_2 y R_3 . El valor correspondiente del lado derecho en este punto es 246.

Por otra parte, si la restricción R_2 se mueve hacia abajo, el límite de este movimiento está dado por el punto $(6, 0)$ como lo muestra la recta R_2'' (¿por qué?) El correspondiente valor del lado derecho de R_2 en ese punto es de 6.

Se tiene entonces que si el lado derecho de la restricción R_2 está en el intervalo $6 \leq b_2 \leq 246$, manteniendo el valor de los otros parámetros, las restricciones activas seguirán siendo R_2 y R_3 .

Aunque la restricción R_1 no es activa en el punto óptimo actual, también puede calcular su intervalo de sensibilidad. Obsérvese que R_1

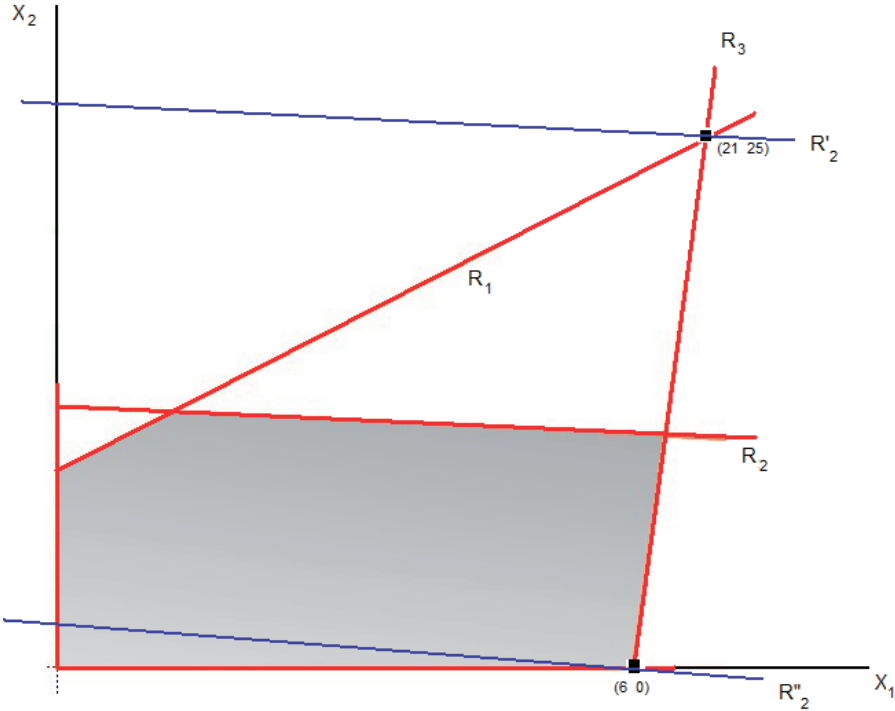


Figura 3.13: Cambios en el lado derecho de la restricción R_2

se puede desplazar hacia arriba, tanto como se quiera, sin que ello afecte el hecho de que el punto óptimo está definido por la intersección de R_2 y R_3 . Si el movimiento es hacia abajo ¿hasta dónde se puede hacer?

Valor unitario de los recursos (precios sombra)

A continuación se presentará una interpretación de un concepto clave en Programación Lineal y que se explorará de manera más formal en el capítulo 7, se trata del *precio sombra* o el valor unitario de los recursos o restricciones consideradas.

Estrictamente hablando, el *precio sombra* asociado a una restricción se define como el aumento o disminución que tiene la función objetivo por cada unidad que incremente o disminuya el lado derecho de la restricción, dentro del intervalo de factibilidad que se ha definido.

$$\text{Precio sombra}_i = \frac{\text{Cambio de la función objetivo en el intervalo factible de la restricción } i}{\text{intervalo factible de la restricción } i}$$

Se utilizarán los intervalos que se determinaron en el ejemplo anterior para calcular los precios sombra correspondiente. Empezando por las restricciones activas se tiene que:

El intervalo de validez para la restricción R_2 $x_1 + 9x_2 \leq 54$ es $6 \leq b_2 \leq 246$, el cual quedó definido por los puntos (21, 25) y (6, 0). Remplazando el valor de las variables en la función objetivo se obtiene:

$$z = 3 * 21 + 2 * 25 = 117 \quad y \quad z = 3 * 6 + 2 * 0 = 18$$

Aplicando la definición de *precio sombra*:

$$\text{Precio sombra}_2 = \frac{113 - 18}{246 - 6} = \frac{95}{240} = 0.3958333$$

Es decir que por cada unidad que se incremente, dentro del intervalo permitido, el lado derecho de la segunda restricción (actualmente en 54) la función objetivo se incrementará en 0.3958333 unidades. Si el lado derecho se disminuye, por cada unidad en que se haga la función objetivo decrecerá en 0.3958333 unidades.

Para calcular el *precio sombra* asociado a la tercera restricción $5x_1 - 3x_2 \leq 30$, se parte del intervalo de validez $-8,4 \leq b_3 \leq 270$,

delimitado por los puntos $(1.8, 5.8)$ y $(54, 0)$ cuyos valores de la función objetivo son.

$$z = 3 * 1.8 + 2 * 5.8 = 17 \quad y \quad z = 3 * 54 + 2 * 0 = 162$$

Por lo tanto el *precio sombra* esta dado por:

$$\text{Precio sombra}_3 = \frac{17 - 162}{-8.4 - 270} = 0.52083333$$

Se deja al lector el cálculo del *precio sombra* asociado a la restricción no activa $R_1: x_2 - x_1 \leq 4$. Tenga en cuenta que el intervalo de validez es infinito $(-4 \leq b_1 \leq \infty)$.

Una consideración importante es que las restricciones activas están asociadas a recursos escasos y tienen costo unitario o *precio sombra* diferente de cero. Las restricciones no activas (recursos no escasos) tienen *precio sombra* cero. Es conveniente que el lector trate de interpretar estos conceptos desde el punto de vista económico.

EJERCICIOS

1. Resolver los siguientes problemas por método gráfico.

Minimizar $z = -2x - 5y$,
sujeto a:

$$2x + 15y \leq 20$$

$$8x + 7y \leq 17$$

$$11x + 9y \leq 15$$

$$x \leq 9$$

$$x, y \geq 0$$

Maximizar $z = 6x + 3y$,
sujeto a:

$$y \leq 10$$

$$2x + 7y \leq 50$$

$$x + y \leq 18$$

$$3x + y \leq 40$$

$$x, y \geq 0$$

Minimizar: $z = 3x + 4y$,
sujeto a:

$$4x - 6y \leq 11$$

$$x + y \leq 6$$

$$2x + 4y \leq 20$$

$$x, y \geq 0$$

2. Considere el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 13$$

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Grafique las anteriores inecuaciones en el plano (E^2) y encuentre intervalos para los coeficientes de la función objetivo, $c_1x_1 + c_2x_2$, de tal forma que el punto óptimo quede ubicado en:

■ El punto $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

■ El punto $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

■ El punto $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

■ El punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$.

■ El punto $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Considere el siguiente problema:

Maximizar $z = c_1x_1 + c_2x_2$,
sujeto a:

$$\begin{aligned}4x_1 + 7x_2 &\leq 10 \\x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\5x_1 + 11x_2 &\leq 20 \\x_1 + x_2 &\leq 2 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Halle la solución óptima por el método gráfico si la relación entre c_2 y c_1 es de:

- 3:1
- 2:1
- 1:2
- 1:1

4. Considere el siguiente problema:

Maximizar $z = 5x_1 + 3x_2$,
sujeto a:

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\x_1 + x_2 &\leq 150 \\2x_1 + x_2 &\leq 90 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

- Aplicando el método gráfico encuentre la solución óptima del problema y el correspondiente valor de la función objetivo.
- Encuentre los intervalos para los coeficientes de la función objetivo, de tal forma que se mantenga la solución óptima actual.
- Encuentre los correspondientes intervalos para los lados derechos de las restricciones.

- Calcule el valor de los *precios sombra* para cada una de las correspondientes restricciones.
- Interprete los *precios sombra* suponiendo que las variables representan la cantidad diaria, en kilogramos, que se debe producir de cada uno de dos productos y los lados derechos de las restricciones representan la disponibilidad diaria, también en kilogramos, de cada una de las tres materias primas requeridas para la elaboración de los productos. La función objetivo es maximizar los ingresos diarios de la compañía que elabora los productos.

5. Solucionar por el método gráfico:

Maximizar $z = x_1 + x_2$,
sujeto a:

$$5x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

6. Solucionar por el método gráfico:

Maximizar $z = x_1 + x_2$,
sujeto a:

$$5x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$x_1 - 4x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

7. Solucionar por el método gráfico:

Maximizar $z = x_1 + x_2$,
sujeto a:

$$-5x_1 + 7x_2 \geq 35$$

$$x_1 - 4x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

8. Solucionar por el método gráfico el ejemplo uno del capítulo siguiente, cuya formulación es:

Maximizar: Ingresos = $6000x_1 + 8000x_2$,

Sujeto a:

$$x_1 + 2x_2 \leq 500$$

$$0.5x_1 + 0.8x_2 \leq 1000$$

$$0.01x_1 + 0.015x_2 \leq 10$$

$$x_2 \geq 100$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

9. De acuerdo con la solución obtenida para el ejercicio anterior y teniendo en cuenta el enunciado correspondiente (ejemplo 1 del capítulo 4), contestar las siguientes preguntas:

- ¿Qué cantidad de cada tipo de comida para gatos se debe producir diariamente para maximizar los ingresos de la compañía?
- Calcule los intervalos de aumento y disminución para los coeficientes de la función objetivo y los términos libres (lados derechos) de las restricciones.
- ¿Cuáles recursos son escasos y cuáles abundantes? ¿Cuánto sobra de cada uno?
- Calcule los costos unitarios de cada uno de los recursos (*precios sombra*).
- El gerente de ventas asegura que si el precio del kilogramo de concentrado *gourmet* se incrementa a \$10.000 se debe incrementar la producción de este producto ¿está en lo correcto el gerente de ventas?
- ¿Cómo cambiaría la solución si se tuviera disponible cada día un kilo adicional de residuos vegetales? ¿Cómo cambiaría el valor de los ingresos? Responda estas preguntas sin solucionar nuevamente el problema.

10. A la formulación del problema 8 agréguele las variables de exceso y de holgura correspondientes y, partiendo de la solución ya encontrada, determine sus respectivos valores. Con la ayuda de la solución gráfica interprete los resultados de acuerdo al contexto del problema.
11. Solucione este problema después de haber estudiado el capítulo 4. Ciudad Gótica está en peligro nuevamente. Ayudados por Bane, los reclusos del asilo Arkham han escapado. El jefe de la policía, Jim Gordon, ha solicitado la ayuda de Batman para enfrentar esta situación y recapturar a los peligrosos villanos que andan sueltos. Por su parte, el sagaz y honesto fiscal Harvey Dent (antes de haberse convertido en el “Dos Caras”) prepara el aparato judicial para procesar rápidamente a los recapturados.

Los fugados han sido clasificados en dos categorías; pandillas de villanos y pandillas de supervillanos. Batman sabe que si se dedica a capturar únicamente pandillas de supervillanos podrá enfrentar con éxito a 7 por semana, mientras que si se enfoca exclusivamente en las de villanos recapturará 13 semanalmente.

Jim Gordon estima que si las cárceles especiales de la ciudad se destinan exclusivamente para recluir, bajo estrictas medidas de seguridad, solo a pandillas de supervillanos, semanalmente puede encargarse de 8. Si las mismas cárceles se destinan para villanos, en la semana se pueden tener 10 pandillas.

Dada su peligrosidad, los expedientes de los supervillanos han sido actualizados constante y minuciosamente, mientras que algunos villanos son prácticamente desconocidos y sus expedientes deben actualizarse. Teniendo esto en cuenta, Harvey Dent sabe que si destinan los esfuerzos de la oficina del fiscal exclusivamente para judicializar las pandillas de supervillanos podrá hacerlo con éxito en 12 casos, pero si se enfocan en las asociaciones de villanos se puede lograr la judicialización de 8.

Batman ha elaborado una escala en la que mide el daño que pueden hacer los villanos y supervillanos en Ciudad Gótica. El caballero de la noche estima que por la captura de una pandilla de supervillanos se disminuyen 5 puntos de peligro para la ciudad y con una pandilla

de villanos fuera de circulación se reducen 3 puntos. Teniendo en cuenta toda la situación descrita ¿cuántos grupos de prófugos de cada tipo debe capturar Batman semanalmente para incrementar al máximo la seguridad en Ciudad Gótica? Bruce Wayne es un brillante científico y excelente estratega que ya formuló y solucionó el problema pero espera su respuesta para compararla.

12. Conteste teniendo en cuenta la formulación del problema anterior.

El comisionado Gordon sabe que la ciudad necesita un alcalde honesto y capaz, por lo que decide postular su nombre en las próximas elecciones. Los asesores estiman que su popularidad se incrementará 4 puntos por la captura de cada pandilla de supervillanos y 4 por la captura de cada pandilla de villanos. Desde el punto de vista de Gordon, y considerando sus aspiraciones políticas, ¿cuántos grupos delincuenciales de cada tipo deben ser capturados semanalmente?

13. Resuelva nuevamente el problema pero teniendo en cuenta el punto de vista del fiscal de Ciudad Gótica, el cual se describe a continuación.

Harvey Dent está pensando en la moral de la ciudad y ha calculado que esta se incrementará 4 puntos por cada pandilla de supervillanos recapturada, y 2 puntos por cada pandilla de villanos. Desde este punto de vista ¿cuántos grupos fugitivos de cada tipo debe pedirle el futuro Dos Caras a Batman que capture semanalmente?

CAPÍTULO 4

MODELAMIENTO DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

La utilidad de la Programación Lineal radica en que muchas situaciones prácticas se pueden modelar bajo sus supuestos. Para ello es necesario aplicar un conjunto de pasos cuyo componente esencial es el conocimiento del problema que se desea solucionar.

Aunque modelar situaciones reales como problemas de Programación Lineal no es una tarea sencilla, existen una serie de pasos que pueden facilitar el proceso.

- Tener perfectamente clara cuál es la situación problemática que se quiere modelar.
- Identificar la información que se necesita, la que se tiene disponible y la que se debe recolectar. Esta etapa puede ser bastante demorada, pero es crítica para obtener resultados aplicables.
- Recoger la información necesaria. Esto se hace a través de datos históricos, opinión de expertos, encuestas, análisis de mercados, normatividad legal, mediciones directas, boletines estadísticos o cualquier otra fuente confiable y pertinente.

- Definir cuáles son las preguntas que se quieren contestar, una vez modelado y solucionado el problema. Se debe tener claro el propósito buscado y cuáles son las condiciones que se deben cumplir.
- Formular el problema en lenguaje matemático definiendo función objetivo y restricciones, tal como se presentó en el capítulo 3.
- Aplicar algún método de solución.
- Análisis de los resultados obtenidos.
- De ser necesario retroalimentar y/o hacer modificación del modelo formulado, con base en los resultados obtenidos.
- Implementar en la organización los resultados obtenidos. Por ejemplo, si mediante un problema de Programación Lineal se busca, establecer niveles de producción, una vez obtenida la solución se debe llevar a la práctica. Para ello se debe establecer una estrategia de comunicación entre el equipo de investigación de operaciones que formuló y solucionó el problema con las áreas que deben plasmar en hechos concretos dicha solución.

Para los estudiantes tal vez la etapa más difícil es la de formular un problema a partir de un enunciado dado, sin embargo se deben hacer varias consideraciones a este respecto:

- En el salón de clase, cuando se proporciona el planteamiento (enunciado) de una situación problemática, se están omitiendo los pasos relacionados con la observación de una situación, identificación de un problema y obtención de información necesaria. En la práctica estas etapas son las más complicadas, pero por lo general los estudiantes no se involucran con ellas y concentran sus esfuerzos en realizar una formulación para un problema claramente descrito.
- El estar involucrado en el modelamiento de un problema desde los primeros pasos proporciona un entendimiento tal del problema, que resulta relativamente fácil formularlo. Dado que los

estudiantes por lo general parten de un enunciado que les proporciona toda la información necesaria y establece claramente el propósito perseguido y las restricciones, es muy aconsejable hacer el ejercicio mental de “involucrarse” con el problema y asumir un rol protagónico dentro de él. Por ejemplo, en problemas de programación de tareas es bueno ponerse en el lugar del gerente de producción, en un problema de asignación de rutas para una flota de vehículos se puede imaginar que se es el gerente de logística, etc.

- Relacionado con el ítem anterior, es muy difícil solucionar un problema “a lo lejos”, por ello los problemas no se deben afrontar como un simple ejercicio que se debe realizar. Se debe asumir una postura activa e imaginativa.
- Lograr destreza en el modelamiento de problemas requiere práctica. No es suficiente con “solucionar unos cuantos ejercicios”.
- Nunca sobra recalcar que la estimación de los parámetros (información conocida) es vital para obtener resultados aplicables. Si se tiene en cuenta que una vez formulado el problema se ingresa la información a un software para obtener la solución, la calidad de esta depende de la calidad de la información ingresada.

4.1. COMPONENTES DE UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Como se enunció en el capítulo 3, un problema de Programación Lineal básicamente está compuesto de una función objetivo y restricciones que se deben satisfacer. No obstante, tanto la función objetivo como las restricciones están compuestas por dos tipos de elementos; información conocida y variables.

La información conocida son los números o coeficientes que multiplican a las variables y a los valores numéricos que están libres (no multiplican a ninguna variable).

Las variables son los símbolos utilizados para representar las decisiones que se deben tomar, y de las que no se conoce su valor numéri-

co. Para representarlas usualmente se utilizan las últimas letras del abecedario.

4.2. PASOS PARA LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Aunque no existe una secuencia estricta de pasos para formular un problema de Programación Lineal, a continuación se presentan una serie de recomendaciones de necesario cumplimiento que hacen más fácil el proceso.

1. Asumir el problema como una situación en la que se está involucrado.
2. Leer cuidadosamente el enunciado hasta estar seguro de haber comprendido la situación.
3. Identificar la información numérica o conocida que proporciona el enunciado. Estos son los parámetros del problema.
4. Identificar cuáles y cuántas son las decisiones que se deben tomar. Estas son las variables del problema.
5. Establecer cuál es el propósito del problema. En el caso de los problemas de Programación Lineal es algún criterio que se debe maximizar o minimizar, por ejemplo maximizar las utilidades de una empresa, minimizar los costos asociados a un proceso, etc.
6. Identificar las condiciones o restricciones que se deben cumplir. Estas siempre existirán puesto que un problema de Programación Lineal no tiene sentido sin restricciones (¿por qué?).
7. Definir las variables. Consiste en asignar una variable por cada decisión que se deba tomar. Es importante que la definición sea clara y posteriormente asignar las unidades de medición correspondientes a las variables.
8. Expresar algebraicamente la función objetivo e igualarla con una variable que la simbolice. Cuando el contexto es claro, el nombre de la variable objetivo es concreto (por ejemplo utilidad o costos),

si el problema es abstracto por convención la letra Z simboliza la variable objetivo.

9. Expresar cada una de las restricciones de forma algebraica con su correspondiente relación, $=, \leq, \geq, >, <$.

Se debe tener especial cuidado con la consistencia dimensional de las expresiones algebraicas que se formulen. Lo que esté al lado derecho de una expresión algebraica (igualdad o desigualdad) debe tener las mismas unidades o dimensiones de lo que se encuentre al lado izquierdo.

4.3. TIPOS DE VARIABLES

En la formulación de problemas de Programación Lineal se emplean **variables continuas**, es decir variables que pueden tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales. Adicionalmente, la mayoría de las veces se exige que dichas variables sean no negativas. Esto significa que solo pueden tomar valores de los números reales positivos o cero. Como se mencionó en el capítulo tres, estas condiciones se conocen como de *divisibilidad*.

Sin embargo, existen otro tipo de variables para la formulación de problemas de Programación Lineal que, aunque no cumplen la condición de divisibilidad, pueden ser útiles en algunas formulaciones conservando la “forma” lineal del problema. Considere una situación en la que se debe decidir cuántos empleados contratar en una empresa; no suena lógico obtener una respuesta que indique contratar dos empleados y medio. En este caso utilizar variables continuas no es estrictamente correcto.

Las variables que se pueden utilizar son:

- **Variables continuas.** Permiten cumplir la condición de divisibilidad de los problemas de Programación Lineal. Se expresan como:

$$x_i \geq 0$$

- **Variables discretas o enteras.** Son variables que pueden tomar cualquier valor en el conjunto de los enteros positivos Z^+ o cero. Se utilizan cuando la decisión no permite partes decimales en

la respuesta, por ejemplo número de trabajadores a contratar, cantidad de camiones que debe utilizar una empresa logística etc. Se expresan como:

$$x_i \in Z^+ \cup 0$$

- **Variables binarias o Dummy.** Es un tipo de variable discreta que solo puede tomar dos valores: cero o uno. Se utiliza cuando se quiere modelar una decisión de “se hace” o “no se hace”, o para expresar que una condición se cumple o no se cumple. Se expresa como:

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se cumple la condición} \\ 0 & \text{no se cumple la condición} \end{cases}$$

4.3.1. *Consideraciones sobre la utilización de variables enteras y binarias*

Aunque las variables enteras y las variables binarias son muy útiles para formular modelos lineales y proporcionan flexibilidad al modelado, su utilización tiene implicaciones que es necesario conocer.

La primera de ellas es que los métodos de solución para problemas que involucran variables enteras y/o binarias son diferentes a los utilizados en problemas donde solo hay variables continuas, ello se debe a la condición de convexidad en la que se basan dichos métodos. En particular el método simplex que se describe en el capítulo cinco, está diseñado para solucionar problemas lineales que involucren exclusivamente variables continuas.

La segunda implicación importante es que los métodos de solución para problemas con variables enteras y/o binarias son computacionalmente más costosos, por lo tanto el tiempo requerido para obtener una respuesta puede llegar a ser considerable. Este hecho es de especial cuidado para problemas que tengan gran número de variables y restricciones.

Por último, el análisis pos-óptimo que se describe en este libro solo es válido para problemas con variables continuas.

Ejemplo 1

Considere la siguiente situación:

A partir de residuos vegetales una pequeña empresa de alimentos concentrados para animales elabora dos clases de comida para gato; normal y *gourmet*. Cada kilogramo de concentrado normal se vende a \$6.000 y uno de *gourmet* a \$8.000.

Para la producción de un kilo de concentrado normal se necesita un kilogramo de residuos vegetales, medio litro de agua (equivalente a medio kilogramo) y 10 gr de preservante. Producir un kilogramo de concentrado *gourmet* requiere dos kilogramos de residuos vegetales, 0,8 kg de agua y 15 gr de preservante.

Diariamente se dispone de media tonelada de residuos vegetales, 1m³ de agua y 10 kilogramos de preservante. Compromisos previos obligan a que diariamente se produzcan al menos 100 kg de comida *gourmet*.

Solución

La aplicación de los pasos mencionados para la formulación del problema implica:

- Involucrarse con el problema y leerlo cuidadosamente hasta tener la seguridad de comprender la situación.
- Identificar la información numérica o conocida que proporciona el enunciado. Estos son los parámetros del problema.

El enunciado del problema proporciona los precios a los que se vende el kilogramo de cada tipo de concentrado producido por la empresa, \$6.000 y \$8.000.

Está definida la cantidad de agua, preservantes y residuos vegetales que se necesitan para producir un kilo de cada uno de los productos.

Producto	Residuos Vegetales	Agua	Preservante
Concentrado normal	1 kg	0.5 L	10 gr
Concentrado Gourmet	2 kg	0.8 L	15 gr

Se tiene información de las disponibilidades diarias de materias primas:

- 1/2 tonelada de residuos vegetales.
- 1 metro cúbico de agua.
- 10 kilogramos de preservante.

Adicionalmente se sabe que se deben producir como mínimo 100 kilos de concentrado *gourmet*.

- En este problema se deben tomar *dos* decisiones:
 - Cuántos kilogramos de concentrado normal debe producir diariamente la empresa.
 - Cuántos kilogramos de concentrado *gourmet* debe producir diariamente la empresa.
- El propósito buscado en esta situación es *optimizar* los ingresos diarios de la empresa.
- Se deben cumplir las siguientes condiciones:
 - En la preparación de la producción diaria de concentrados no se puede consumir más de media tonelada de residuos vegetales.
 - En la producción de los concentrados, diariamente no se debe emplear más de $1m^3$ de agua.
 - No se pueden utilizar más de 10 kilos de preservante para la producción diaria de los concentrados.
 - Se deben producir al menos 100 kg de concentrado *gourmet*.

- Puesto que se identificaron dos decisiones a tomar, se deben definir dos variables de decisión asociadas; a cada una de ellas se le debe asignar un símbolo:

x_1 = Kilogramos de concentrado normal a producir diariamente.

x_2 = Kilogramos de concentrado *gourmet* a producir diariamente.

- La función objetivo es maximizar la variable ingresos. Esta está definida como la cantidad de dinero que factura la empresa por ventas de concentrado normal más el dinero facturado por concepto del concentrado *gourmet*.

Ingresos generados por el concentrado normal:

$$\frac{\$}{\text{kg de concentrado normal}} 6000 * x_1 \text{ kg de concentrado normal}$$

Ingresos generados por el concentrado gourmet:

$$\frac{\$}{\text{kg de concentrado gourmet}} 8000 * x_2 \text{ kg de concentrado gourmet}$$

Ingresos diarios totales:

$$\frac{\$}{\text{kg de concentrado normal}} 6000 * x_1 \text{ kg de concentrado normal}$$

$$\frac{\$}{\text{kg de concentrado gourmet}} 8000 * x_2 \text{ kg de concentrado gourmet}$$

Nótese que al cancelar las unidades, cada uno de los términos queda en unidades monetarias, por lo tanto la variable objetivo tendrá como unidades \$.

En definitiva se tiene:

$$\text{Maximizar Ingresos} = 6000x_1 + 8000x_2$$

- Las restricciones expresadas en función de las variables definidas quedan:
 - Disponibilidad diaria de residuos vegetales.

$$\begin{aligned}
& \frac{1kg \text{ residuos vegetales}}{kg \text{ concentrado normal}} * x_1 \text{ kg concentrado normal} \\
& \quad + \\
& \frac{2kg \text{ residuos vegetales}}{kg \text{ concentrado gourmet}} * x_2 \text{ kg concentrado gourmet} \\
& \leq 500kg \text{ de residuos vegetales}
\end{aligned}$$

- Disponibilidad diaria de agua.

$$\begin{aligned}
& \frac{0,5L \text{ agua}}{kg \text{ concentrado normal}} * x_1 \text{ kg concentrado normal} \\
& \quad + \\
& \frac{0,8L \text{ agua}}{kg \text{ concentrado gourmet}} * x_2 \text{ kg concentrado gourmet} \\
& \leq 100L \text{ de agua}
\end{aligned}$$

- Disponibilidad diaria de preservante.

$$\begin{aligned}
& \frac{0,01kg \text{ de preservante}}{kg \text{ concentrado normal}} * x_1 \text{ kg concentrado normal} \\
& \quad + \\
& \frac{0,015kg \text{ de preservante}}{kg \text{ concentrado gourmet}} * x_2 \text{ kg concentrado gourmet} \\
& \leq 100L \text{ de preservante}
\end{aligned}$$

- Demanda mínima diaria de concentrado *gourmet*.

$$x_2 \text{ kg concentrado gourmet} \geq 100 \text{ kg concentrado gourmet}$$

- Restricciones de no negatividad. Hacen explícito el hecho de no poder producir cantidades negativas de concentrados.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Una vez comprobada la consistencia dimensional de las expresiones algebraicas, se puede prescindir de las unidades y expresar la formulación como:

Maximizar Ingresos = $6000x_1 + 8000x_2$,
sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 500 \\ 0,5x_1 + 0,8x_2 &\leq 1000 \\ 0,01x_1 + 0,015x_2 &\leq 10 \\ x_2 &\geq 100 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Una microempresa bogotana del sector de la confección, ubicada en el sector de Puente Aranda, elabora camisas de tres tipos: hombre, mujer y unisex. Para diferenciarse en el mercado y poder rivalizar con las importaciones chinas, las directivas han decidido competir por calidad; en consecuencia los productos son muy elaborados. El proceso de confección requiere las operaciones de corte y costura, siendo el principal insumo la tela procedente de Medellín. En la siguiente tabla se muestran las horas necesarias de cada operación para obtener una camisa, así como los precios de venta por unidad.

	Corte (h)	Costura (h)	Tela (m)	Precio (\$ / camisa)
Hombre	1	1.2	1	130.000
Mujer	1.5	1.8	1.4	145.000
Unisex	1	3	1.5	160.000

La empresa dispone diariamente de 8 horas de corte y 11.4 de costura, así como de 8.5 metros de tela. El mercado limita la demanda diaria de camisas unisex a máximo tres unidades ¿cuántas unidades de cada tipo de camisa se deben producir al día para maximizar los ingresos por ventas?

Solución

Después de haber asumido el rol del tomador de decisiones, comprendido totalmente la solución planteada, identificado la información proporcionada, establecido el propósito buscado, las decisiones que se deben tomar y las restricciones que se deben satisfacer, se procede a formular el problema.

Se definen las variables:

x_1 = Unidades diarias de camisas masculinas que se deben producir.

x_2 = Unidades diarias de camisas femeninas que se deben producir.

x_3 = Unidades diarias de camisas unisex que se deben producir.

Función objetivo.

Maximizar

$$\begin{aligned} \text{Ingresos} = & \frac{\$}{\text{camisa hombre}} 130000 x_1 \text{ (camisas hombre)} \\ & + \frac{\$}{\text{camisa mujer}} 145000 x_2 \text{ (camisas mujer)} \\ & + \frac{\$}{\text{camisa unisex}} 160000 x_3 \text{ (camisas unisex)} \end{aligned}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

- Horas de corte disponibles

$$\begin{aligned} & \frac{1 \text{ hora de corte}}{\text{camisa hombre}} x_1 \text{ (camisas hombre)} \\ & + 1,5 \frac{\text{horas de corte}}{\text{camisa mujer}} x_2 \text{ (camisas mujer)} \\ & + \frac{1 \text{ hora de corte}}{\text{camisa unisex}} x_3 \text{ (camisas unisex)} \leq 8 \text{ horas de corte} \end{aligned}$$

- Horas de costura disponibles

$$\begin{aligned}
 & 1,2 \frac{\text{horas de costura}}{\text{camisa hombre}} x_1 \text{ (camisas de hombre)} \\
 & + 1,8 \frac{\text{horas de costura}}{\text{camisa mujer}} x_2 \text{ (camisas de mujer)} \\
 & + 3 \frac{\text{horas de costura}}{\text{camisa unisex}} x_3 \text{ (camisas unisex)} \\
 & \leq 11,4 \text{ horas de costura}
 \end{aligned}$$

- Materia Prima

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 \text{ metro de tela}}{\text{camisa hombre}} x_1 \text{ (camisas de hombre)} \\
 & + 1,4 \frac{\text{metros de tela}}{\text{camisa mujer}} x_2 \text{ (camisas de mujer)} \\
 & + 13,5 \frac{\text{metros de tela}}{\text{camisa unisex}} x_3 \text{ (camisas unisex)} \leq 8,5 \text{ metros de tela}
 \end{aligned}$$

- Demanda de Camisas Unisex

$$x_3 \text{ (camisas unisex)} \leq 3 \text{ (camisas unisex)}$$

- No negatividad

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

En resumen: Maximizar $130000x_1 + 145000x_2 + 160000x_3$,
sujeto a:

$$\begin{aligned}
 x_1 + 1,5x_2 + x_3 & \leq 8 \\
 1,2x_1 + 1,8x_2 + 3x_3 & \leq 11,4 \\
 x_1 + 1,4x_2 + 1,5x_3 & \leq 8,5 \\
 x_3 & \leq 3 \\
 x_1, x_2, x_3 & \geq 0
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Una empresa manufacturera tiene en su planta de producción cuatro estaciones secuenciales de trabajo en las que elabora cinco productos, utilizando dos materias primas básicas.

Los tiempos de procesamiento por unidad de cada uno de los productos en las diferentes estaciones de trabajo, medidos en minutos, se muestran a continuación.

Estación	Producto					Minutos
	P1	P2	P3	P4	P5	Disponibles/semana
Estación 1	17	17	14	20	17	4.240
Estación 2	15	20	19	19	18	4.800
Estación 3	19	15	11	13	12	3.260
Estación 4	17	11	11	15	16	3.540

Los consumos de las materias primas, en kilogramos, para producir una unidad de cada producto son los siguientes.

Materia Prima	Producto					
	P1	P2	P3	P4	P5	Disponibilidad Semanal
MP 1	7	6	5	6	5	10 T.
MP 2	5	6	5	7	3	12 T.

Con base en los pronósticos de demanda y los compromisos adquiridos, los departamentos comerciales y de mercadeo han establecido las producciones mínimas y máximas semanales para los cinco productos, así como su utilidad unitaria.

Teniendo en cuenta las restricciones existentes ¿cuántas unidades de cada producto debe producir la empresa semanalmente para maximizar su utilidad?

	Demanda Mínima	Demanda Máxima	Utilidad \$/unidad
Producto 1	20	100	14.000
Producto 2	20	120	17.000
Producto 3	30	100	18.000
Producto 4	40	100	10.000
Producto 5	30	100	17.000

Solución

Definición de variables.

x_1 = Unidades de producto uno que se deben producir semanalmente.

x_2 = Unidades de producto dos que se deben producir semanalmente.

x_3 = Unidades de producto tres que se deben producir semanalmente.

x_4 = Unidades de producto cuatro que se deben producir semanalmente.

x_5 = Unidades de producto cinco que se deben producir semanalmente.

Función Objetivo.

Maximizar:

$$\begin{aligned}
 \text{utilidad} = & \frac{\$}{\text{unidad } P_1} 14000 x_1 \text{ unidad } P_1 + \frac{\$}{\text{unidad } P_2} 17000 x_2 \text{ unidad } P_2 \\
 & + \frac{\$}{\text{unidad } P_3} 18000 x_3 \text{ unidad } P_3 + \frac{\$}{\text{unidad } P_4} 10000 x_4 \text{ unidad } P_4 \\
 & + \frac{\$}{\text{unidad } P_5} 17000 x_5 \text{ unidad } P_5
 \end{aligned}$$

Restricciones

- De capacidad.

Capacidad de la estación uno.

$$\begin{aligned}
 & 17 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_1} x_1 \text{ unidad } P_1 + 17 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_2} x_2 \text{ unidad } P_2 \\
 & + 14 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_3} x_3 \text{ unidad } P_3 + 20 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_4} x_4 \text{ unidad } P_4 \\
 & + 17 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_5} x_5 \text{ unidad } P_5 \leq 5300 \text{ minutos}
 \end{aligned}$$

Capacidad de la estación dos.

$$\begin{aligned}
 & 15 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_1} x_1 \text{ unidad } P_1 + 20 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_2} x_2 \text{ unidad } P_2 \\
 & + 19 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_3} x_3 \text{ unidad } P_3 + 19 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_4} x_4 \text{ unidad } P_4 \\
 & + 18 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_5} x_5 \text{ unidad } P_5 \leq 4800 \text{ minutos}
 \end{aligned}$$

Capacidad de la estación tres.

$$\begin{aligned}
 & 19 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_1} x_1 \text{ unidad } P_1 + 15 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_2} x_2 \text{ unidad } P_2 \\
 & + 11 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_3} x_3 \text{ unidad } P_3 + 13 x_4 \text{ unidad } P_4 \\
 & + 12 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_5} x_5 \text{ unidad } P_5 \leq 5000 \text{ minutos}
 \end{aligned}$$

Capacidad de la estación cuatro.

$$\begin{aligned}
 & 17 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_1} x_1 \text{ unidad } P_1 + 11 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_2} x_2 \text{ unidad } P_2 \\
 & + 11 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_3} x_3 \text{ unidad } P_3 + 15 x_4 \text{ unidad } P_4 \\
 & + 16 \frac{\text{minutos}}{\text{unidad } P_5} x_5 \text{ unidad } P_5 \leq 4800 \text{ minutos}
 \end{aligned}$$

- De demanda.

Demanda mínima para el producto uno.

$$x_1 \text{ unidades de producto uno} \geq 20 \text{ unidades de producto uno}$$

Demanda mínima para el producto dos.

$$x_2 \text{ unidades de producto dos} \geq 20 \text{ unidades de producto dos}$$

Demanda mínima para el producto tres.

$$x_3 \text{ unidades de producto tres} \geq 30 \text{ unidades de producto tres}$$

Demanda mínima para el producto cuatro.

$$x_4 \text{ unidades de producto cuatro} \geq 40 \text{ unidades de producto cuatro}$$

Demanda mínima para el producto cinco.

$$x_5 \text{ unidades de producto cinco} \geq 30 \text{ unidades de producto cinco}$$

Demanda máxima para el producto uno.

$$x_1 \text{ unidades de producto uno} \leq 100 \text{ unidades de producto uno}$$

Demanda máxima para el producto dos.

$$x_2 \text{ unidades de producto dos} \leq 120 \text{ unidades de producto dos}$$

Demanda máxima para el producto tres.

$$x_3 \text{ unidades de producto tres} \leq 100 \text{ unidades de producto tres}$$

Demanda máxima para el producto cuatro.

$$x_4 \text{ unidades de producto cuatro} \leq 100 \text{ unidades de producto cuatro}$$

Demanda máxima para el producto cinco.

$$x_5 \text{ unidades de producto cinco} \leq 100 \text{ unidades de producto cinco}$$

Formulación compacta

En la gran mayoría de situaciones prácticas el número de variables de decisión y de restricciones suele ser bastante grande. Es por ello que formular los problemas de forma explícita puede resultar bastante tedioso e inoperante, razón por la que se recurre a formulaciones compactas.

Estas tienen la ventaja de que permiten modelar una situación general, cambiar el valor de los parámetros de acuerdo a la dinámica de las situaciones e introducir los problemas al software de solución de forma eficiente.

En las formulaciones compactas se definen variables, parámetros, restricciones y función objetivo en forma general; para ellos es necesario recurrir a la utilización de sumatorias, que se expresan con el símbolo que indica que se debe hacer n veces la suma contenida en él.

También es necesario definir los conjuntos sobre los cuales se moverán los índices sobre los que se mueven las sumatorias.

Para el ejemplo anterior (la empresa manufacturera), suponga la situación general en que se fabrican p productos en n estaciones de trabajo utilizando m materias primas.

Definición de conjuntos

- Productos
Se utilizará el índice i . $i = 1, 2, 3, \dots, p$.
- Estaciones de trabajo
Se utilizará el índice j . $j = 1, 2, 3, \dots, n$.
- Materias primas
Se utilizará el índice k . $k = 1, 2, 3, \dots, m$.

Definición de parámetros

- Estos simbolizan la información conocida y generalmente dependen de los conjuntos.
- Utilidad monetaria del producto i : u_i

- Tiempo de proceso del producto i en la estación j : $t_{j,i}$
- Horas disponibles por semana en la estación j : H_j
- Cantidad de materia prima k para producir una unidad del producto i : $c_{k,i}$
- Disponibilidad semanal de la materia prima k : MP_k
- Demanda mínima semanal del producto i : dm_i
- Demanda máxima semanal del producto i : dmx_i

Definición de variables

Se definen p variables, una por cada producto.

- x_i = Unidades del producto i que se deben producir semanalmente.

Función objetivo

$$\text{Maximizar } Utilidad = \sum_{i=1}^p u_i p_i$$

Restricciones:

- De capacidad

$$\sum_{i=1}^p t_{i,j} x_j \leq H_j \quad \forall j$$

El símbolo $\forall$ se lee “para todo”, en este caso indica que por cada valor de j se debe generar una restricción (en cada una de ellas la suma se hace sobre i). Es decir que en forma compacta se está indicando que existen restricciones de este tipo (una por cada estación de trabajo).

- De disponibilidad de materia prima.

$$\sum_{i=1}^p c_{k,i} x_i \leq MP_k \quad \forall k$$

- De demanda máxima semanal.

$$x_i \leq dmáx_i \quad \forall i$$

- De demanda mínima semanal.

$$x_i \geq dm_i \quad \forall i$$

El modelo compacto es:

$$\text{Maximizar } Utilidad = \sum_{i=1}^p u_i p_i,$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p t_{i,j} x_j &\leq H_j \quad \forall j \\ \sum_{i=1}^p c_{k,i} x_i &\leq MP_k \quad \forall k \\ x_i &\leq dmáx_i \quad \forall i \\ x_i &\geq dm_i \quad \forall i \end{aligned}$$

Ejemplo 4¹

Una compañía con sede en Bogotá debe enviar a su representante de ventas a realizar una gira de promoción por las ciudades de Cartagena, Cali, Medellín, Tunja, Villavicencio y Armenia. El representante debe salir de la ciudad de Bogotá y volver a esta habiendo visitado cada una de las ciudades una y solo una vez.

A continuación se proporcionan las distancias en kilómetros entre cada una de las ciudades involucradas.

¹Esta situación se conoce como “problema del agente viajero”, TSP por sus siglas en inglés, y existe abundante bibliografía disponible para consultar.

	Cartagena	Medellín	Armenia	Bogotá	Tunja	Cali
Cartagena	———	460	646	655	580	778
Medellín	460	———	193	238	252	325
Armenia	646	193	———	178	280	150
Bogotá	655	238	178	———	120	300
Tunja	580	252	280	120	———	420
Cali	778	325	150	300	420	———

La empresa sabe que el costo de los viajes es proporcional a la distancia que deba recorrer el representante ¿en qué orden se deben hacer las visitas para minimizar la distancia total recorrida?

Solución

Estando en Bogotá el representante debe elegir a qué ciudad viajar, una vez allí debe decidir la siguiente ciudad a visitar y así sucesivamente hasta completar todo el ciclo regresando a Bogotá.

En esta situación es necesario utilizar variables binarias definidas de la siguiente forma:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si el vendedor visita la ciudad } j \text{ inmediatamente después} \\ & \text{de visitar la ciudad } i. \\ 0 & \text{si el vendedor NO visita la ciudad } j \text{ inmediatamente} \\ & \text{después de visitar la ciudad } i. \end{cases}$$

Por ejemplo, si el representante va de Bogotá a Cali entonces la variable vale 1 y las otras variables, $x_{Bogotá,j}$, que signifiquen ir de Bogotá a otra ciudad diferente de Cali deben ser cero.

Obviamente no tiene sentido ir de una ciudad a ella misma, por lo tanto las variables no se deben definir. Se tendrían entonces las siguientes variables binarias:

$$\begin{aligned}
& x_{Bt\acute{a}, Tunja} \quad x_{Bt\acute{a}, C/gena} \quad x_{Bt\acute{a}, M/ll\acute{in}} \quad x_{Bt\acute{a}, Armenia} \quad x_{Bt\acute{a}, Cali} \\
& x_{Cali, Bt\acute{a}} \quad x_{Cali, Tunja} \quad x_{Cali, M/ll\acute{in}} \quad x_{Cali, Armenia} \quad x_{Cali, C/gena} \\
& x_{M/ll\acute{in}, Bt\acute{a}} \quad x_{M/ll\acute{in}, Tunja} \quad x_{M/ll\acute{in}, Armenia} \quad x_{M/ll\acute{in}, Cali} \quad x_{M/ll\acute{in}, C/gena} \\
& x_{C/gena, Bt\acute{a}} \quad x_{C/gena, Tunja} \quad x_{C/gena, Armenia} \quad x_{C/gena, M/ll\acute{in}} \quad x_{C/gena, Cali} \\
& x_{Armenia, Bt\acute{a}} \quad x_{Armenia, Tunja} \quad x_{Armenia, M/ll\acute{in}} \quad x_{Armenia, C/gena} \quad x_{Armenia, Cali} \\
& x_{Tunja, Bt\acute{a}} \quad x_{Tunja, M/ll\acute{in}} \quad x_{Tunja, Armenia} \quad x_{Tunja, C/gena} \quad x_{Tunja, Cali}
\end{aligned}$$

La funci3n objetivo es minimizar la distancia recorrida:

$$\begin{aligned}
& 120x_{Bt\acute{a}, Tunja} + 655x_{Bt\acute{a}, C/gena} + 238x_{Bt\acute{a}, M/ll\acute{in}} + 178x_{Bt\acute{a}, Armenia} \\
& + 300x_{Bt\acute{a}, Cali} + 300x_{Cali, Bt\acute{a}} + 420x_{Cali, Tunja} + 325x_{Cali, M/ll\acute{in}} \\
& + 150x_{Cali, Armenia} + 778x_{Cali, C/gena} + 238x_{M/ll\acute{in}, Bt\acute{a}} + 252x_{M/ll\acute{in}, Tunja} \\
& + 193x_{M/ll\acute{in}, Armenia} + 325x_{M/ll\acute{in}, Cali} + 460x_{M/ll\acute{in}, C/gena} + 655x_{C/gena, Bt\acute{a}} \\
& + 580x_{C/gena, Tunja} + 646x_{C/gena, Armenia} + 460x_{C/gena, M/ll\acute{in}} \\
& + 778x_{C/gena, Cali} + 178x_{Armenia, Bt\acute{a}} + 280x_{Armenia, Tunja} + 193x_{Armenia, M/ll\acute{in}} \\
& + 646x_{Armenia, C/gena} + 150x_{Armenia, Cali} + 120x_{Tunja, Bt\acute{a}} + 252x_{Tunja, M/ll\acute{in}} \\
& + 280x_{Tunja, Armenia} + 580x_{Tunja, C/gena} + 420x_{Tunja, Cali}
\end{aligned}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

- Despu3s de visitar una ciudad se debe visitar otra diferente.

$$\begin{aligned}
& x_{Bt\acute{a}, Tunja} + x_{Bt\acute{a}, C/gena} + x_{Bt\acute{a}, M/ll\acute{in}} + x_{Bt\acute{a}, Armenia} + x_{Bt\acute{a}, Cali} = 1 \\
& x_{Cali, Bt\acute{a}} + x_{Cali, Tunja} + x_{Cali, M/ll\acute{in}} + x_{Cali, Armenia} + x_{Cali, C/gena} = 1 \\
& x_{M/ll\acute{in}, Bt\acute{a}} + x_{M/ll\acute{in}, Tunja} + x_{M/ll\acute{in}, Armenia} + x_{M/ll\acute{in}, Cali} \\
& + x_{M/ll\acute{in}, C/gena} = 1 \\
& x_{C/gena, Bt\acute{a}} + x_{C/gena, Tunja} + x_{C/gena, Armenia} + x_{C/gena, M/ll\acute{in}} \\
& + x_{C/gena, Cali} = 1 \\
& x_{Armenia, Bt\acute{a}} + x_{Armenia, Tunja} + x_{Armenia, M/ll\acute{in}} + x_{Armenia, C/gena} \\
& + x_{Armenia, Cali} = 1 \\
& x_{Tunja, Bt\acute{a}} + x_{Tunja, M/ll\acute{in}} + x_{Tunja, Armenia} + x_{Tunja, C/gena} \\
& + x_{Tunja, Cali} = 1
\end{aligned}$$

- Cada ciudad debe ser visitada una y solo una vez.

$$x_{Cali,Btá} + x_{M/llín,Btá} + x_{C/gena,Btá} + x_{Armenia,Btá} + x_{Tunja,Btá} = 1$$

$$x_{Btá,Cali} + x_{M/llín,Cali} + x_{C/gena,Cali} + x_{Armenia,Cali} + x_{Tunja,Cali} = 1$$

$$x_{Btá,M/llín} + x_{Cali,M/llín} + x_{C/gena,M/llín} + x_{Armenia,M/llín} + x_{Tunja,M/llín} = 1$$

$$x_{Btá,C/gena} + x_{Cali,C/gena} + x_{M/llín,C/gena} + x_{Armenia,C/gena} + x_{Tunja,C/gena} = 1$$

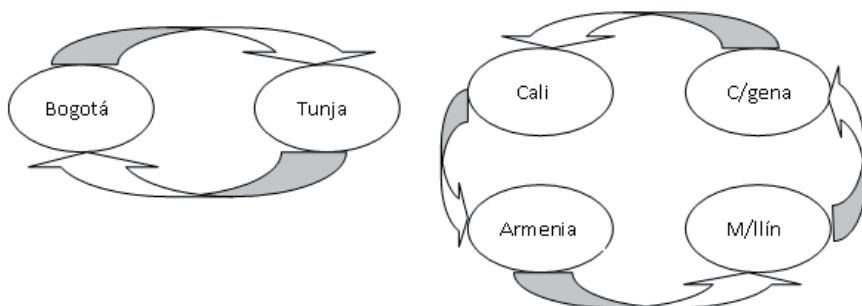
$$x_{Btá,Armenia} + x_{Cali,Armenia} + x_{M/llín,Armenia} + x_{C/gena,Armenia} + x_{Tunja,Armenia} = 1$$

$$x_{Btá,Tunja} + x_{Cali,Tunja} + x_{M/llín,Tunja} + x_{C/gena,Tunja} + x_{Armenia,Tunja} = 1$$

Nótese que la primera restricción de este tipo indica que se debe volver a Bogotá

Aunque pareciera que con las 12 restricciones definidas es suficiente para solucionar el problema, no es del todo cierto, puesto que se pueden cumplir mediante la formación de “subciclos”.

Es evidente que la situación ilustrada a continuación no cumple con lo que la empresa busca (salir de Bogotá, visitar cada ciudad una sola vez y regresar a Bogotá), pero sí satisface todas las restricciones formuladas anteriormente.



Para evitar este tipo de situaciones se deben formular restricciones que impidan la formación de todos los subciclos que pudieran existir. En la situación planteada, puesto que hay seis ciudades, se pueden

formar subciclos de tamaño dos, complementados con subciclos de tamaño cuatro, o un subciclo de tamaño tres complementado con otro de igual tamaño. Nótese que al eliminar los subciclos de tamaño dos se eliminan los subciclos de tamaño cuatro (¿por qué?).

Se necesitan entonces las siguientes 15 restricciones adicionales para evitar los subciclos de tamaño dos (y simultáneamente los subciclos de tamaño cuatro):

$$\begin{aligned}
x_{Btá,Cali} + x_{Cali,Btá} &\leq 1 \\
x_{Btá,M/llín} + x_{M/llín,Btá} &\leq 1 \\
x_{Btá,C/gena} + x_{C/gena,Btá} &\leq 1 \\
x_{Btá,Armenia} + x_{Armenia,Btá} &\leq 1 \\
x_{Btá,Tunja} + x_{Tunja,Btá} &\leq 1 \\
x_{Cali,M/llín} + x_{M/llín,Cali} &\leq 1 \\
x_{Cali,C/gena} + x_{C/gena,Cali} &\leq 1 \\
x_{Cali,Armenia} + x_{Armenia,Cali} &\leq 1 \\
x_{Cali,Tunja} + x_{Tunja,Cali} &\leq 1 \\
x_{M/llín,C/gena} + x_{C/gena,M/llín} &\leq 1 \\
x_{M/llín,Armenia} + x_{Armenia,M/llín} &\leq 1 \\
x_{M/llín,Tunja} + x_{Tunja,M/llín} &\leq 1 \\
x_{Armenia,C/gena} + x_{C/gena,Armenia} &\leq 1 \\
x_{Armenia,Tunja} + x_{Tunja,Armenia} &\leq 1 \\
x_{Tunja,C/gena} + x_{C/gena,Tunja} &\leq 1
\end{aligned}$$

En el ejercicio 6 se le pide al lector completar las restricciones necesarias para evitar la formación de subciclos de tamaño tres.

Formulación compacta

Es evidente que si el número de ciudades que debe visitar el representante de ventas es grande, la definición explícita de las variables, la formulación de la función objetivo y de las restricciones necesarias, se hace bastante dispendiosa.

Para el ejemplo cuatro, se definen los siguientes parámetros:

n : número de ciudades que se deben visitar

$d_{i,j}$: distancia que separa la ciudad i de la ciudad j .

y se definen las siguientes variables:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si el vendedor visita la ciudad } j \text{ inmediatamente después} \\ & \text{de visitar la ciudad } i. \\ 0 & \text{si el vendedor NO visita la ciudad } j \text{ inmediatamente} \\ & \text{después de visitar la ciudad } i. \end{cases}$$

Para toda pareja i, j con la condición que $i \neq j$.

La función objetivo es:

$$\text{Minimizar } Distancia = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{i,j} d_{i,j},$$

Puesto que j es el índice interior, se empieza a realizar la suma variando j y dejando fijo i , una vez se cubren los n valores de j , se aumenta i en una unidad y se vuelve a sumar sobre j .

$$\begin{aligned} & x_{1,1} + x_{1,2} + \dots + x_{1,n} + x_{2,1} + x_{2,2} + \dots + x_{2,n} + x_{3,1} \\ & + x_{3,2} + \dots + x_{3,n} + \dots + x_{n,1} + x_{n,2} + \dots + x_{n,n-1} \end{aligned}$$

Recuerde que en este caso las variables de la forma $x_{i,j}$ no se definieron.

Las restricciones expresadas en forma compacta son:

- Una vez visitada una ciudad, se debe partir hacia otra no visitada aún.

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1 \quad \forall j$$

- Toda ciudad debe ser visitada una y solo una vez.

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1 \quad \forall j$$

Se está indicando que se requiere una restricción de estas por cada ciudad, es decir n restricciones.

- Restricciones que previenen la formación de subciclos.

Existen varias alternativas para formular estas restricciones. La alternativa que se indica a continuación se basa en definir todos los subconjuntos S de ciudades con que se pueden formar subciclos de tamaño dos hasta tamaño $n - 1$, e impedir su formación. N simboliza el conjunto de las n ciudades a visitar.

Se definen todos los subconjuntos de N

$$S \subseteq N$$

tales que:

$$2 \leq |S| \leq n - 1$$

$|S|$ es el número de elementos que tiene el subconjunto S .

y para cada subconjunto se define la restricción

$$\sum_{(i,j)|i \in S, j \in S} x_{i,j} \leq |S| - 1$$

En resumen, la formulación compacta del problema es:

$$\text{Minimizar } Distancia = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{i,j} x_{i,j},$$

sueto a:

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{(i,j)|i \in S, j \in S} x_{i,j} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq N \quad \text{tal que } 2 \leq |S| \leq n - 1$$

EJERCICIOS

1. Un amigo compró un carro viejo que le gustaba mucho porque se puede manejar de forma automática o mecánica según convenga, pero que consume bastante combustible; razón por la cual decidió hacerle la conversión a gas vehicular. Después de la revisión técnico mecánica en el centro de diagnóstico le dieron una tabla con los siguientes datos para viaje en carretera.

FORMA DE CONDUCCIÓN	RESPUESTAS	Gasolina	Gas
Automático	Gasto en Combustible (\$/h)	23.400	9.500
	Velocidad (km/h)	90	58
Mecánico	Gasto en Combustible (\$/h)	18.750	10.700
	Velocidad (km/h)	80 Km/h	63

Por razones de trabajo, debe viajar frecuentemente de Bogotá a Bucaramanga (394 Km) y quiere saber cuáles son las condiciones más adecuadas para hacerlo, si quiere cumplir las siguientes condiciones:

- No quiere demorarse más de 6 horas en el viaje.
- El límite de velocidad en el camión del Chicamocha (30Km) es de 65Km/h.
- Para facilitar la movilidad, el tramo de doble calzada (120Km) no se puede recorrer con velocidad inferior a 80km/h.
- En un total de 70Km montañosos no se debe transitar a más de 80Km/h

Formule el problema en forma explícita y en forma compacta.

2. Una fundación ha invitado a un grupo de cinco expertos internacionales para que den una serie de conferencias sobre Responsabilidad Social Empresarial. Se dispone de un amplio auditorio en

el que los cinco expertos deben hacer sus charlas en una misma mañana (el orden en que lo hagan puede ser cualquiera). Se sabe que los recursos y ayudas que cada uno de ellos necesita son diferentes, afectando los tiempos necesarios a fin de dejar listo el salón para cada presentación.

El jefe de logística ha establecido cuáles son los tiempos de preparación (en minutos) del salón, de acuerdo a quien preceda y quien siga en la programación.

Experto	Organizador	Japonés	Alemán	Coreano	Canadiense	Suizo
Organizador	M	16	24	17	21	14
Japonés	13	M	17	14	14	12
Alemán	10	23	M	11	23	13
Coreano	22	15	11	M	17	18
Canadiense	10	5	13	10	M	21
Suizo	16	15	2	11	25	M

La jornada inicia con unas palabras del organizador y la culmina también el organizador, dando las conclusiones de las cinco conferencias.

Realice la formulación del problema que permita contestar la siguiente pregunta: ¿en qué orden se deben realizar las conferencias para minimizar el tiempo empleado en los alistamientos del salón? Tenga en cuenta que M representa un valor muy grande.

- La Secretaría de Educación de la ciudad capital ha realizado grandes esfuerzos a fin de lograr la cobertura universal en educación para niños y jóvenes, logrando una tasa de cobertura neta ajustada del 92.3 % el año 2008. Para lograrlo, en las diferentes localidades se construyeron modernos colegios públicos debidamente dotados y se remodelaron los ya existentes.

Con las dos siguientes tablas se puede calcular la oferta de cupos por parte del sector oficial.

Localidad	Colegios Distritales	Colegios en concesión	Número de sedes	Colegios en convenio
Usaquén	11	1	28	9
Chapinero	3		9	3
Santa Fe	9	1	19	2
San Cristóbal	33	2	66	12
Usme	45	5	71	26
Tunjuelito	12		26	5
Bosa	25	5	52	45
Kennedy	40	3	78	50
Fontibón	10		21	6
Engativá	31	2	66	34
Suba	26	2	53	74
Barrios Unidos	10		25	2
Teusaquillo	2		3	1
Los Mártires	8		11	1
Antonio Nariño	5		10	2
Puente Aranda	15		32	0
La Candelaria	2		4	2
Rafael Uribe Uribe	26	1	54	23
Ciudad Bolívar	38	3	77	40
Sumapaz	4		29	0
Total	366	26	734	337

Capacidad promedio de un colegio característico de cada localidad.

Localidad	Número de Estudiantes
Usaquén	950
Chapinero	500
Santa Fe	850
San Cristóbal	1.100

Continúa

Usme	900
Tunjuelito	1.600
Bosa	1.300
Kennedy	1.200
Fontibón	1.300
Engativá	1.000
Suba	900
Barrios Unidos	800
Teusaquillo	1.000
Los Mártires	1.300
Antonio Nariño	1.000
Puente Aranda	1.200
La candelaria	850
Rafael Uribe Uribe	1.100
Ciudad Bolívar	1.200
Sumapaz	65

Por otra parte, para el mismo año la demanda del sistema educativo oficial en Bogotá D.C fue la siguiente.

Localidad	Número de Estudiantes
Usaquén	36.315
Chapinero	5.492
Santa Fe	17.314
San Cristóbal	80.043
Usme	83.871
Tunjuelito	47.416
Bosa	124.350
Kennedy	147.914

Continúa

Fontibón	33.405
Engativá	101.214
Suba	119.545
Barrios Unidos	20.872
Teusaquillo	4.398
Los Mártires	15.943
Antonio Nariño	13.476
Puente Aranda	37.030
La candelaria	5.158
Rafael Uribe Uribe	85.792
Ciudad Bolívar	131.597
Sumapaz	1.383
Total	1.112.528

En la siguiente tabla se muestra el tiempo de desplazamiento, en minutos, entre las diferentes localidades.

Para efectos del problema una sede se cuenta como un colegio, así el número de colegios oficiales disponibles por cada localidad es la suma del número de sedes y colegios en convenio.

Utilizando los datos disponibles para el año 2008, teniendo en cuenta que se quiere lograr una cobertura del 100 % y suponiendo que los colegios de una misma localidad tienen igual capacidad, formular un problema de Programación Lineal cuya solución permita asignar cupos a la población en edad escolar de la ciudad que demanden estudiar en colegios oficiales, minimizando el tiempo de desplazamiento desde su casa hasta el colegio.

4. Dos empresas que poseen tecnología y procesos parecidos, dominan el mercado de dos productos en el país. La empresa 1 tiene el 57 % del mercado del producto P y el 48 % del mercado del producto R, mientras que la empresa 2 tiene el 53 % del mercado del producto Q.

Las dos empresas tienen un proceso secuencial para cada uno de los productos. En la siguiente tabla se muestran los tiempos de proceso (en minutos), por unidad de producto en cada una de las máquinas.

	EMPRESA 1			EMPRESA 2		
Máquina	P	Q	R	P	Q	R
A	13	11	12	17	10	12
B	16	13	12	13	14	11
C	11	14	11	16	12	15
D	10	15	11	12	15	11

En las siguientes tablas se muestra la relación de unidades de materia prima/unidad de producto (PF) para cada uno de los productos y para cada una de las empresas.

EMPRESA 1			
Producto	MP/PF	\$/unidad producto	\$/unidad materia prima
P	3.5	180000	25000
Q	2.75	160000	30000
R	2.5	170000	40205

EMPRESA 2			
Productos	MP/PF	\$/unidad producto	\$/unidad materia prima
P	3.2	190000	30000
Q	2.8	150300	28500
R	2.5	165000	30000

A continuación encuentran las condiciones de demanda que son totalmente determinantes y suponen que si la empresa es capaz de producir hasta esa cantidad, el mercado la compra.

Demanda semanal de productos

Período	P	Q	R
1	170	170	138
2	168	168	142
3	194	174	146
4	191	165	152
5	204	177	156

Las demandas de los productos P, Q y R para la semana 6 se calculan como el promedio de las demandas de la semana uno a la cinco.

Cada empresa tiene 10 operarios a quienes les paga \$ 8000/hora, los costos generales se pueden asumir como 1.5 veces los costos laborales. La suma de los costos generales y los costos laborales se toman como los costos fijos. La empresa trabaja 12 horas al día, 5 días de la semana.

Formule el modelo de Programación Lineal que permita solucionar la situación planteada.

5. Una planta de producción de Biodiesel ubicada en Bogotá utiliza dos tipos de materias primas para elaborar dos clases comerciales de combustible, B40 y B50.

El equipo de investigación y desarrollo de la compañía ha establecido que los ácidos grasos más adecuados para la producción de biodiesel son los C18:1 y C16:1. Por otra parte, la cantidad máxima permitida de monoglicéridos en el producto final es del 0.8 % según la normativa DIN 51606.

El contenido de cada uno de los componentes para las diferentes materias primas se muestra a continuación.

Materia Prima	C18:1	C16:1	Monoglicéridos	Costo/tonelada
AP1	55 %	40 %	0.7 %	U\$ 550
AP2	43 %	58 %	0.6 %	U\$ 600

El departamento de I+I&D ha entregado al departamento de producción la siguiente tabla de composición para los combustibles B40 y B50.

Combustible	C18:1	C16:1	Monoglicéridos
B40	Más del 40 %	Menos del 55 %	Máx 0.8 %
B50	Menos del 50 %	Más del 35 %	Máx 0.75 %

Analizando los niveles de inventario y las órdenes de compra ya realizadas, la empresa debe utilizar por lo menos dos toneladas diarias de materia prima AP1 y cinco de AP2.

Los compromisos comerciales obligan a la empresa a producir diariamente, por lo menos, cuatro toneladas de biocombustible B40 y diez de B50 (suponga que una tonelada de materia prima produce una tonelada de biocombustible).

Formule el correspondiente problema de Programación Lineal que le permita a la empresa minimizar los costos cumpliendo los requerimientos.

- 6. Complete las restricciones del ejemplo dos de este capítulo que impiden la formación de subciclos de tamaño tres ¿cuántas son? y ¿cómo se calcula el número de restricciones necesarias?
- 7. Una empresa de transporte terrestre de pasajeros atiende seis destinos desde la ciudad de Bogotá. Debido al contrato que tiene con el terminal de transportes, dispone de tres sitios de parqueo

para sus busetas, lo que le obliga a despachar máximo tres viajes de forma simultánea. Adicionalmente, por restricciones de tráfico y seguridad, los viajes se deben hacer en cinco horarios definidos. La siguiente tabla muestra los ingresos esperados, (de acuerdo a la demanda histórica), de hacer un viaje a un destino en determinado horario y el número de viajes que se deben realizar a cada destino para satisfacer la demanda.

	Girardot	V/cencio	Paipa	Villeta	Choachí	Subachoque
8 AM	\$ 259000	\$ 506000	\$ 247000	\$ 244000	\$ 191000	\$ 207000
10 AM	\$ 337000	\$ 484000	\$ 214000	\$ 265000	\$ 214000	\$ 163000
12 M	\$ 261000	\$ 497000	\$ 248000	\$ 206000	\$ 188000	\$ 196000
2 PM	\$ 331000	\$ 466000	\$ 253000	\$ 258000	\$ 178000	\$ 177000
3 PM	\$ 250000	\$ 474000	\$ 278000	\$ 227000	\$ 195000	\$ 204000
Nº de viajes	4	5	2	2	1	1

¿En qué horarios se deben despachar los viajes requeridos para cada destino?

Referencias bibliográficas

BOLETÍN ESTADÍSTICO. *Estadística del sector educativo de Bogotá 2008*. Secretaría de Educación del Distrito, Oficina Asesora de Planeación. 2009. Bogotá D.C.

HILLIER, Frederick. LIEBERMAN, Gerald. *Introduction to Operations Research Seventh Edition*, McGraw-Hill, New York. 2001.

TAHA, Hamdy. *Investigación de Operaciones*. 7 ed en español, Pearson-Prentice Hall, México. 2004.

CAPÍTULO 5

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL: EL MÉTODO SIMPLEX

El método simplex es el más popular para la resolución de problemas de Programación Lineal. Fue creado en 1947 por George Dantzig y aplicado por primera vez en la planeación de una dieta.

Antes de entrar de lleno a la explicación del método simplex, es conveniente repasar algunos aspectos de la estructura de los problemas de Programación Lineal.

Un problema de Programación Lineal siempre tiene como componentes: un conjunto de variables de decisión, una función objetivo y un conjunto de restricciones. Por otra parte, como se mencionó en la sección 3.1, las restricciones siempre pueden escribirse en forma de igualdad después de añadir las correspondientes variables de holgura o de exceso.

Recuérdese que la función objetivo es una combinación lineal de las variables de decisión y debe maximizarse o minimizarse. Las restricciones también son combinaciones lineales de las variables de decisión y están igualadas (después de introducir las variables de holgura o de exceso) a un valor constante (que puede ser cero). Suponiendo que se

tienen n variables, incluyendo las de holgura y exceso, y m restricciones, el problema de programación lineal es de la forma:

Minimizar (o Maximizar) $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$,
sujeto a:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots & \quad \quad \quad \vdots & \quad \quad \quad \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

De la anterior representación se pueden obtener los siguientes elementos:

- **c:** n -vector fila de los coeficientes de la función objetivo.

$$c = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_m \ c_{m+1} \ \dots \ c_n]$$

- **A:** Matriz ($m \times n$) de coeficientes de las restricciones.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & a_{2,m+1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} & a_{3,m+1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} & a_{m,m+1} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Conviene para algunas explicaciones posteriores, considerar la matriz **A** como un arreglo de vectores columna, es decir $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \dots \ \mathbf{a}_m \ \mathbf{a}_{m+1} \ \dots \ \mathbf{a}_n]$, donde

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \text{y en general} \quad \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

- **b**: m -vector columna de términos libres (lados derechos de las restricciones).

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Vector de variables **x**.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Por lo que el problema de Programación Lineal puede escribirse de forma simplificada

Minimizar (O Maximizar) $\mathbf{cx}$,
sujeto a:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nótese que solucionar el problema Programación Lineal consiste en expresar el vector **b** como una combinación lineal de las columnas que forman la matriz **A**, donde las variables **x** hacen las veces de coeficientes de combinación, los cuales deben ser no negativos.

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para que el problema tenga solución, es necesario que el sistema aumentado $[\mathbf{AB}]$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_{m1} \end{bmatrix}$$

tenga rango igual al de $\mathbf{A}$ (supóngase que es m). Si el rango de $[\mathbf{AB}]$ es igual a $(m + 1)$, entonces el vector $\mathbf{b}$ no se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de la matriz $\mathbf{A}$ y por lo tanto el sistema no tiene solución.

Para entrar a explicar el método simplex, primero se debe reescribir el problema general mostrado en la ecuación (general).

Dado que a las matrices se les puede realizar la operación de partición, entonces la matriz $\mathbf{A}$ se puede descomponer en $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$, donde $\mathbf{B}$ es una matriz invertible de $(m \times m)$, conformada por m columnas de la matriz $\mathbf{A}$, y $\mathbf{N}$ es una matriz de $m \times (m - n)$, constituida por las $(n - m)$ columnas de $\mathbf{A}$ que no se incluyeron en la base.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & a_{1,m+3} & \dots & a_{1n} \\ a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & a_{2,m+3} & \dots & a_{2n} \\ a_{3,m+1} & a_{3,m+2} & a_{3,m+3} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & a_{m,m+3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El vector $\mathbf{x}$ también se descompone en $\mathbf{x}_B$ y $\mathbf{x}_N$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ x_{m+3} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Los coeficientes correspondientes a $\mathbf{x}_B$ y $\mathbf{x}_N$, en la función objetivo, se agrupan en los vectores fila.

$$\mathbf{c}_B = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ \dots \ c_m] \quad \mathbf{c}_N = [c_{m+1} \ c_{m+2} \ c_{m+3} \ \dots \ c_n]$$

Debido a que la matriz $\mathbf{B}$ se denomina la base del sistema, las variables correspondientes a las columnas que conforman $\mathbf{B}$ son las que hacen parte del vector $\mathbf{x}_B$, el cual es llamado vector de las variables básicas. Las restantes variables se agrupan en el vector de variables no básicas $\mathbf{x}_N$.

Es importante anotar que la matriz base $\mathbf{B}$ se conforma tomando m columnas (o tantas columnas como el rango de $\mathbf{A}$), elegidas de forma tal que conformen una matriz no singular (invertible). Con esto se quiere dejar claro que no es necesario (y en algunos casos no es conveniente) tomar las primeras m columnas de $\mathbf{A}$ para conformar la matriz $\mathbf{B}$. Las columnas restantes de $\mathbf{A}$ conformaran la matriz $\mathbf{N}$.

Con lo anterior, la región factible del problema

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{5.3}$$

se puede reescribir

$$[\mathbf{B}\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b} \tag{5.4}$$

Haciendo que las variables no básicas tomen un valor de cero, se tiene:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \tag{5.5}$$

Multiplicando por la derecha a ambos lados de la igualdad por la matriz inversa de $\mathbf{B}$ se llega a:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{5.6}$$

Se tienen ahora valores definidos para las variables del vector $\mathbf{x}$, ya que las $n - m$ variables que conforman $\mathbf{x}_N$ tienen un valor de cero y las m variables básicas tienen el valor dado por $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

A la anterior solución se le llama básica; y si $\mathbf{x}_B \geq 0$ se le denomina **solución básica factible**. Puede pasar que en una solución básica factible todos los valores de las variables sean positivos, $\mathbf{x}_B > 0$, en cuyo caso la solución se denomina *básica no degenerada*. Por el contrario, si al menos un valor de las variables básicas es cero, la solución se conoce como *solución básica degenerada*.

$$\text{Solución básica factible} \begin{cases} \text{No degenerada} \\ \text{Degenerada} \end{cases}$$

Cada una de las posibles bases que se puedan formar con las columnas de la matriz $\mathbf{A}$, dará lugar a una solución básica. Por lo tanto, si se tiene que el rango de $\mathbf{A}$ es igual a m (su número de filas), entonces el número máximo de soluciones básicas está acotado por la combinatoria de n , tomado de m en m , es decir el número de matrices cuadradas invertibles de tamaño $m \times m$ que se pueden formar a partir de las n columnas de $\mathbf{A}$.

$$\text{Número máximo de soluciones básicas} = {}_nC_m$$

Una forma de solucionar un problema de Programación Lineal consiste en obtener todas las bases posibles a partir de $\mathbf{A}$, verificar cuáles conducen a soluciones básicas factibles, determinar el valor de dichas soluciones y sustituir en la función objetivo. Si se está maximizando se escogerá aquella que conduzca a un mayor valor de z y si se está minimizando, aquella que lleve al menor valor de z .

Aunque el procedimiento descrito en el párrafo anterior garantiza encontrar la solución óptima, tienen la desventaja de tener que explorar todas las soluciones básicas factibles, y dependiendo del tamaño del problema éstas pueden ser excesivas, lo cual hace que el tiempo consumido para los cálculos sea demasiado grande en la práctica.

Por ejemplo, considere un problema de 50 variables de decisión y 25 restricciones, en este caso ${}_{50}C_{25} = 1,26 \times 10^{14}$. Este número es una cota superior del número de bases que deberían probarse; sin embargo no necesariamente con todas ellas se obtiene una solución básica factible.

Para efectos de cálculo supongamos que un muy buen computador puede analizar en un segundo un millón de bases (hallar su inversa, obtener la solución asociada y sustituir en la función objetivo), le llevaría 126'410.606 segundos realizar estas operaciones, es decir cuatro años.

Si el problema tiene 100 variables de decisión y 70 restricciones, ${}_{100}C_{70} = 2,937 \times 10^{25}$, el mismo computador tardaría $2,937 \times 10^{19}$ segundos en analizar las soluciones, lo que corresponde a 9,313'907,858 siglos (la coma indica miles).

Dadas las anteriores consideraciones, no parece muy inteligente adoptar esta estrategia para problemas con un número grande de variables y restricciones (los problemas reales en la gran mayoría de casos son de este tipo). Se necesitan procedimientos que se basen en otras consideraciones y no tengan que explorar todas las posibles soluciones al problema. Afortunadamente el método simplex es uno de ellos.

El método simplex es un procedimiento muy elaborado y elegante, pero sencillo de aplicar y fácil de entender. Básicamente lo que hace este método es ubicarse en una solución básica factible y por consideraciones locales (sin tener que explorar las restantes) determinar si es óptima o no.

Considere que se conoce una solución básica factible

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

que al remplazarla en la función objetivo permite obtener un valor

$$[\mathbf{c}_B \quad \mathbf{c}_N] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B \cdot \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (5.8)$$

al que se denominará z_0 .

La factibilidad exige que:

$$\mathbf{x}_B \geq 0, \mathbf{x}_N \geq 0 \quad (5.9)$$

y

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N \quad (5.10)$$

Para obtener $\mathbf{x}_B$ se multiplica la última expresión por $\mathbf{B}^{-1}$ (por la derecha) y se reacomodan los términos, obteniendo:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \quad (5.11)$$

$$= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in I} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j \quad (5.12)$$

$$= \bar{\mathbf{b}} - \sum_{j \in I} \mathbf{y}_j x_j \quad (5.13)$$

El conjunto I está compuesto por los índices de las variables *independientes* o no básicas actuales.

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in I} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j \right) + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in I} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j \right) + \sum_{j \in I} c_j x_j \end{aligned} \quad (5.14)$$

Pero $z_0 = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$ por lo que:

$$\begin{aligned} z &= z_0 - \mathbf{c}_B \sum_{j \in I} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j + \sum_{j \in I} c_j x_j \\ z &= z_0 - \sum_{j \in I} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j x_j + \sum_{j \in I} c_j x_j \end{aligned} \quad (5.15)$$

si se llama z_j al término $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$ y se toma x_j como factor común, se tiene:

$$z = z_0 - \sum_{j \in I} (z_j - c_j) x_j \quad (5.16)$$

No se debe perder de vista que z_j es un número y no un vector. Al término $(z_j - c_j)$ se le conoce como **costo reducido** y es bastante útil para determinar la *óptimalidad* de una solución básica factible.

Los costos reducidos se calculan para cada una de las variables independientes (o no básicas), que se han definido en la solución actual. Puesto que a dichas variables se les ha asignado un valor de cero,

el valor de la función objetivo $z = z_0 - \sum_{j \in I} (z_j - c_j) x_j$ es en este momento $z = z_0$, no obstante los costos reducidos de las variables no básicas pueden tomar cualquier valor. La pregunta es ¿conviene darle un valor positivo a una variable no básica en lugar de dejarla con el valor cero que tienen actualmente? La respuesta depende de si el problema es de maximización o de minimización.

Consideremos el caso de maximizar la función objetivo. Si para una variable no básica el costo reducido $(z_j - c_j)$ es positivo, el producto de multiplicarlo por la correspondiente variable x_j (que se ha incrementado hasta un valor positivo) también es positivo y como este se le resta al valor actual de la función objetivo, z_0 , le causará una disminución. En este caso es claro que no conviene volver positiva la variable x_j y más bien se mantiene en su actual valor cero.

¿Qué pasa si todas las variables no básicas tienen un costo reducido positivo? Ello indica que la solución actual $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}$ con valor de función objetivo z_0 , es óptima.

En resumen, en un problema lineal de maximización el criterio que indica que se ha encontrado la solución óptima es:

$$(z_j - c_j) \geq 0 \quad \text{para todas las variables no básicas.}$$

En el caso de un problema de minimización pasa lo contrario, el criterio de optimalidad es que no exista ni un sólo costo reducido positivo. Esto se debe a que un costo reducido multiplicado por su respectiva variable no básica, después de restarlo a la función objetivo actual, la hará decrecer estrictamente. Por el contrario, si $(z_j - c_j)$ es negativo, el producto $(z_j - c_j) x_j$ también es negativo y como se está restando a la función objetivo (Ec 5.16) provocará un aumento de ella, lo que no es deseable ya que se está minimizando.

En un problema de minimización si $(z_j - c_j) \leq 0$ para todas las variables no básicas, entonces la solución básica factible actual es *óptima* con valor $z = z_0$.

Volviendo al problema de maximización; ¿qué sucede si al menos un costo reducido es negativo? En caso de un incremento del valor de la variable no básica correspondiente; desde cero hasta un valor positivo; es deseable ya que ello ocasionará un incremento en el valor de la función objetivo (Ec 5.16).

En otras palabras, si una variable no básica tiene un costo reducido negativo (en el problema de maximización), dicha variable debería ser básica (es decir ser positiva, en ausencia de degeneramiento) y dado que la base del problema tiene un tamaño fijo (¿cuál?) (lo que es equivalente a decir que el vector $\mathbf{X}_B$ tiene un tamaño fijo), una de las actuales variables básicas debe pasar al conjunto de las variables no básicas y tomar el valor de cero. Surge la inquietud de cuál variable debe salir de la base, ese interrogante se abordará más adelante.

En el caso de tener varias variables no básicas con costo reducido negativo, se toma como mejor candidata para entrar a la base aquella a la que le corresponda un costo reducido más negativo. Como una alternativa, se puede decir que son candidatas a entrar a la base las variables independientes cuyo costo reducido sea negativo, y que se elige aquella cuyo costo reducido tenga mayor valor absoluto.

Para un problema de minimización el análisis es al contrario, son candidatas a entrar en la base únicamente aquellas variables no básicas cuyos costos reducidos sean positivos, y en caso de existir varias, se elige aquella con *costo reducido más positivo*.

Tanto para problemas de maximización como de minimización, cuando se encuentra satisfecha la condición de optimalidad pero con un costo reducido cuyo valor es cero, *se tiene que el problema tiene infinitas soluciones*. Esto se debe a que la variable con $(z_j - c_j) = 0$ puede entrar a la base y el valor de z se mantiene en z_0 .

No se debe confundir infinitas soluciones con una solución que tiende a infinito. En el primer caso todas las soluciones tienen el mismo valor fijo (la solución es acotada) y en el segundo caso no se puede definir una solución óptima porque la función objetivo es no acotada.

Hasta el momento se ha encontrado una condición local de optimalidad que permite decir si la solución actual es la óptima o no lo es, sin tener que explorar las demás soluciones básicas factibles del problema de Programación Lineal.

Para contestar el interrogante de cuál variable básica debe salir de la base, en caso de no satisfacerse la condición de optimalidad, al problema

Minimizar (Maximizar) $\mathbf{z} = \mathbf{c}\mathbf{x}$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

es conveniente transformarlo en:

$$z = z_0 - \sum_{j \in I} (z_j - c_j) x_j \quad (5.17)$$

sujeto a:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_B &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_N &\geq \mathbf{0}\end{aligned} \quad (5.19)$$

Al multiplicar por $\mathbf{B}^{-1}$, reordenar términos y tener en cuenta que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}$ y que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{y}_j$, para llegar a:

Minimizar (Maximizar)

$$z = z_0 - \sum_{j \in I} (z_j - c_j) x_j \quad (5.20)$$

sujeto a:

$$\sum_{j \in I} \mathbf{y}_j x_j + \mathbf{X}_B = \bar{\mathbf{b}} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}x_j &\geq 0 \quad \forall j \in I \\ \mathbf{X}_B &\geq \mathbf{0}\end{aligned} \quad (5.22)$$

Ubicándonos de nuevo en la situación de tener que determinar cuál variable debe salir de la base, y considerando que una vez analizados los costos reducidos se definió que la variable x_e (con costo reducido $z_e - c_e$) debe entrar a la base, el espacio de restricciones de la expresión

5.21 permitirá identificar la variable x_s que debe salir.

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_s} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_s \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{s1} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{bmatrix} x_1 - \dots - \begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{sj} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix} x_j - \dots - \begin{bmatrix} y_{1e} \\ y_{2e} \\ \vdots \\ y_{se} \\ \vdots \\ y_{me} \end{bmatrix} x_e - \dots - \begin{bmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{sn} \\ \vdots \\ y_{mn} \end{bmatrix} x_n \quad (5.23)$$

Nótese que el valor de las variables básicas (representadas con el subíndice B), depende del valor que tengan las variables no básicas, cuyo valor actual es cero. Lo anterior deja bastante claro porque las variables básicas son dependientes y las variables no básicas son independientes. Puesto que ya se ha identificado que la variable x_e debe entrar a la base, las demás variables no básicas se mantendrán en su valor actual de cero, reduciendo la expresión anterior a:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_s} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_s \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1e} \\ y_{2e} \\ \vdots \\ y_{se} \\ \vdots \\ y_{me} \end{bmatrix} x_e \quad (5.24)$$

En la expresión 5.24 debido a que solo se están considerando soluciones básicas factibles, los términos del vector $\bar{\mathbf{b}}$ son todos positivos y se está considerando hasta qué valor positivo incrementar x_e , al contrario los componentes del vector $\mathbf{y}_e$ pueden ser positivos, negativos o cero. Si $y_{ie} \leq 0$, entonces un incremento de x_e hará que x_{B_i} continúe siendo positivo; por lo tanto no viola la condición de factibilidad.

De otra parte si $y_{ie} > 0$, entonces un incremento de x_e ocasionará que x_{B_i} decrezca, sin embargo ese decrecimiento tiene un límite puesto que se deben satisfacer las condiciones de no negatividad. Si se analiza con cuidado este hecho se deduce que ya se encontró la respuesta a cuál variable x_s debe salir de la base: *la variable básica que primero se haga cero* al incrementar el valor de x_e .

Adicionalmente, la variable x_s también sirve para determinar el valor con el que x_e entra a la base. En general $x_{B_i} = \bar{b}_i - y_{ie}x_e$ para toda variable básica, igualando la anterior expresión a cero es fácil ver que la variable que tenga el menor valor de la relación (solo se consideran los positivos) $\frac{\bar{b}_i}{y_{ie}}$ debe salir de la base. El valor de la variable de entrada es por lo tanto:

$$x_e = \frac{\bar{b}_s}{y_{se}} = \underset{1 \leq i \leq m}{\text{Mínimo}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ie}} \right\} \quad \text{para los } y_{ie} > 0 \quad (5.25)$$

Cundo no hay degeneración $\bar{b}_s > 0$ por lo tanto la nueva variable es positiva y la función objetivo mejora estrictamente.

Los valores para las variables de la nueva solución son:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_s} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_s \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1e} \\ y_{2e} \\ \vdots \\ y_{se} \\ \vdots \\ y_{me} \end{bmatrix} \frac{\bar{b}_s}{y_{se}} \quad (5.26)$$

El valor de x_{B_s} disminuye a cero y sale de la base, $x_e = \frac{\bar{b}_s}{y_{se}}$ entra a la base y las demás variables se mantienen en el valor cero.

Cuando $y_e < 0$ (ningún componente del vector y_e es positivo), la variable de entrada x_e puede crecer tanto como se quiera sin afectar la condición de no negatividad de las variables básicas. Lo anterior se traduce en que el problema de Programación Lineal tiene *valor no acotado* para la función objetivo (es decir, ella tiende a ∞ o $-\infty$).

Ejemplo 1

Considere el ejemplo número dos planteado y formulado en el capítulo cuatro (el de la microempresa bogotana de confección).

Recordando que la formulación finalmente obtenida es:

Maximizar $130000x_1 + 145000x_2 + 160000x_3$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned}x_1 + 1,5x_2 + x_3 &\leq 8 \\1,2x_1 + 1,8x_2 + 3x_3 &\leq 11,4 \\x_1 + 1,4x_2 + 1,5x_3 &\leq 8,5 \\x_3 &\leq 3 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Se procede a agregar las correspondientes variables de holgura para llegar a:

Maximizar $130000x_1 + 145000x_2 + 160000x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned}x_1 + 1,5x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\1,2x_1 + 1,8x_2 + 3x_3 + x_5 &= 11,4 \\x_1 + 1,4x_2 + 1,5x_3 + x_6 &= 8,5 \\x_3 + x_7 &= 3 \\x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0\end{aligned}$$

De la anterior formulación se pueden obtener los siguientes elementos y empezar las iteraciones correspondientes al método simplex.

$$\mathbf{c} = [130000 \quad 145000 \quad 160000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1,2 & 1,8 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1,4 & 1,5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11,4 \\ 8,5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Iteración 1

Para empezar la aplicación de método simplex, después de determinar que $\text{rango}[\mathbf{AB}] = \text{rango } A = 4$, se debe obtener una base B

que proporcione una solución básica factible. Siempre que exista una submatriz identidad, esta se puede tomar como base inicial.

Se toma como base $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ cuyas columnas correspon-

den a las variables x_4, x_5, x_6, x_7 .

La definición de la base, establece automáticamente $\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N, \mathbf{N}, \mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N$, de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 1 \\ 1,2 & 1,8 & 3 \\ 1 & 1,4 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_B = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{c}_N = [130000 \ 145000 \ 160000]$$

El valor de las variables básicas actuales se calcula como $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

$$\bar{\mathbf{b}} = [8 \ 11,4 \ 8,5 \ 3]$$

Es decir, en la solución actual $x_4 = 8, x_5 = 12, x_6 = 17, x_7 = 3, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. El valor actual de la función objetivo es **cero**.

Para establecer si esta solución es la óptima se recurre al cálculo de los costos reducidos, $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$, para las variables no básicas.

Costo reducido de x_1 .

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 130000 = 0 - 130000 = -130000 .$$

Costo reducido de x_2 .

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,8 \\ 1,4 \\ 0 \end{bmatrix} - 145000 = 0 - 145000 = -145000 .$$

Costo reducido de x_3 .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} - 160000 = 0 - 160000 = -160000 .$$

Puesto que se está maximizando y al menos uno de los costos reducidos es negativo, de hecho los tres lo son, se concluye que la solución básica factible actual no es la óptima y por lo tanto debe ser cambiada por otra adyacente. Para ello se debe introducir una de las actuales variables no básicas a la base y sacar de ella a una de las actuales variables básicas.

La cuestión de cual variable entra a la base ya está solucionada, entra la de costo reducido más negativo, en este caso x_3 . ¿Cuál variable básica debe salir?, para contestar esa pregunta se calcula el vector $\mathbf{y}_e$ que para esta situación es $\mathbf{y}_3$.

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y se recurre a la ecuación 5.24, que da:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11,4 \\ 8,5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

Al descomponer en ecuaciones independientes:

$$x_4 = 8 - 1x_3 \quad x_5 = 11,4 - 3x_3 \quad x_6 = 8,5 - 1,5x_3 \quad x_7 = 3 - 1x_3$$

Se igualan a cero las anteriores expresiones y se toma el menor valor posible para x_3 : mínimo $\left\{ \frac{8}{1}, \frac{11,4}{3}, \frac{8,5}{1,5}, \frac{3}{1} \right\}$ que corresponde a x_7 .

Ahora se sabe que la variable que sale de la base es x_7 y que la variable x_3 entra con un valor de 3.

Opcionalmente se puede saber el valor que tomaran las restantes variables básicas, la expresión “opcionalmente” se utiliza porque siguiendo el método, el valor de las variables básicas se deberá calcular en

la siguiente iteración partiendo de la nueva base. Sin embargo, estos valores se pueden utilizar como comprobación ya que deben coincidir con los que se calculen en la segunda iteración.

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11,4 \\ 8,5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} \times 3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 11,4 \\ 8,5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4,5 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2,4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo anterior conduce a que el nuevo valor de las variables básicas es:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2,4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Iteración 2

Se repiten las mismas operaciones que en la iteración 1 pero tomando como base las columnas $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$, $\mathbf{a}_3$ como base.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ cuyas columnas corresponden a las variables } x_4,$$

x_5 , x_6 y x_3 (por supuesto no es necesario escribir las columnas en estricto orden numérico creciente o decreciente).

Con esta base $\mathbf{X}_B$, $\mathbf{X}_N$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{c}_B$, $\mathbf{c}_N$ quedan:

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 0 \\ 1,2 & 1,8 & 0 \\ 1 & 1,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 160000] \quad \mathbf{c}_N = [130000 \quad 145000 \quad 0]$$

En la primera iteración no se calculó la matriz inversa de $\mathbf{B}$ porque se sabe que para la matriz identidad $\mathbf{I}$, la inversa es ella misma, para

la nueva base se tiene:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El valor de las variables básicas actuales $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2,4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución actual $x_4 = 5$, $x_5 = 2,4$, $x_6 = 4$, $x_3 = 3$ y $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_7 = 0$, lo que da un valor de la función objetivo $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = 480,000$.

Se calculan los costos reducidos $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$ para establecer la óptimalidad de la solución.

Costo reducido de x_1 .

$$\begin{aligned} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 160000] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 130000 &= 0 - 130000 \\ &= -130000 \end{aligned}$$

Costo reducido de x_2 .

$$\begin{aligned} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 160000] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,8 \\ 1,4 \\ 0 \end{bmatrix} - 145000 &= 0 - 145000 \\ &= -145000 \end{aligned}$$

Costo reducido de x_7 .

$$\begin{aligned} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 160000] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 &= 160000 - 0 = 160000 \end{aligned}$$

Entra a la base la variable x_2 porque su costo reducido es el más negativo de los tres. La variable básica que debe salir es:

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,8 \\ 1,4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,8 \\ 1,4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Recurriendo a la ecuación 5.24:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2,4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,8 \\ 1,4 \\ 0 \end{bmatrix} x_2$$

Al descomponer en ecuaciones independientes:

$$x_4 = 5 - 1,5x_2 \quad x_5 = 2,4 - 1,8x_2 \quad x_6 = 4 - 1,4x_2 \quad x_3 = 3 - 0x_2$$

Se igualan a cero las anteriores expresiones y se toma el menor valor posible para x_3 : mínimo $\left\{ \frac{5}{1,5}, \frac{2,4}{1,8}, \frac{4}{1,8}, \frac{3}{0} \right\} = \frac{2,4}{1,8}$ que corresponde a x_5 . La relación $\frac{3}{0}$ no debe ser considerada.

Entonces la variable que sale de la base es x_5 y entra a la base x_2 con un valor de $\frac{2,4}{1,8} = \frac{4}{3}$.

El valor de las restantes variables básicas es:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2,4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,8 \\ 1,4 \\ 0 \end{bmatrix} \times \frac{4}{3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 32/15 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Lo anterior conduce a que el nuevo valor de las variables básicas es:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4/3 \\ 32/15 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Iteración 3

Las columnas $\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_3$ se toman como base.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 0 & 1 \\ 0 & 1,8 & 0 & 3 \\ 0 & 1,4 & 1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ correspondientes a las variables } x_4, x_2, x_6 \text{ y } x_3.$$

Por lo tanto $\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N, \mathbf{N}, \mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N$ son:

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [0 \quad 145000 \quad 0 \quad 160000] \quad \mathbf{c}_N = [130000 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5/6 & 0 & 3/2 \\ 0 & 5/9 & 0 & -5/3 \\ 0 & -7/9 & 1 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El valor de las variables básicas actuales $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4/3 \\ 32/15 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Valor de la función objetivo $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = 673333\frac{1}{3}$

Se calculan los costos reducidos $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$ para establecer la optimalidad de la solución.

Costo reducido de x_1 .

$$\begin{aligned} [0 \quad 145000 \quad 0 \quad 160000] & \begin{bmatrix} 1 & -5/6 & 0 & 3/2 \\ 0 & 5/9 & 0 & -5/3 \\ 0 & -7/9 & 1 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 130000 \\ & = 96666\frac{2}{3} - 130000 = -33333\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Costo reducido de x_5 .

$$[0 \quad 145000 \quad 0 \quad 160000] \begin{bmatrix} 1 & -5/6 & 0 & 3/2 \\ 0 & 5/9 & 0 & -5/3 \\ 0 & -7/9 & 1 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 80555\frac{5}{9} - 0$$

$$= 80555\frac{5}{9}.$$

Costo reducido de x_7 .

$$[0 \quad 145000 \quad 0 \quad 160000] \begin{bmatrix} 1 & -5/6 & 0 & 3/2 \\ 0 & 5/9 & 0 & -5/3 \\ 0 & -7/9 & 1 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -81666\frac{2}{3} - 0$$

$$= -81666\frac{2}{3}.$$

Vuelve a la base la variable x_7 y se calcula $\mathbf{y}_7 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_7$

$$\mathbf{y}_7 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} 1 & -5/6 & 0 & 3/2 \\ 0 & 5/9 & 0 & -5/3 \\ 0 & -7/9 & 1 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -5/3 \\ 5/6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

la variable básica que debe salir es:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4/3 \\ 32/15 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/2 \\ -5/3 \\ 5/6 \\ 1 \end{bmatrix} x_7 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 32/15 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Mínimo $\{2, \frac{64}{25}, \frac{3}{1}\} = 2$ que corresponde a x_4 . Se observa que la razón correspondiente a x_2 no se considera porque¹ $y_7^2\{-\frac{5}{3}\}$ es negativo.

Entonces la variable que sale de la base es x_4 y entra a la base x_7 con un valor de 2.

¹En la notación y_7^2 indica el segundo componente del vector y_7 . En general y_j^i representa el i -ésimo componente del vector $\mathbf{y}_j$.

El valor de las restantes variables básicas es:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4/3 \\ 32/15 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/2 \\ -5/3 \\ 5/6 \\ 1 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 14/3 \\ 7/15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lo anterior conduce a que el nuevo valor de las variables básicas es:

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14/3 \\ 7/15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iteración 4

La base está conformada por las columnas $\mathbf{a}_7$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_6$, $\mathbf{a}_3$ se toman como base.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 0 & 1 \\ 0 & 1,8 & 0 & 3 \\ 0 & 1,4 & 1 & 1,5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ correspondientes a las variables } x_7, x_2, x_6 \text{ y } x_3.$$

Por lo tanto $\mathbf{X}_B$, $\mathbf{X}_N$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{c}_B$, $\mathbf{c}_N$ son:

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [0 \quad 145000 \quad 0 \quad 160000] \quad \mathbf{c}_N = [130000 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -5/9 & 0 & 1 \\ 10/9 & -10/27 & 0 & 0 \\ -5/9 & -17/54 & 1 & 0 \\ -2/3 & 5/9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El valor de las variables básicas actuales $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14/3 \\ 7/15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valor de la función objetivo $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = 836666 \frac{2}{3}$

Se calculan los costos reducidos $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$ para establecer la óptimalidad de la solución.

Costo reducido de x_1 .

$$\begin{aligned} [0 \quad 145000 \quad 0 \quad 160000] & \begin{bmatrix} 2/3 & -5/9 & 0 & 1 \\ 10/9 & -10/27 & 0 & 0 \\ -5/9 & -17/54 & 1 & 0 \\ -2/3 & 5/9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 130000 \\ & = 96666 \frac{2}{3} - 130000 = -33333 \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

Costo reducido de x_5 .

$$\begin{aligned} [0 \quad 145000 \quad 0 \quad 160000] & \begin{bmatrix} 2/3 & -5/9 & 0 & 1 \\ 10/9 & -10/27 & 0 & 0 \\ -5/9 & -17/54 & 1 & 0 \\ -2/3 & 5/9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 \\ & = 35185,1852 - 0 = 35185,1852 . \end{aligned}$$

Costo reducido de x_4 .

$$\begin{aligned} [0 \quad 145000 \quad 0 \quad 160000] & \begin{bmatrix} 2/3 & -5/9 & 0 & 1 \\ 10/9 & -10/27 & 0 & 0 \\ -5/9 & -17/54 & 1 & 0 \\ -2/3 & 5/9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \\ & = 54444 \frac{4}{9} - 0 = 54444 \frac{4}{9} . \end{aligned}$$

Por lo tanto la variable que debe entrar en la base es x_1 . Calculando $\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_1$

$$\mathbf{y}_1 \begin{bmatrix} 2/3 & -5/9 & 0 & 1 \\ 10/9 & -10/27 & 0 & 0 \\ -5/9 & -17/54 & 1 & 0 \\ -2/3 & 5/9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 2/30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la variable básica que debe salir es:

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14/3 \\ 7/15 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 2/30 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 32/15 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Mínimo $\{7, 7\} = 2$ que corresponde a x_2 o x_6 . Nótese que no se consideran las relaciones correspondientes a x_7 y x_3 porque sus respectivos componentes en el vector $\mathbf{y}_1$ son cero. Se elige arbitrariamente excluir de la base a x_2 .

Sale de la base x_2 y entra a x_1 con un valor de 7.

El valor de las restantes variables básicas es:

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14/3 \\ 7/15 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 2/30 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 \times 7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el nuevo valor de las variables básicas es:

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ x_1 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que una de las variables básicas toma valor cero, esta situación ya se mencionó y se denomina “*degeneramiento*”. Es decir que se está en presencia de una *solución básica factible degenerada*.

Iteración 5

Para esta iteración se parte de la base conformada por las columnas $\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_3$ las cuales se toman como base.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1,2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1,5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ correspondientes a las variables } x_7, x_1, x_6$$

y x_3 .

$\mathbf{X}_B, \mathbf{X}_N, \mathbf{N}, \mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N$ son:

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_1 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 1 \\ 1,8 & 1 & 0 \\ 1,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [0 \quad 130000 \quad 0 \quad 160000] \quad \mathbf{c}_N = [145000 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -5/9 & 0 & 1 \\ 5/3 & -5/9 & 0 & 0 \\ -2/3 & -5/18 & 1 & 0 \\ -2/3 & 5/9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El valor de las variables básicas actuales $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ (en la iteración anterior se calcularon los componentes de este vector). .

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valor de la función objetivo $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = 1070000$.

Se calculan los costos reducidos $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$ para establecer la óptimalidad de la solución.

Costo reducido de x_2 .

$$\begin{aligned} [0 \quad 130000 \quad 0 \quad 160000] & \begin{bmatrix} 2/3 & -5/9 & 0 & 1 \\ 5/3 & -5/9 & 0 & 0 \\ -2/3 & -5/18 & 1 & 0 \\ -2/3 & 5/9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,8 \\ 1,4 \\ 0 \end{bmatrix} - 145000 \\ & = 195000 - 145000 = 50000 . \end{aligned}$$

Costo reducido de x_5 .

$$\begin{aligned} [0 \quad 130000 \quad 0 \quad 160000] & \begin{bmatrix} 2/3 & -5/9 & 0 & 1 \\ 5/3 & -5/9 & 0 & 0 \\ -2/3 & -5/18 & 1 & 0 \\ -2/3 & 5/9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 16666\frac{2}{3} - 0 \\ & = 16666\frac{2}{3} . \end{aligned}$$

Costo reducido de x_4 .

$$\begin{aligned} [0 \quad 130000 \quad 0 \quad 160000] & \begin{bmatrix} 2/3 & -5/9 & 0 & 1 \\ 5/3 & -5/9 & 0 & 0 \\ -2/3 & -5/18 & 1 & 0 \\ -2/3 & 5/9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 110000 - 0 \\ & = 110000 . \end{aligned}$$

Los costos reducidos de todas las variables no básicas son positivos, por lo tanto se concluye que la solución actual es óptima y el valor de la función objetivo es \$ 1'070,000.

$$\begin{bmatrix} x_1 = 7 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \\ x_7 = 2 \end{bmatrix}$$

Esto significa que la microempresa estudiada lo mejor que puede hacer es producir diariamente siete (7) camisas para hombre, una (1) unisex y no elaborar camisas para mujer. Atenerse a este plan de producción le reportará ingresos diarios de \$ 1'070,000.

Bajo las condiciones consideradas, cualquier otro esquema de producción haría que sus ingresos fueran inferiores. El valor de x_4 , x_5 y x_6 indica que los recursos disponibles en horas de corte, costura y metros de tela se consumieron en su totalidad (recuerde que estas son las variables de holgura), mientras que el valor de x_7 muestra que solo se hace una camisa unisex de las tres que se podían elaborar.

Por otra parte, es interesante analizar que en la iteración 4 podían salir de la base tanto la variable x_2 como x_6 , nótese que la elección que se haga es indiferente puesto que, debido a la degeneración de la solución, el valor final de estas variables será cero. Cuando se decidió elegir como variable saliente a x_2 ella pasó a ser variable no básica, por lo que su valor se fijó en cero y la variable que permaneció en la base, x_6 , tomó un valor de cero. Si se hubiese elegido al contrario, la variable x_6 saldría de la base y pasaría a ser no básica, con lo que automáticamente su valor se fijaría en cero y x_2 permanecería en la base pero también con valor cero ¡compruébelo!

A continuación se hace un resumen de la evolución del método simplex aplicado al problema de la microempresa de confección.

En la gráfica se muestra el recorrido del método simplex, inicia en el punto extremo A y sigue la ruta B – C – D para finalizar en el punto óptimo E.

Iteración	Variables básicas	Variables no básicas	Valor función objetivo	Variable saliente	Variable entrante
1	$\begin{bmatrix} x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 8 & 11,4 & 8,5 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0	x_7	x_3
2	$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 3 & 5 & 2,4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	480000	x_5	x_2
3	$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_6 \\ \frac{4}{3} & 3 & 3 & \frac{32}{15} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_5 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$673333\frac{1}{3}$	x_4	x_7
4	$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_6 & x_7 \\ \frac{14}{3} & 1 & \frac{7}{15} & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$836666\frac{2}{3}$	x_2^2	x_1
5	$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_6 & x_7 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1070000	Solución óptima	Solución óptima

²En la iteración 4 las variables salientes pueden ser x_2 y x_6 , se decidió arbitrari-

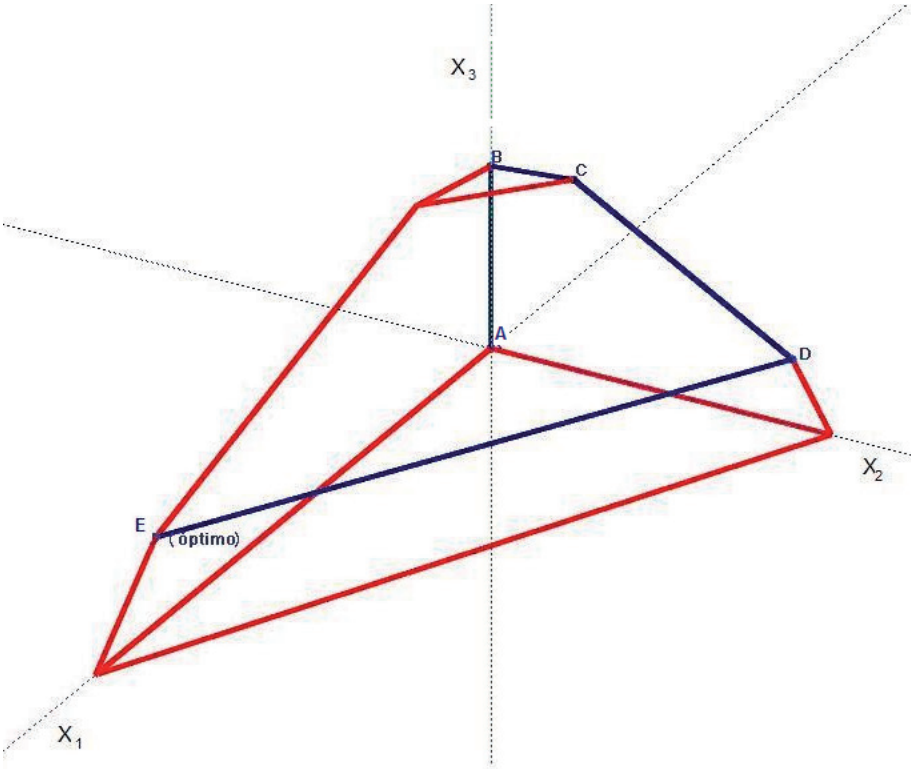


Figura 5.1: A–B–C–D–E, recorrido del método simplex para solucionar el problema de la microempresa de confecciones

Ejemplo 2

Ahora considere la siguiente situación en la que la función objetivo se debe minimizar.

Una naciente compañía de implementos deportivos quiere hacer que la difusión de su marca sea rápida. Para lograr su objetivo ha decidido contratar publicidad durante la transmisión de eventos deportivos en dos medios; radio y televisión. Basándose en un estudio de medios y en mediciones de audiencia, la compañía elaboró un indicador que le mide un equivalente de cuántas personas por minuto tiene de audiencia cada medio. Con esta información se estableció que cada minuto 8 millones de personas (de las cuales el 20 % son adolescentes) ven las transmisiones de televisión y trece millones, (28 % adolescentes) siguen los eventos por la radio (sumadas todas las emisoras de la cadena que se piensa contratar). La estrategia de la compañía le apunta básicamente a la recordación en usuarios adolescentes y en adultos, por lo que se espera que sus anuncios publicitarios sean captados por al menos 9'000.000 de adolescentes y 22'000.000 de adultos. Las cotizaciones indican que cada minuto de publicidad en televisión le costara \$ 30'000.000 y en radio \$ 18'000.000. El equipo de publicistas insiste en que por cada minuto de publicidad en radio debe contratarse por lo menos minuto y medio en televisión. ¿Cuánto tiempo en cada medio debe contratar la compañía para cumplir su objetivo?

Solución

Definición de las variables:

x_1 = minutos a pautar en Televisión.

x_2 = minutos a pautar en Radio.

Función Objetivo.

Minimizar

$$\text{Costos} = \frac{\$}{\text{minuto tv}} 30000000 x_1 \text{ (minuto tv)} + \frac{\$}{\text{minuto radio}} 18000000 x_2 \text{ (minutos radio)}$$

amente sacar a x_2 . El resultado de la solución óptima muestra la variable básica con valor cero lo que indica que la solución óptima es *degenerada*.

Sujeto a las siguientes restricciones:

- Adolescentes alcanzados: $2240000 \frac{\text{adolescentes}}{\text{minuto tv}} x_1$ (minutos de tv) + $2600000 \frac{\text{adolescentes}}{\text{minuto radio}} x_2$ (minutos de radio) ≥ 9000000 adolescentes
- Adultos alcanzados: $5760000 \frac{\text{adultos}}{\text{minuto tv}} x_1$ (minutos de tv) + $10400000 \frac{\text{adultos}}{\text{minuto radio}} x_2$ (minutos de radio) ≥ 22000000 adultos
- Diseño de la campaña: x_1 (minutos de tv) $\frac{\text{minuto tv}}{\text{minuto radio}} \geq 1,5 x_2$ (minutos de radio)
- (No negatividad) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

En resumen:

Minimizar $30000000x_1 + 18000000x_2$,

sujeto a:

$$\begin{aligned} 2240000x_1 + 2600000x_2 &\geq 9000000 \\ 5760000x_1 + 10400000x_2 &\geq 22000000 \\ x_1 &\geq 1,5x_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dado que las restricciones son del tipo mayor igual, en este caso se utilizan variables de exceso, llegando a:

Minimizar $30000000x_1 + 18000000x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$,

sujeto a:

$$\begin{aligned} 2240000x_1 + 2600000x_2 - x_3 &= 9000000 \\ 5760000x_1 + 10400000x_2 - x_4 &= 22000000 \\ x_1 - x_5 &= 1,5x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que x_3, x_4 y x_5 son las variables de exceso.

Se pueden obtener los siguientes elementos.

$$c = [30000000 \quad 18000000 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2240000 & 2600000 & -1 & 0 & 0 \\ 5760000 & 10400000 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1,5 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Para simplificar el número de cifras en los cálculos, se dividirán las cantidades del problema por un millón.

$$c = [30 \quad 18 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,24 & 2,6 & -1 & 0 & 0 \\ 5,76 & 10,4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1,5 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Iteración 1

Haciendo los cálculos correspondientes se puede determinar que el rango $[\mathbf{A}\mathbf{b}] = \text{rango}\mathbf{A} = 3$. Por lo tanto se debe obtener una matriz cuadrada 3×3 que sirva como base inicial. La condición que debe cumplir una matriz candidata a base, aparte de ser cuadrada (en este caso de 3×3) e invertible, es que debe generar una solución básica factible, es decir, al hacer el cálculo $\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, el valor numérico de los componentes de $\bar{\mathbf{b}}$ deben ser no negativos. En el capítulo correspondiente a la búsqueda de soluciones iniciales se indicarán los procedimientos para encontrar una matriz base. Como no existe una submatriz identidad, se procede a buscar alguna que cumpla con las condiciones especificadas.

Si se toma como base $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2,24 & 2,6 & -1 \\ 5,76 & 10,4 & 0 \\ 1 & 1,5 & 0 \end{bmatrix}$ cuyas columnas corresponden a las variables x_1 , x_2 y x_3 , se tiene la siguiente matriz

inversa:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 75/952 & 65/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ -1 & 149/476 & 52/119 \end{bmatrix}$$

$$\text{Obteniéndose } \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 825/476 \\ 275/238 \\ -503/238 \end{bmatrix}.$$

Vector que tiene un componente negativo. Recuérdese que la condición de no negatividad exige que todas las variables sean mayores o iguales a cero. Se debe entonces probar con otra base, por ejemplo la correspondiente a las variables x_1 , x_4 y x_5 :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2,74 & 0 & 0 \\ 5,76 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cuya respectiva inversa es

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 25/26 & 0 & 0 \\ 18/7 & -1 & 0 \\ 25/26 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dando como resultado $\bar{\mathbf{b}}$ que corresponde a una solución básica factible y por lo tanto se puede tomar como punto de partida del método simplex.

Con la definición de la anterior base quedan determinados los componentes de $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{x}_N$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{c}_B$, $\mathbf{c}_N$, de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2,6 & -1 \\ 10,4 & 0 \\ -1,5 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_B = [30 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{c}_N = [18 \ 0 \ 0]$$

En la búsqueda de una solución básica factible inicial, el valor de las variables básicas x_1 , x_4 y x_5 ya se calculó. En la solución actual $x_1 = 4017857,14$, $x_4 = 1142857,14$ y $x_5 = 4017857,14$, además $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.

El valor actual de la función objetivo es

$$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 225/56 \\ 8/7 \\ 225/56 \end{bmatrix} = 120,5357143.$$

Para establecer si esta solución es la óptima se recurre al cálculo de los costos reducidos, $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} - c_j$, para las variables no básicas.

Costo reducido de x_2 .

$$\begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25/56 & 0 & 0 \\ 18/7 & -1 & 0 \\ 25/56 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} - 18 = \frac{471}{28}$$

Costo reducido de x_3 .

$$\begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25/56 & 0 & 0 \\ 18/7 & -1 & 0 \\ 25/56 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -13,3928571 - 0 = -\frac{375}{28}$$

Como el problema es de minimización, la condición de óptimalidad exige que no haya costos reducidos positivos. En este caso la variable x_2 es la única que tiene costo reducido positivo y por lo tanto debe entrar a la base.

Se calcula el vector $\mathbf{y}_e$ que corresponde a $\mathbf{y}_2$.

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 25/26 & 0 & 0 \\ 18/7 & -1 & 0 \\ 25/26 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65/26 \\ -26/7 \\ 149/56 \end{bmatrix}$$

Con la ecuación 5.24 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225/56 \\ 8/7 \\ 225/56 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 65/560 \\ -26/7 \\ 149/56 \end{bmatrix} x_2$$

Al descomponer en ecuaciones independientes:

$$x_1 = 4,01785714 - 1,16071429x_2$$

$$x_4 = 1,14285714 - 3,71428571x_2$$

$$x_5 = 4,01785714 - 2,66071429x_2$$

La variable x_4 no se considera como candidata a salir debido a que el componente y_2^1 es negativo.

Haciendo la prueba de la razón mínima se determina que la variable que debe salir de la base es x_5 .

Iteración 2

Cambiando x_5 por x_2 , la nueva base se conforma con las columnas de $\mathbf{A}$ correspondientes a x_1 , x_4 y x_2 .

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_4 \quad \mathbf{a}_2 \\ \begin{bmatrix} 2,24 & 0 & 2,6 \\ 5,76 & -1 & 10,4 \\ 1 & 0 & -1,5 \end{bmatrix} \end{array}$$

cuya respectiva inversa es

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 75/298 & 0 & 65/149 \\ 431/149 & -1 & -286/149 \\ 25/149 & 0 & -56/149 \end{bmatrix}$$

Haciendo la operación

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 75/298 & 0 & 65/149 \\ 431/149 & -1 & -286/149 \\ 25/149 & 0 & -56/149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 675/298 \\ 601/149 \\ 255/149 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 275/298 \\ 225/149 \\ 0 \\ 601/149 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El nuevo valor del vector de coeficientes de las variables básicas es $\mathbf{c}_B = [30 \ 0 \ 18]$ y el valor de la función objetivo es

$$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}} = [30 \ 0 \ 18] \begin{bmatrix} 675/298 \\ 601/149 \\ 255/149 \end{bmatrix} = \frac{7801}{82}$$

Se procede a verificar si la solución actual es óptima calculando los correspondientes costos reducidos.

Costo reducido de $x_3 = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_3 - c_3$.

$$[30 \ 0 \ 18] \begin{bmatrix} 75/298 & 0 & 65/149 \\ 431/149 & -1 & -286/149 \\ 25/149 & 0 & -56/149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{1575}{149}$$

Costo reducido de $x_5 = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_5 - c_5$.

$$[30 \ 0 \ 18] \begin{bmatrix} 75/298 & 0 & 65/149 \\ 431/149 & -1 & -286/149 \\ 25/149 & 0 & -56/149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{942}{149}$$

Como el problema es de minimización y los costos reducidos son no positivos, se puede concluir que la solución actual es la óptima.

Ateniéndose a los resultados de la solución del modelo de Programación Lineal, la compañía de implementos deportivos debe invertir su dinero de la siguiente forma:

- Invertir \$67'953,020,13 en $\frac{675}{298}$ ($\cong 2,27$) minutos de pauta publicitaria en televisión.
- Invertir \$27'181,208,05 en $\frac{225}{149}$ ($\cong 1,51$) minutos de pauta publicitaria en radio.

De acuerdo con el anterior plan, el costo de la campaña publicitaria que permite cumplir con los objetivos planteados tiene un costo mínimo de \$95'134,228,19. Adicionalmente se puede ver que se alcanzan exactamente los 9'000,000 de adolescentes deseados y 6'751,677,85 millones de adultos adicionales a la meta mínima de 22 millones.

El resumen de la aplicación del método simplex para este problema es:

Iteración	Variables básicas	Variables no básicas	Valor función objetivo	Variable saliente	Variable entrante
1	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_5 \\ \frac{225}{56} & 8 & \frac{225}{56} \\ \frac{225}{56} & \frac{8}{7} & \frac{225}{56} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_1 & x_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	120'535, 714,3	x_5	x_2
2	$\begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_2 \\ \frac{275}{298} & \frac{601}{149} & \frac{255}{149} \\ \frac{275}{298} & \frac{601}{149} & \frac{255}{149} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_5 & x_3 \\ x_5 & x_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	95'134, 228,19	Solución óptima	Solución óptima

5.1. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Quienes han tomado cursos previos de optimización reconocerán que el vector $\mathbf{w}$ contiene los multiplicadores de Lagrange. El problema con la aplicación de este método es que al ser lineales, tanto la función objetivo como las restricciones, al obtener las condiciones de primer orden (vector gradiente igualado a cero) no se “ligan” las variables del problema con los multiplicadores de Lagrange.

Considere la siguiente situación:

Minimizar $z = 5x_1 + 3x_2$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &\leq 11 \\ 7x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Definiendo un multiplicador por cada restricción, se obtiene el Lagrangiano a minimizar:

$$\text{Minimizar } L = 5x_1 + 3x_2 - \lambda(3x_1 + 9x_2 - 11) - \gamma(7x_1 + 2x_2 - 8)$$

Por condiciones de primer orden $\nabla L = 0$. Al derivar con respecto a cada una de las variables originales y a los dos multiplicadores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 5 - 3\lambda - 7\gamma = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 3 - 9\lambda - 2\gamma = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 3x_1 + 9x_2 - 11 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma} &= 7x_1 + 2x_2 - 8 = 0 \end{aligned}$$

Como se puede observar se tienen dos subsistemas de ecuaciones:

- Uno que solo involucra a los multiplicadores λ y γ .
- Uno que solo involucra x_1 y x_2 (las restricciones).

Solucionando las dos primeras ecuaciones se llega a:

$$\gamma = \frac{12}{19}, \quad \lambda = \frac{33}{171}$$

Que son los mismos valores obtenidos para el vector $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ al formular y solucionar el problema dual, como se muestra en el capítulo 7.

5.2. TABLAS SIMPLEX

En la aplicación del método simplex se deben realizar una serie de cálculos repetitivos que pueden hacerse de diversas maneras de acuerdo al esquema diseñado para este fin, dando lugar a varios procedimientos derivados del simplex descrito en este capítulo.

Una de las formas más populares y utilizadas para organizar los datos y hacer los cálculos del método simplex consiste en poner el problema en forma de tablas (tableaus) y aplicar Gauss–Jordan para resolver los sistemas de ecuaciones lineales que aparecen iteración tras iteración.

Las tablas están organizadas de tal forma que en cada una de sus secciones aparecen los elementos esenciales del simplex; las variables básicas y su respectivo valor, los costos reducidos y el valor de la función objetivo.

	Z	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	Lado Derecho	
z	1	0	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N$	$\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$	Fila 0
$\mathbf{x}_B$	0	I	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$	$\bar{\mathbf{b}}$	Filas 1 a m

La anterior tabla contiene todos los elementos necesarios para aplicar el método simplex de la forma que se ha expuesto. En la sección $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \mathbf{c}_N$ se ubican los costos reducidos y por lo tanto indica cuándo se ha llegado a la solución óptima; o en caso contrario qué variable debe ingresar a la base.

Para determinar la variable que sale de la base se recurre a la prueba de la razón mínima. Para ello se ubica el vector $\mathbf{y}_k$ que es la columna correspondiente a la variable de entrada en la sección $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ y el vector $\bar{\mathbf{b}}$. Se procede a dividir cada elemento de $\bar{\mathbf{b}}$ entre su correspondiente componente $\mathbf{y}_k$ positiva.

Si al final de una iteración se concluye que no es óptima se debe:

- Cambiar la base, identificando la variable que entra y la que sale.
- Calcular el valor de las variables básicas.
- Actualizar los costos reducidos.
- Actualizar el valor de los vectores (ubicados en la sección $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$)

Para efectuar todas estas actualizaciones se recurre al método de Gauss–Jordán, por lo tanto: primero, debe ubicarse un elemento pivote, y, luego, convertir en cero todos los elementos ubicados encima y debajo de él.

Ubicación del pivote y pivoteo

El elemento pivote se ubica en cómo la intersección de la columna de la variable cuyo costo reducido indica qué debe entrar en la base y la fila de la variable que la prueba de la razón mínima ha determinado que sale de la base. Ese elemento se halla en la sección $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ y se denotará como $y_{s,e}$ y se procede de la siguiente forma:

- El elemento pivote se convierte en 1 dividiendo la fila s entre $y_{s,e}$.
- Cada una de las restantes i -ésimas filas (i nes) de la sección $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ y la fila cero se actualizan así:
 - Multiplicando la fila s por $-y_{s,e}$ y sumándosela a la fila i
 - Multiplicando la fila s por $(c_e - z_e)$ y sumándosela a la fila 0 (actualizando así los costos reducidos y el valor de z).

Si la condición de optimalidad no se cumple, se repite el procedimiento hasta lograr la solución óptima.

Ejemplo 3

Para aplicar el método simplex en forma de tabla para el problema de la microempresa de confecciones, se deben efectuar los siguientes pasos.

- Convertir el problema a la forma estándar.

Maximizar $130000x_1 + 145000x_2 + 160000x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$,
sujeto a:

$$\begin{aligned}x_1 + 1,5x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\1,2x_1 + 1,8x_2 + 3x_3 + x_5 &= 11,4 \\x_1 + 1,4x_2 + 1,5x_3 + x_6 &= 8,5 \\x_3 + x_7 &= 3 \\x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0\end{aligned}$$

- Igualar la función objetivo a cero; $z - \mathbf{c}\mathbf{x} = 0$.
 $z - 130000x_1 - 145000x_2 - 160000x_3 - 0x_4 - 0x_5 - 0x_6 - 0x_7 = 0$

- Identificar una solución básica factible.

La submatriz identidad proporciona la solución inicial: $x_4 = 8$, $x_5 = 11,4$, $x_6 = 8,5$ y $x_7 = 3$

- Armar la tabla inicial.

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)								Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Z	F.O	1	-130000	-145000	-160000	0	0	0	0	0
x_4	Corte	0	1	1.5	1	1	0	0	0	8
x_5	Costura	0	1.2	1.8	3	0	1	0	0	11.4
x_6	Mat Prima	0	1	1.4	1.5	0	0	1	0	8.5
x_7	Demanda	0	0	0	1	0	0	0	1	3

- Iniciar el método simplex

En la sección de costos reducidos de la tabla inicial se observa que hay valores negativos. Puesto que es un problema de maximización, esto indica que la solución actual no es óptima.

Para identificar el elemento pivote se ubica la columna del costo reducido más negativo (-160000) y se efectúa la prueba de la razón mínima:

$$y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11,4 \\ 8,5 \\ 3 \end{bmatrix} \implies \text{mínimo} \left(\frac{8}{1}, \frac{11,4}{3}, \frac{8,5}{1,5}, \frac{3}{1} \right) = 3$$

La variable saliente es x_7 .

El elemento ubicado en la intersección de la columna de x_3 y la fila de la variable básica x_7 es el elemento pivote y vale uno, por lo tanto no es necesario dividir esa fila entre el valor del pivote.

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)								Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Z	F.O	1	-130000	-145000	-160000	0	0	0	0	0
x_4	Corte	0	1	1.5	1	1	0	0	0	8
x_5	Costura	0	1.2	1.8	3	0	1	0	0	11.4
x_6	Mat Prima	0	1	1.4	1.5	0	0	1	0	8.5
x_7	Demanda	0	0	0	1*	0	0	0	1	3

* Elemento usado como pivote

Ahora es necesario convertir todos los elementos que se encuentren por encima y por debajo del elemento pivote en ceros. Para ello se debe:

- Multiplicar la fila pivote por -1.5 y sumarla a la fila de Materia Prima
- Multiplicar la fila pivote por -3 y sumarla a la fila de Costura
- Multiplicar la fila pivote por -1 y sumarla a la fila de Corte

- Multiplicar la fila pivote por 160000 y sumarla a la fila de la función objetivo (F.O).

Al hacer las operaciones indicadas se obtiene la siguiente tabla.

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)								Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Z	F.O	1	-130000	-145000	0	0	0	0	0	480000
x_4	Corte	0	1	1.5	0	1	0	0	-1	5
x_5	Costura	0	1.2	1.8*	0	0	1	0	-3	12/5
x_6	Mat Prima	0	1	1.4	0	0	0	1	-3/2	4
x_3	Demanda	0	0	0	1	0	0	0	1	3

* Elemento usado como pivote

En la tabla anterior los costos reducidos indican que la solución no es óptima y que x_2 debe entrar a la base.

La prueba de la razón mínima queda:

$$\text{mínimo} \left(\frac{5}{1,5}, \frac{12}{9}, \frac{4}{1,4} \right) = 4/3$$

que corresponde a x_5 .

Por lo anterior el pivote es el elemento 1.8.

Para construir la nueva tabla:

- Dividir la fila pivote por 1.8 para obtener la nueva fila pivote.
- Multiplicar la nueva fila pivote por -1.5 y sumarla a la fila de Corte.
- Multiplicar la nueva fila pivote por -1.4 y sumarla a la fila de Materia Prima.
- Multiplicar la nueva fila pivote por 145.000 y sumarla a la fila de función objetivo (F.O).

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)								Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Z	F.O	1	100000/3	0	0	0	725000/9	0	-245000/3	202000
x_4	Corte	0	0	0	0	1	-5/6	0	3/2*	3
x_2	Costura	0	-2/3	1	0	0	5/9	0	-5/3	4/3
x_6	Mat Prima	0	1/15	0	0	0	-7/9	1	5/6	32/15
x_3	Demanda	0	0	0	1	0	0	0	1	3

* Elemento usado como pivote

Los costos reducidos indican que x_7 debe entrar a la base y la prueba de la razón mínima (da 2) que x_4 debe salir. Se identifica como elemento pivote a 3/2 y se actualiza la tabla.

- Dividir la fila pivote por 3/2.
- Multiplicar la nueva fila pivote por 5/3 y sumarla a la fila de Costura.
- Multiplicar la nueva fila pivote por -5/6 y sumarla a la fila de Materia Prima.
- Multiplicar la nueva fila pivote por -1 y sumarla a la fila de Demanda.
- Multiplicar la nueva fila pivote por 245000/3 y sumarla a la fila de función objetivo (F.O).

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)								Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Z	F.O	1	100000/3	0	0	490000/3	950000/27	0	0	2510000
x_7	Corte	0	0	0	0	2/3	-5/9	0	1	2
x_2	Costura	0	2/3*	1	0	10/9	-10/27	0	0	14
x_6	Mat Prima	0	1/15	0	0	-5/9	-17/54	1	0	7/15
x_3	Demanda	0	0	0	1	-2/3	5/9	0	0	1

* Elemento usado como pivote

El costo reducido de x_1 es el único negativo y por ello debe entrar a la base. Al hacer la prueba de la razón mínima:

$$\text{mínimo} \left(\frac{\frac{14}{3}}{\frac{2}{3}}, \frac{\frac{7}{15}}{\frac{1}{15}} \right) = \text{mínimo} (7, 7)$$

muestra que alternativamente pueden salir de la base x_2 o x_6 . Arbitrariamente se decide que x_2 sea la variable saliente, por lo tanto el elemento $2/3$ es el nuevo pivote.

Para obtener la siguiente tabla se hacen las siguientes operaciones:

- Dividir la fila pivote por $2/3$.
- Multiplicar la nueva fila pivote por $-1/15$ y sumarla a la fila de Materia Prima.
- Multiplicar la nueva fila pivote por $100000/3$ y sumarla a la fila de función objetivo (F.O).

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)								Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Z	F.O	1	0	50000	0	330000	$50000/3$	0	0	1070000
hline x_7	Corte	0	0	0	0	$2/3$	$-5/9$	0	1	2
x_1	Costura	0	1	$3/2$	0	$5/3$	$-5/9$	0	0	7
x_6	Mat Prima	0	0	$-1/10$	0	$-2/3$	$-5/18$	1	0	0
x_3	Demanda	0	0	0	1	$-2/3$	$5/9$	0	0	1

La no presencia de costos reducidos negativos indica que se ha conseguido la solución óptima. Es notorio que una de las variables básicas tiene un valor de cero, es decir que se está ante una solución con degeneramiento.

La solución final es:

$$\begin{bmatrix} x_7 = 2 \\ x_1 = 7 \\ x_6 = 0 \\ x_3 = 1 \end{bmatrix}$$

y su valor 1070000.

Ubicándose en el contexto del problema se interpreta que la decisión a tomar es producir diariamente siete camisas para hombre, una unisex

y no elaborar camisas para mujer. Este plan de producción le reportara ingresos diarios de \$ 1'070.000.

El valor de x_4 , x_5 y x_6 indica que los recursos disponibles en horas de corte, costura y metros de tela se consumieron en su totalidad y el valor de x_7 muestra que solo se hace una camisa unisex de las tres que acepta diariamente el mercado.

Es interesante anotar que la matriz $\mathbf{B}^{-1}$ en cada iteración (tabla) se puede leer en las columnas donde se encontraba la matriz identidad que se tomo como base inicial en la primera tabla.

Ejemplo 4

En la aplicación de las tablas simplex se debe tener cuidado cuando la solución inicial no está proporcionada por la submatriz identidad. En estos casos se deben hacer algunos ajustes antes de proceder con las operaciones de pivoteo. Para ilustrar esta situación se retomará el ejemplo de la nueva compañía de artículos deportivos.

Minimizar $30x_1 + 18x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$,
sujeto a:

$$\begin{aligned} 2,24x_1 + 2,6x_2 - x_3 &= 9 \\ 5,76x_1 + 10,4x_2 - x_4 &= 22 \\ x_1 - x_5 &= 1,5x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tomando como variables básicas iniciales a x_1 , x_4 y x_5 , después de los ajustes correspondientes, se tendrá la siguiente tabla inicial.

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)						Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	F.O	1	-30	-18	0	0	0	0
hline x_1	Adolescentes	0	2.24	2.6	-1	0	0	9
x_4	Adultos	0	5.76	10.4	0	-1	0	22
x_5	Diseño	0	1	-1.5	0	0	-1	0

Si el lector observa detalladamente esta tabla se percatará de que los valores de los costos reducidos no concuerdan con los que deberían tener las variables básicas y, adicionalmente, los coeficientes de estas en la sección $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ no son uno.³

Antes de iniciar con las operaciones de pivoteo se deben hacer las modificaciones necesarias para que la tabla inicial sea conceptualmente correcta.

- Dividir la fila de Adolescentes por 2.24.
- Multiplicar esta nueva fila Adolescentes por 30 y sumarla a la fila de la función objetivo.

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)						Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	F.O	1	0	471/28	-375/28	0	0	3375/28
hline x_1	Adolescentes	0	1	65/56	-25/56	0	0	225/56
x_4	Adultos	0	5.76	10.4	0	-1	0	22
x_5	Diseño	0	1	-1.5	0	0	-1	0

Se continúa multiplicando la fila Adolescentes por -5.76 y sumándola a la fila adultos.

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)						Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	F.O	1	0	471/28	-375/28	0	0	3375/28
hline x_1	Adolescentes	0	1	65/56	-25/56	0	0	225/56
x_4	Adultos	0	0	26/7	18/7	-1	0	-8/7
x_5	Diseño	0	0	149/56	25/56	0	-1	-225/56

Finalmente:

³Recuérdese que el valor de los costos reducidos de las variables básicas es cero y los coeficientes de las variables básicas en las posiciones pivotes es uno.

- Se multiplica la fila adolescentes por -1 y se suma a la fila Diseño.
- Se multiplican las filas Adultos y Diseño por -1.
- Se suman las filas Adultos y Diseño.

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)						Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	F.O	1	0	471/28	-375/28	0	0	3375/28
x_1	Adolescentes	0	1	65/56	-25/56	0	0	225/56
x_4	Adultos	0	0	-26/7	-18/7	1	0	8/7
x_5	Diseño	0	0	149/56	25/56	0	1	225/56

Con la tabla anterior se puede empezar la aplicación de las operaciones de pivoteo propias del método simplex. En negrilla aparecen las posiciones y los valores correctos de los términos asociados a la solución básica factible que se tomó como punto de partida.

$$\begin{bmatrix} x_1 = 225/56 \\ x_4 = 8/7 \\ x_5 = 225/56 \end{bmatrix}$$

Este problema es de maximización, por lo tanto la presencia de costos reducidos positivos indica que la solución actual no es óptima. De la tabla inicial se concluye que x_2 debe entrar a la base y x_5 debe salir ¿por qué?

El elemento pivote es 149/56, se debe entonces dividir la fila Diseño entre este valor y :

- Multiplicarla por 26/7 y sumarla a la fila Adultos.
- Multiplicarla por -65/56 y sumarla a la fila Adolescentes.
- Multiplicarla por -471/28 y sumarla a la fila de la función objetivo.

Variables básicas	Restricción	COEFICIENTE DE (COSTOS REDUCIDOS)						Lado Derecho
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	F.O	1	0	0	-3616/223	0	-942/149	7801/82
hline x_1	Adolescentes	0	1	0	-1392/2171	0	-65/149	675/298
x_4	Adultos	0	0	0	-2032/1043	1	208/149	1006/149
x_2	Diseño	0	0	1	25/149	0	56/149	225/149

Se ha cumplido la condición de óptimalidad, por lo tanto la última tabla es la óptima.

El valor de las variables básicas es:

$$\begin{bmatrix} x_1 = 675/298 \\ x_2 = 225/149 \\ x_4 = 1006/149 \end{bmatrix}$$

Las restantes variables tienen valor cero y la función objetivo tiene un valor de \$ 7801/82.

Se han presentado dos formas de aplicación del método simplex; el algebraico y el esquema de tablas. Es decisión del usuario cual de los dos utilizar.

EJERCICIOS

1. Para el ejemplo de la microempresa de confecciones, determinar todas las soluciones básicas factibles que permitieron obtener el poliedro mostrado en la figura 5.1.
2. Demuestre que el rango de la matriz **A** del ejemplo de la microempresa de confecciones es 4 y que además es igual al rango de la matriz aumentada **Ab**.
3. Aplicando el método simplex solucione los problemas 5 y 7 del capítulo 3.
4. Aplicando el método simplex solucione los problemas 1, 4 y 5 del capítulo 4.

5. Cómo cambia la solución del problema 5 del capítulo 4 (el de la planta de biodiesel) si se supone que una tonelada de materia prima AP1 genera 0,6 toneladas de biocombustible y una tonelada de AP2 produce 0,75 toneladas de biocombustible.
6. Demuestre que: *máximo* $\mathbf{c}\mathbf{x} = -\textit{mínimo} - \mathbf{c}\mathbf{x}$.

Es decir que, un problema de maximización (minimización) siempre se puede expresar como un problema de minimización (maximización) si se multiplican los coeficientes de la función objetivo por -1; y que el valor de la solución óptima del problema modificado es -1 por el valor óptimo del problema original.
7. De forma gráfica ilustre que solucionar un problema de Programación Lineal con restricciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ consiste en expresar el vector $\mathbf{b}$ como una combinación lineal (no multiplicadores no negativos) de los vectores columna que conforman la matriz $\mathbf{A}$.
8. Solucione los problemas del primer ejercicio del capítulo 3 aplicando el método simplex en las formas algebraica y de tablas. En cada iteración compare resultados y ubique en qué lugar de las tablas quedan los términos $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{y}_j$ y $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.
9. Si se utiliza el formato de tablas para realizar las iteraciones simplex ¿dónde se puede identificar la matriz $\mathbf{B}^{-1}$?
10. Para los problemas del punto 8, cuente cuántas iteraciones se necesitaron para llegar al punto óptimo y compare con el número total de soluciones básicas (factibles y no factibles) que se deberían considerar si se optara por la estrategia de evaluar cada una de las bases posibles que se pueden obtener de la matriz $\mathbf{A}$.
11. Repita el ejercicio 10 pero para el caso del problema de la microempresa de confecciones. Ayúdese de los resultados que obtuvo en el ejercicio 1 de este capítulo.
12. Basándose en el formato tableau del método simplex, cuente el número de operaciones matemáticas que se deben efectuar en una iteración.

13. Una compañía produce dos productos denominados A y B. Para ello dispone de dos máquinas ubicadas secuencialmente y en las que para cada unidad de producto se requieren los tiempos que se muestran en la tabla.

Producto	Horas máquina 1	Horas máquina 2	Utilidad
A	Q	P	\$ 5000/kg
B	3.5	2.5	\$ 3000/kg
Disponibilidad	90	100	

- Considerando el siguiente tableau como el inicial (con x_3 y x_4 como variables básicas). Si $Q = 1,5$ ¿qué valor mínimo debe tomar el tiempo de proceso del trabajo A en la máquina 2 de tal forma que la variable x_4 salga de la base en la primera iteración?

z	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
1	-5	-3	0	0	0
0	1.5	3.5	1	0	90
0	P	2.5	0	1	100

- En el caso en que el tableau inicial sea:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
1	-5	-3	0	0	0
0	Q	3.5	1	0	90
0	P	2.5	0	1	100

- Sí $Q = 1,5$ y $P = 2$ ¿cuántas unidades de cada producto se deben producir para maximizar la utilidad?
- Tomando como solución básica factible la asociada a x_2 y x_4 . ¿cuál es el valor correspondiente para estas variables?
- Con respecto a la base anterior ¿cuántas iteraciones adicionales se deben hacer hasta alcanzar la solución óptima?

Referencias bibliográficas

BAZARAA, Mokhtar. JARVIS Jhon & SHERALI, Hanif. *Programación Lineal y flujo en redes*. 2 ed en español, Limusa, México. 1998.

DEGTIAREV, Yuri Ivanovich. *Operations Research*. Ed. única. Escuela Superior. Moscú. 1986.

HILLIER, Frederick. LIEBERMAN, Gerald. *Introduction to Operations Research Seventh Edition*, McGraw-Hill, New York. 2001.

LUENBERGER, David. YINYU, Ye. *Linear and Nonlinear Programming*. Third Edition. Springer Science, New York. 2008.

CAPÍTULO 6

BÚSQUEDA DE UNA SOLUCIÓN INICIAL

En el capítulo pasado se mostró con dos ejemplos cómo funciona el método simplex. En uno de ellos todas las restricciones son del tipo menor igual, y al agregar las variables de holgura en la nueva matriz $\mathbf{A}$ se encuentra una submatriz identidad, la cual siempre está asociada con una solución básica factible. Cuando existen restricciones del tipo mayor igual se restan variables de exceso y por lo tanto en la matriz $\mathbf{A}$ no necesariamente se encontrará la submatriz identidad, haciendo que la identificación de una solución básica factible para iniciar el simplex no sea trivial.

El método simplex se puede empezar a partir de cualquier solución básica factible (punto extremo); sin embargo se ha de recalcar que en la práctica no siempre es fácil obtener una. En problemas con gran número de restricciones y de variables el número de bases que se puede obtener es extremadamente grande, pero no todas ellas corresponden a soluciones básicas factibles, es más, un porcentaje grande de bases genera soluciones básicas no factibles. Como consecuencia se puede necesitar un esfuerzo computacional grande para obtener una solución básica factible.

Por ello se han creado métodos que emplean *variables artificiales* para obtener un punto de partida para el simplex. El término “artificiales”

se refiere al hecho de que estas variables no hacen parte de la formulación del problema; no son variables de decisión, ni de holgura, ni de exceso. Todas las anteriores tienen algún significado cuando se interpretan los resultados, pero las artificiales no tienen relación directa con el problema, son parte de un procedimiento matemático para obtener una solución básica factible inicial. Lo anterior para enfatizar que no se deben confundir las variables artificiales con las de holgura y las de exceso.

6.1. MÉTODOS DE ELIMINACIÓN DE LAS VARIABLES ARTIFICIALES

Puesto que las variables artificiales no tienen ningún significado real en el problema a solucionar, deben ser eliminadas una vez cumplen con su propósito de identificar una solución básica factible a partir de la cual empezar la aplicación del método simplex.

Dos de los procedimientos más conocidos para eliminar variables artificiales son el de penalización (conocido como de la **gran M**) y el de las **dos fases**. A continuación se describen e ilustran cada uno de ellos.

6.2. MÉTODO DE LAS DOS FASES

Una vez sumadas las variables de holgura y restadas las variables de exceso, se suman tantas variables artificiales como sea necesario para obtener una submatriz identidad.

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}_a \geq \mathbf{0}$$

Minimizar

Luego se define como función objetivo la minimización de la suma de las variables artificiales, independientemente de si el problema original es de maximización o minimización.

Minimizar $\mathbf{1x}_a$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} + \mathbf{x}_a &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_a &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

A esta etapa se le conoce como fase uno; si el problema de interés tiene al menos una solución básica factible, el valor de la función objetivo en esta fase es cero (con todas las variables artificiales valiendo cero). A medida que se avanza en la solución las variables artificiales van saliendo de la base y son sustituidas por variables naturales (de decisión, holgura y exceso) hasta generar cumplir la condición de optimalizad.

Si el valor objetivo de la solución óptima de la fase I es cero, incluyendo soluciones degeneradas que incluyan variables artificiales, entonces se habrá identificado una solución básica factible del problema original. Si alguna variable artificial toma un valor positivo al final de la fase I, se deduce que no existen soluciones básicas factibles en el problema original (se deja como ejercicio demostrar este hecho).

La fase II es la aplicación del método simplex sobre el problema original partiendo de la solución básica factible encontrada en la fase I.

En el problema de la nueva empresa de artículos deportivos, después de incluir las variables de exceso se tiene la siguiente formulación (x_3 , x_4 , y x_5 son variables de exceso).

Minimizar $30000000x_1 + 18000000x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned}2240000x_1 + 2600000x_2 - x_3 &= 9000000 \\ 5760000x_1 + 10400000x_2 - x_4 &= 22000000 \\ x_1 - x_5 &= 1,5x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0\end{aligned}$$

Resulta evidente que no hay una submatriz identidad, por lo tanto se agregan variables artificiales para generarla.¹

¹Recuerde que si puede identificar alguna base que genere una solución básica factible $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, no es necesario recurrir a las variables artificiales y se puede iniciar el simplex como se hizo en el mismo problema en el capítulo anterior.

Fase I

Minimizar $A_1 + A_2 + A_3$,

sujeito a:

$$\begin{aligned} 2240000x_1 + 2600000x_2 - x_3 + A_1 &= 9000000 \\ 5760000x_1 + 10400000x_2 - x_4 + A_2 &= 22000000 \\ x_1 - 1,5x_2 - x_5 + A_3 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dividiendo los coeficientes de las dos primeras restricciones por un millón se tiene que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,24 & 2,6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5,76 & 10,4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1,5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

Iteración 1

La submatriz identidad es la base inicial, por lo tanto:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_B = [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

La solución inicial es $\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix}$ con valor

$$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} = 31$$

Los costos reducidos $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - \mathbf{c}_j$ son:

Costo reducido de x_1 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,24 \\ 5,76 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 9$$

Costo reducido de x_2 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} - 0 = 11,5$$

Costo reducido de x_3 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Costo reducido de x_4 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Costo reducido de x_5 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

La variable x_2 es la de costo reducido positivo más grande, por lo tanto ingresa a la base.

Se calcula el vector $\mathbf{y}_e$ que corresponde a $\mathbf{y}_2$.

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix}$$

y se recurre a la ecuación 5.24, que da:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} x_2$$

Por lo tanto $\min \left(\frac{9}{2,6} \frac{22}{10,4} \right) = 2,11$; que corresponde a la variable artificial A_2 , la cual en consecuencia debe salir de la base.

Iteración 2

La columna de x_2 en $\mathbf{A}$ entra a la base sustituyendo la de A_2 . La nueva base es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2,6 & 0 \\ 0 & 10,4 & 0 \\ 0 & -1,5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_B = [1 \quad 0 \quad 1]$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} A_1 \\ x_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ A_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 55/26 \\ 165/52 \end{bmatrix} \text{ y el valor de la función objetivo es } \frac{347}{52}.$$

Determinación de óptimalidad

Costo reducido de x_1 .

$$[1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,24 \\ 5,76 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = \frac{171}{65}$$

Costo reducido de x_3 .

$$[1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Costo reducido de x_4 .

$$[1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \frac{11}{104}$$

Costo reducido de x_5 .

$$[1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Costo reducido de A_2 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -\frac{115}{104}$$

La solución no es óptima (¿por qué?) y la variable x_1 ingresa a la base.

Se calcula el vector $\mathbf{y}_e$ que corresponde a $\mathbf{y}_1$.

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_1 \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,24 \\ 5,76 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 36/65 \\ 119/65 \end{bmatrix}$$

Se determina la variable saliente por medio de la ecuación 5.24:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ x_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 55/26 \\ 165/52 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/5 \\ 36/65 \\ 119/65 \end{bmatrix} x_1$$

La razón mínima es $\frac{165/52}{119/65}$ que corresponde a la variable artificial A_3 indicando que sale de la base.

Iteración 3

En la base x_1 reemplaza a A_3 por lo tanto la nueva base es:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2,6 & 2,24 \\ 0 & 10,4 & 5,76 \\ 0 & -1,5 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} A_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} A_3 \\ A_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 503/238 \\ 275/238 \\ 825/476 \end{bmatrix}$$

con valor de función objetivo $\frac{503}{238}$.

Determinación de óptimalidad

Costo reducido de x_1 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Costo reducido de x_4 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \frac{149}{476}$$

Costo reducido de x_5 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = \frac{52}{119}$$

Costo reducido de A_2 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -\frac{625}{476}$$

Costo reducido de A_3 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = -\frac{171}{119}$$

Al ser un problema de minimización, la presencia de costos reducidos positivos indica que la solución actual no es óptima. La variable entrante es x_5 (¿por qué?)

Se calcula el vector $\mathbf{y}_e$ que corresponde a $\mathbf{y}_5$.

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_5 \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52/119 \\ 36/119 \\ -65/119 \end{bmatrix}$$

Con la ecuación 5.24 se identifica la variable saliente:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 503/238 \\ 275/238 \\ 825/476 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 52/119 \\ 36/119 \\ -65/119 \end{bmatrix} x_5$$

La prueba de la razón mínima entre $\frac{503/238}{52/119}$ y $\frac{275/238}{36/119}$ indica que la variable x_2 sale de la base (¿por qué?)

Iteración 4

La nueva base se obtiene remplazando x_2 por x_5 , por lo tanto:

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2,24 \\ 0 & 0 & 5,76 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -7/8 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/96 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que:

$$\mathbf{c}_B = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} A_3 \\ A_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4/9 \\ 275/72 \\ 275/72 \end{bmatrix}$$

con valor $4/9$.

Determinación de óptimalidad:

Costo reducido de x_4 .

$$[1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -7/8 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/96 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \frac{7}{18}$$

Costo reducido de A_2 .

$$[1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -7/8 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/96 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{7}{18}$$

Costo reducido de A_3 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -7/8 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/96 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

Costo reducido de x_2 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -7/8 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/96 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{13}{9}$$

El único costo reducido es el de la variable x_4 , por lo tanto se debe ingresar a la base.

Para determinar la variable de salida:

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_4 \begin{bmatrix} 1 & -7/8 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/96 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/18 \\ -25/144 \\ -25/144 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/9 \\ 275/72 \\ 275/72 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/18 \\ -25/144 \\ -25/144 \end{bmatrix} x_4$$

Solo queda como alternativa sacar la variable A_1 de la base y remplazarla por x_4 .

Iteración 5

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2,24 \\ -1 & 0 & 5,76 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 18/7 & -1 & 0 \\ 25/56 & 0 & -1 \\ 25/56 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que:

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} A_3 \\ A_2 \\ x_3 \\ A_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 8/7 \\ 225/56 \\ 225/56 \end{bmatrix}$$

con función objetivo 0.

Determinación de óptimalidad:

Costo reducido de x_3 .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18/7 & -1 & 0 \\ 25/56 & 0 & -1 \\ 25/56 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

Costo reducido de A_1 .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18/7 & -1 & 0 \\ 25/56 & 0 & -1 \\ 25/56 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

Costo reducido de A_2 .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18/7 & -1 & 0 \\ 25/56 & 0 & -1 \\ 25/56 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

Costo reducido de A_3 .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18/7 & -1 & 0 \\ 25/56 & 0 & -1 \\ 25/56 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

Costo reducido de x_2 .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18/7 & -1 & 0 \\ 25/56 & 0 & -1 \\ 25/56 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

Puesto que no hay costos reducidos positivos se concluye que la solución actual es óptima. Adicionalmente, el valor de la función objetivo es cero y todas las variables artificiales están fuera de la base, indicando que se encontró una base (y una solución básica factible) para el problema principal, de tal forma que se puede dar inicio a la fase II.

Fase II

La matriz básica encontrada al final de la fase I corresponde a las columnas de las variables x_1 , x_4 y x_5 . Es importante anotar que no es necesario escribir las columnas en el mismo orden que se obtuvo al final de la fase I.

Se retoma la función objetivo y restricciones originales, y se empieza la aplicación del método simplex, tomando como base la hallada en la fase I.

Minimizar $30x_1 + 18x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

sujeto a:

$$2,24x_1 + 2,6x_2 - x_3 = 9$$

$$5,76x_1 + 10,4x_2 - x_4 = 22$$

$$x_1 - 1,5x_2 - x_5 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_B = [30 \quad 0 \quad 0] \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2,24 & 0 & 0 \\ 5,76 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 25/56 & 0 & 0 \\ 18/7 & -1 & 0 \\ 25/56 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 225/56 \\ 8/7 \\ 225/56 \end{bmatrix}$$

Se tienen una solución básica factible cuyo valor de la función objetivo, en esta fase, es: $\frac{3375}{28}$.

Se tienen todos los elementos necesarios para empezar el método simplex en la fase II, la solución óptima debe ser la misma encontrada en el capítulo anterior. Se deja como ejercicio al lector terminar esta segunda fase.

MÉTODO DE LA GRAN M

Otro método utilizado para eliminar las variables artificiales es el de la gran M , el cual consiste en asignarles una penalización grande (M), de tal forma que se vean obligadas a salir de la base en las sucesivas iteraciones, sin tener que hacer el procedimiento en dos etapas.

Cuando se desea maximizar la función objetivo se restan las variables artificiales multiplicadas por M , $\mathbf{c}\mathbf{x} - M\mathbf{1}\mathbf{x}_a$, y en los problemas de minimización se suman, $\mathbf{c}\mathbf{x} + M\mathbf{1}\mathbf{x}_a$, siendo M una constante bastante grande (aunque en la práctica no tanto como para que se generen problemas de redondeo). Resulta evidente que bajo este planteamiento no es atractivo tener alguna variable artificial con un valor diferente de cero.

Aplicando el método de la gran M al problema que se solucionó con el procedimiento de las dos fases, la función objetivo se modificaría a:

Fase I

Minimizar $30x_1 + 18x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + MA_1 + MA_2 + MA_3$,
sujeto a:

$$\begin{aligned} 2,24x_1 + 2,6x_2 - x_3 + A_1 &= 9 \\ 5,76x_1 + 10,4x_2 - x_4 + A_2 &= 22 \\ x_1 - 1,5x_2 - x_5 + A_3 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \\ A_1, A_2, A_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Al igual que en el método de las dos fases, se inicia tomando como solución inicial la proporcionada por la submatriz identidad.

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= [30 \quad 18 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad M \quad M \quad M] \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2,24 & 2,6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5,76 & 10,4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1,5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_B = [M \quad M \quad M] \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La solución inicial es $\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix}$ con valor

$$\mathbf{c}_B \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} M & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} = 31M.$$

Los costos reducidos $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j$ son:

Costo reducido de x_1 .

$$\begin{bmatrix} M & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,24 \\ 5,76 \\ 1 \end{bmatrix} - 30 = 9M - 30$$

Costo reducido de x_2 .

$$\begin{bmatrix} M & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} - 18 = 11,5M - 18$$

Costo reducido de x_3 .

$$\begin{bmatrix} M & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -M$$

Costo reducido de x_4 .

$$\begin{bmatrix} M & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -M$$

Costo reducido de x_5 .

$$\begin{bmatrix} M & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = -M$$

Recordando que M es un valor positivo muy grande, los costos reducidos muestran que la variable x_2 ingresa a la base.

Se calcula el vector $\mathbf{y}_e$ que corresponde a $\mathbf{y}_2$.

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix}$$

y la ecuación 5.24 da:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} x_2$$

La razón mínima $\left(\frac{9}{2,6} \frac{22}{10,4}\right) = 2,11$ corresponde a la variable artificial A_2 que entonces debe salir de la base.

Iteración 2

La columna de x_2 en $\mathbf{A}$ entra a la base sustituyendo la de A_2 . La nueva base es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2,6 & 0 \\ 0 & 10,4 & 0 \\ 0 & -1,5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_B = [M \quad 18 \quad M]$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} A_1 \\ x_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ A_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 55/26 \\ 165/52 \end{bmatrix}$$

con valor $\frac{347}{52}M + \frac{495}{13}$.

Verificando si la solución actual es óptima:

Costo reducido de x_1 .

$$[M \quad 18 \quad M] \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,24 \\ 5,76 \\ 1 \end{bmatrix} - 30 = \frac{171}{65}M - \frac{1302}{65}$$

Costo reducido de x_3 .

$$\begin{bmatrix} M & 18 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -M$$

Costo reducido de x_4 .

$$\begin{bmatrix} M & 18 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \frac{11}{104}M - \frac{45}{26}$$

Costo reducido de x_5 .

$$\begin{bmatrix} M & 18 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = -M$$

Costo reducido de A_2 .

$$\begin{bmatrix} M & 18 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = \frac{19}{26} - \frac{11}{104}M$$

La variable x_1 tiene el valor positivo más grande en su costo reducido y por ello entra a la base.

Se calcula el vector $\mathbf{y}_e$ que corresponde a $\mathbf{y}_1$.

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/52 & 0 \\ 0 & 15/104 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,24 \\ 5,76 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 36/65 \\ 119/65 \end{bmatrix}$$

Utilizando la ecuación 5.24 se determina la variable saliente:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ x_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 55/26 \\ 165/52 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/5 \\ 36/65 \\ 119/65 \end{bmatrix} x_1$$

Aplicando la prueba de la razón mínima indica que la variable que sale de la base es A_3 (con un valor $\frac{165/52}{119/65} = \frac{825}{476}$).

Iteración 3

En la base x_1 reemplaza a A_3 por lo tanto la nueva base es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2,6 & 2,24 \\ 0 & 10,4 & 5,76 \\ 0 & -1,5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [M \quad 18 \quad 30]$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} A_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} A_3 \\ A_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 503/238 \\ 275/238 \\ 825/476 \end{bmatrix}$$

con valor $\frac{503}{238}M + \frac{2475}{34}$.

Determinación de óptimalidad:

Costo reducido de x_3 .

$$[M \quad 18 \quad 30] \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -M$$

Costo reducido de x_4 .

$$[M \quad 18 \quad 30] \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \frac{149}{476}M - \frac{225}{68}$$

Costo reducido de x_5 .

$$[M \quad 18 \quad 30] \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = \frac{52}{119}M - \frac{186}{17}$$

Costo reducido de A_2 .

$$[M \quad 18 \quad 30] \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - M = -\frac{149}{476}M + \frac{225}{68}$$

Costo reducido de A_3 .

$$\begin{bmatrix} M & 18 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - M = -\frac{52}{119}M + \frac{186}{17}$$

Las variables de x_4 y x_5 tienen costos reducidos positivos, pero es más grande el de la última, por ello x_5 entra a la base.

El vector $\mathbf{y}_5$.

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_5 \begin{bmatrix} 1 & -149/476 & -52/119 \\ 0 & 25/476 & -36/119 \\ 0 & 75/952 & 65/119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52/119 \\ 36/119 \\ -65/119 \end{bmatrix}$$

Se identifica la variable saliente:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 503/238 \\ 275/238 \\ 825/476 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 52/119 \\ 36/119 \\ -65/119 \end{bmatrix} x_5$$

La prueba: $\text{MIN} \left[\frac{503/238}{52/119}, \frac{275/238}{36/119} \right]$ indica que x_2 sale de la base.

Iteración 4

La nueva base se obtiene remplazando por :

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} A_1 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2,24 \\ 0 & 0 & 5,76 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -7/18 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/144 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que:

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} M & 0 & 30 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} A_3 \\ A_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4/9 \\ 275/72 \\ 275/72 \end{bmatrix}$$

con valor $\frac{4}{9}M + \frac{275}{36}$.

Determinación de óptimalidad:

Costo reducido de x_2 .

$$[M \ 0 \ 30] \begin{bmatrix} 1 & -7/18 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/144 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6 \\ 10,4 \\ -1,5 \end{bmatrix} - 18 = -\frac{13}{9}M - \frac{217}{6}$$

Costo reducido de x_3 .

$$[M \ 0 \ 30] \begin{bmatrix} 1 & -7/18 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/144 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -M$$

Costo reducido de x_4 .

$$[M \ 0 \ 30] \begin{bmatrix} 1 & -7/18 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/144 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \frac{7}{18}M - \frac{125}{24}$$

Costo reducido de A_2 .

$$[M \ 0 \ 30] \begin{bmatrix} 1 & -7/18 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/144 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - M = -\frac{25}{18}M + \frac{125}{24}$$

Costo reducido de A_3 .

$$[M \ 0 \ 30] \begin{bmatrix} 1 & -7/18 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/144 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - M = 0$$

La presencia del costo reducido positivo de x_4 indica que la solución actual no es óptima y que esta variable debe entrar a la base. Ahora se determina la variable saliente calculando el vector $\mathbf{y}_4$ recurriendo a la ecuación 5.24.

El vector $\mathbf{y}_5$.

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -7/18 & 0 \\ 0 & 25/144 & -1 \\ 0 & 25/144 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/18 \\ -25/144 \\ -25/144 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/9 \\ 275/72 \\ 275/72 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/18 \\ -25/144 \\ -25/144 \end{bmatrix} x_4$$

Los signos del vector $\mathbf{y}_4$ muestran que la variable saliente solo puede ser A_1 (que es remplazada por x_4).

Se eliminaron de la base todas las variables artificiales y se tiene ahora una que está formada por las columnas de la matriz $\mathbf{A}$, correspondientes a las variables x_4 , x_5 y x_1 , que es la misma obtenida por el método de las dos fases.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2,24 \\ -1 & 0 & 5,76 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aunque ahora se pudiera utilizar la formulación del problema sin las variables artificiales y empezar la aplicación del método simplex, a partir de la base encontrada, se debe continuar solucionando el problema con variables artificiales hasta llegar a la solución óptima y verificando que en esta no queden variables artificiales como básicas. Se dejan estos pasos al lector.

EJERCICIOS

1. Demostrar que si en la solución óptima de la fase I $\mathbf{x}_a \neq 0$, el problema original no tiene solución básica factible.
2. ¿Qué sucede si al aplicar el método de la gran M al obtener la solución óptima se tiene una variable artificial con valor diferente de cero? Demuéstrelo.
3. ¿Qué sucede si al aplicar el método de la gran M se concluye que el valor óptimo es no acotado y todas las variables artificiales valen cero? Demuéstrelo.
4. ¿Qué sucede si al aplicar el método de la gran M se concluye que el valor óptimo es no acotado y al menos una variable artificial es diferente de cero? Demuéstrelo.

5. Aplicando los métodos de las dos fases y de la gran M encuentre una solución básica factible que permita iniciar la aplicación del método simplex.

Minimizar $z = 6x + 8y$,
sujeto a:

$$4x - 6y \leq 11$$

$$x + y \geq 6$$

$$2x + 4y \geq 20$$

$$x, y \geq 0$$

6. Compare las bases obtenidas en el punto anterior ¿son iguales? ¿en qué difieren?
7. Solucione el problema del punto 5 aplicando el método simplex a partir de las bases obtenidas. Grafique la trayectoria seguida hasta la obtención de la solución óptima. Incluya los puntos asociados a las iteraciones de la fase I y de la eliminación de variables artificiales en el método de la gran M .
8. Solucione el siguiente problema aplicando el método de las dos fases y de la gran M para obtener una solución básica factible inicial a partir de la cual aplicar el método simplex. Grafique la región factible y en ella señale la trayectoria seguida hasta llegar a la solución óptima.

Minimizar $4x_1 + x_2$,
sujeto a:

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

9. Cuántas operaciones adicionales se deben hacer para solucionar un problema de Programación Lineal cuando no se conoce un solución básica factible inicial, suponiendo que en cada una de

las primeras p iteraciones sale de la base una de la p -ésimas variables artificiales. Responda en caso de utilizar:

- El método de las dos fases.
- El método de penalización.

Tenga en cuenta el resultado del ejercicio 9 del capítulo anterior.

10. Con respecto al punto 9, en cuántas operaciones se reduce el esfuerzo computacional en comparación con la estrategia de evaluar cada una de las bases que se pueden extraer de la matriz $\mathbf{A}$. Considere los siguientes dos escenarios :

- Se conoce una solución inicial.
- Se debe aplicar alguno de los dos métodos vistos para encontrar una solución básica factible.

Referencias bibliográficas

BAZARAA, Mokhtar. JARVIS Jhon & SHERALI, Hanif. *Programación lineal y flujo en redes*. 2 ed en español, Limusa, México. 1998.

LUENBERGER, David. YINYU, Ye. *Linear and Nonlinear Programming*. Third Edition. Springer Science, New York. 2008.

CAPÍTULO 7

DUALIDAD EN PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Uno de los aspectos más llamativos e interesantes de la Programación Lineal es que una vez definido un problema siempre “oculto en la sombra” hay otro problema, es decir que en realidad al solucionar un problema de Programación Lineal se están solucionando dos. Hasta el momento esto puede resultar sorprendente y el lector deberá cuestionarse si, cuando analizó la forma de solucionar los problemas de la empresa textil y de la compañía de artículos deportivos, era notoria la presencia simultánea de otro problema de Programación Lineal y si solucionó este otro problema.

Esta situación no es una mera curiosidad, en realidad la información proporcionada por el problema “oculto en la sombra”, el cual se denomina problema DUAL, es de gran importancia para el tomador de decisiones. En algunos casos puede obtenerse información más útil al analizar los resultados del problema dual que del mismo problema originalmente planteado (PRIMAL).

Las variables asociadas al problema DUAL simplemente se denominan **variables duales**, aunque tienen sinónimos que son comunes; **precios sombra** (por aquello del problema “oculto en la sombra”), **multiplicadores simplex** y **multiplicadores de Lagrange**.

Este último nombre debe ser bastante familiar para el lector que ya ha visto y recuerda sus cursos de cálculo en varias variables.

Como se mencionó en los párrafos anteriores, al solucionar un problema de Programación Lineal en realidad se están solucionando dos: Al que no es explícito se le denominó DUAL, falta entonces dar nombre al otro problema, al originado por la necesidad que nos motivó a plantear y formular el problema de Programación Lineal. A este se le conoce como problema PRIMAL (de primario), aunque estas denominaciones son relativas porque si al problema que señalamos como DUAL le obtenemos su respectivo dual, el resultado es el problema que estamos asignando como PRIMAL, es decir que el DUAL del DUAL es el **PRIMAL**.

Para aclarar la situación supongamos que se tienen dos cursos de Investigación de Operaciones. En uno de ellos consideramos el problema de la microempresa bogotana de confección, a la formulación mostrada en el capítulo 5 la llamamos problema A y la designamos como PRIMAL, el problema DUAL lo indicamos como problema B. En el otro curso se puede hacer la operación inversa e indicar un planteamiento que nos lleve a formular directamente el problema B, al cual en este caso llamaríamos PRIMAL; y cuando nos pidan encontrar el DUAL la respuesta correcta sería el problema A. Como se observa, dependiendo de la situación, cualquiera de los problemas asociados puede designarse como DUAL o como PRIMAL.

Veamos ahora cómo se obtiene un problema DUAL una vez definido el PRIMAL. Antes de dar un procedimiento se deben tener claros los siguientes conceptos:

- Si la función objetivo del PRIMAL se debe maximizar, entonces la función objetivo del DUAL se debe minimizar.
- Si la función objetivo del PRIMAL se debe minimizar, entonces la función objetivo del DUAL se debe maximizar.
- Cada una de las restricciones del problema PRIMAL genera una variable en el problema DUAL. Es decir que en el DUAL hay tantas variables como restricciones haya en el PRIMAL.
- Por cada variable que tenga el PRIMAL se genera una restricción en el problema DUAL.

Lo anterior se menciona porque es un error común creer que el número de variables en el problema DUAL está relacionado con el número de variables en el problema PRIMAL; y que las restricciones de uno están relacionadas con el número de restricciones del otro.

Hay diferentes procedimientos diferentes pero equivalentes para obtener la formulación del problema DUAL. A continuación se presentan algunos de ellos, se aconseja al lector familiarizarse con al menos uno de ellos.

7.1. PRIMAL CON RESTRICCIONES EN FORMA DE DESIGUALDAD

Definamos como primal el problema:

Minimizar $\mathbf{c}\mathbf{x}$,
sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0\end{aligned}$$

Para la obtención del dual se tiene que:

El vector de lados derechos de las restricciones, $\mathbf{b}$, pasa a ocupar el lugar de coeficientes de las variables de las variables duales en la función objetivo.

Existen tantas variables duales como restricciones hay en el primal, entonces la transpuesta de la matriz $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes de las variables duales en las restricciones del problema dual.

El vector $\mathbf{c}$ de coeficientes de la función objetivo en el problema primal pasa a ser el de lados derechos de las restricciones duales.

La función objetivo pasa de minimización a maximización.

Con las anteriores consideraciones y llamando $\mathbf{w}$ al vector de variables duales, se tiene que la formulación del dual es:

Maximizar $\mathbf{b}^T\mathbf{w}$,
sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T\mathbf{w} &\leq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{w} &\geq 0\end{aligned}$$

7.2. PRIMAL CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

Es común que en los problemas de Programación Lineal cuando las restricciones están en forma de desigualdad se agreguen las correspondientes variables de holgura y/o exceso para obtener igualdades estrictas. En estos casos se tiene:

Minimizar $\mathbf{c}\mathbf{x}$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0\end{aligned}$$

El correspondiente dual es:

Maximizar $\mathbf{b}^T\mathbf{w}$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T\mathbf{w} &\leq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{w} &\text{ libre (sin restricción)}\end{aligned}$$

El siguiente esquema muestra cómo obtener la formulación de problemas duales. No se especifica cuál problema es primal y cuál dual, porque estas definiciones resultan arbitrarias. Se diferencian los problemas de acuerdo con la función objetivo y se muestra cómo moverse de un lado al otro. También resulta útil para situaciones en las que algunas restricciones se presentan en forma de desigualdad y otras en forma de igualdad.

Considerando el caso de la microempresa de confección.

Maximizar $13000x_1 + 145000x_2 + 160000x_3$,
 sujeto a

$$\begin{aligned}x_1 + 1,5x_2 + x_3 &\leq 8 \\ 1,2x_1 + 1,8x_2 + 3x_3 &\leq 11,4 \\ x_1 + 1,4x_2 + 1,5x_3 &\leq 8,5 \\ x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

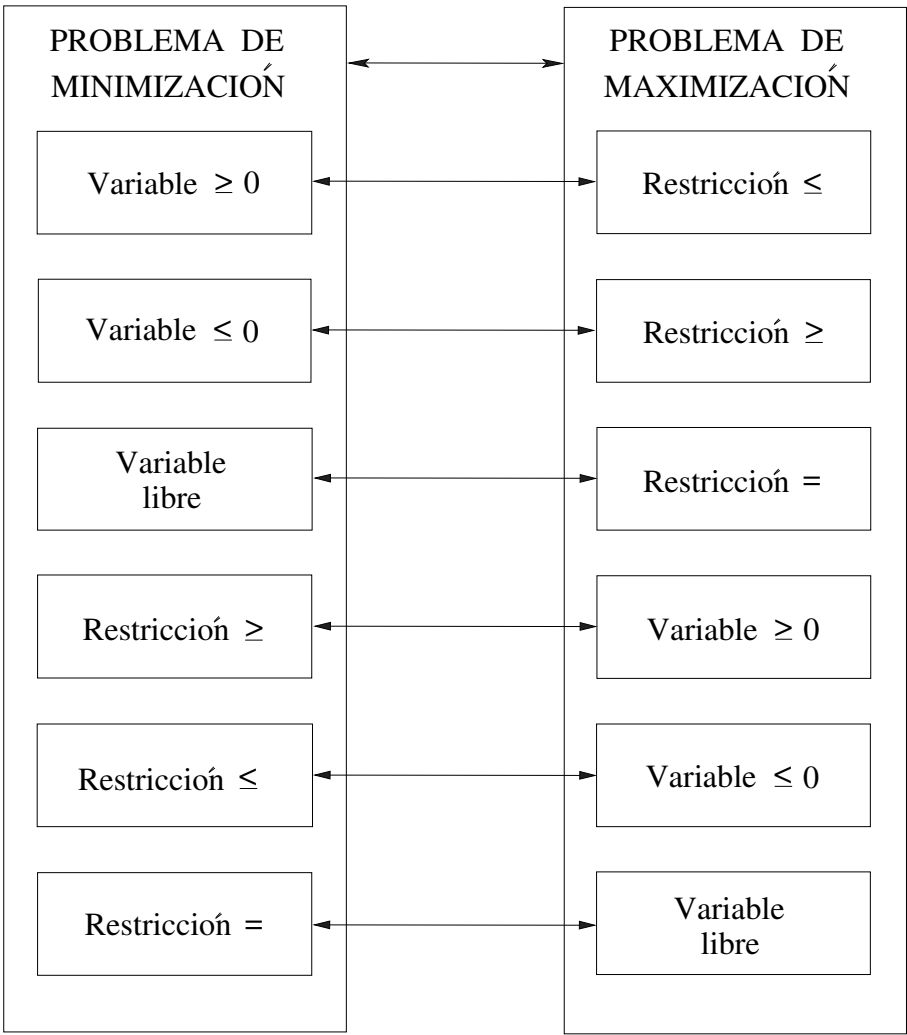


Figura 7.1: Relaciones Primal-Dual

se tiene que :

- El criterio de la función objetivo del dual es minimizar.
- Existen un vector $\mathbf{w}$ de cuatro elementos (una variable dual por cada restricción).

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

w_1 está asociada a la restricción $x_1 + 1,5x_2 + x_3 \leq 8$

w_2 está asociada a la restricción $1,2x_1 + 1,8x_2 + 3x_3 \leq 11,4$

w_3 está asociada a la restricción $x_1 + 1,4x_2 + 1,5x_3 \leq 8,5$

w_4 está asociada a la restricción $x_3 \leq 3$

- Hay tres restricciones duales; una generada por x_1 , otra por x_2 y otra por x_3

Es útil recordar que para el problema primal:

$$\mathbf{c} = [130000 \quad 145000 \quad 160000]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 1 \\ 1,2 & 1,8 & 3 \\ 1 & 1,4 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11,4 \\ 8,5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para el dual se tendra entonces:

$$\mathbf{b}^T = [8 \quad 11,4 \quad 8,5 \quad 3] \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 130000 \\ 145000 \\ 160000 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 1,8 & 1,4 & 0 \\ 1 & 3 & 1,5 & 1 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el esquema:

$$\text{Función objetivo : Minimizar } \mathbf{b}^T \mathbf{w} = [8 \quad 11,4 \quad 8,5 \quad 3] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

$$8w_1 + 11,4w_2 + 8,5w_3 + 3w_4$$

$$\text{Restricciones : } \mathbf{A}^T \mathbf{w} \geq \mathbf{c}^T$$

Asociada a x_1 y con signo $\geq^1$

$$1w_1 + 1,2w_2 + 1w_3 + 0w_4 \geq 130000$$

Asociada a x_2 y con signo $\geq$

$$1,5w_1 + 1,8w_2 + 1,4w_3 + 0w_4 \geq 145000$$

Asociada a x_3 y con signo $\geq$

$$1w_1 + 3w_2 + 1,5w_3 + 1w_4 \geq 160000$$

Signo de las variables : viene dado por el signo de las restricciones (todas son $\leq$?).

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0, w_4 \geq 0$$

En resumen, el correspondiente dual es:

Minimizar $8w_1 + 11,4w_2 + 8,5w_3 + 3w_4$,

sujeto a :

$$1w_1 + 1,2w_2 + 1w_3 + 0w_4 \geq 130000$$

$$1,5w_1 + 1,8w_2 + 1,4w_3 + 0w_4 \geq 145000$$

$$1w_1 + 3w_2 + 1,5w_3 + 1w_4 \geq 160000$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0, w_4 \geq 0$$

7.3. CONSIDERACIONES SOBRE DUALIDAD

Más allá de lo interesante y curioso que pueda parecer la existencia de un problema dual una vez definido un primal, hay algunas relaciones teóricas interesantes entre los términos de cada uno de los dos problemas.

Considere los siguientes dos problemas, cada uno de los cuales es el dual del otro:

¹Como lo indica el esquema, el signo de la restricción es indicado por el signo de la variable correspondiente. Por lo tanto cada signo se debe establecer independientemente para cada restricción (no siempre es $\geq$).

PRIMAL (DUAL)

Minimizar $\mathbf{c}\mathbf{x}$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

DUAL (PRIMAL)

Maximizar $\mathbf{b}^T \mathbf{w}$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T &\leq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{w} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Para los dos problemas anteriores sean respectivamente x_0 y w_0 soluciones factibles cualesquiera (no necesariamente las óptimas), se debe cumplir entonces que:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 &\geq \mathbf{b} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{w}_0 &\leq \mathbf{c}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_0 \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Multiplicando la primera expresión por la izquierda por $\mathbf{w}_0^T$ y la segunda también por la izquierda pero por $\mathbf{x}_0^T$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_0^T (\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{b}) &= \mathbf{w}_0^T \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{w}_0^T \mathbf{b} \\ (\mathbf{A}^T \leq \mathbf{c}) \mathbf{x}_0^T &= \mathbf{x}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{w}_0 \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{c}^T\end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de la transposición de matrices a $\mathbf{x}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{w}_0 \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{c}^T$, se tiene:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{w}_0)^T &\leq (\mathbf{x}_0^T \mathbf{c}^T) \\ \mathbf{w}_0^T (\mathbf{x}_0^T \mathbf{A}^T)^T &\leq (\mathbf{c}^T)^T (\mathbf{x}_0^T)^T \\ \mathbf{w}_0^T (\mathbf{A}^T)^T (\mathbf{x}_0^T)^T &\leq \mathbf{c}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{w}_0^T \mathbf{A}\mathbf{x}_0 &\leq \mathbf{c}\mathbf{x}_0\end{aligned}$$

Ahora, al comparar las expresiones

$$\mathbf{w}_0^T \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{w}_0^T \mathbf{b}$$

y

$$\mathbf{w}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{c} \mathbf{w}_0^T$$

se puede observar que $\mathbf{c} \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{w}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{w}_0^T \mathbf{b}$. Recuerde que $\mathbf{c} \mathbf{x}_0$ es el valor de la función objetivo del problema de minimización y $\mathbf{w}_0^T \mathbf{b}$ es el valor de la función objetivo del problema de maximización, por lo tanto se puede concluir que:

Una solución factible del problema de minimización siempre dará como resultado un valor de la función objetivo **mayor o igual** que el obtenido, para la función objetivo del problema de maximización con cualquier solución factible de este.

Este hecho es importante porque:

Proporciona cotas superiores para los problemas de maximización y cotas inferiores para los problemas de minimización.

Establece una condición de optimalidad; si $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{w}_0$ son soluciones factibles de los problemas primal/dual de minimización y maximización y $\mathbf{c} \mathbf{x}_0 = \mathbf{w}_0^T \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{w}_0$ son las soluciones óptimas de sus respectivos problemas.

Si existen soluciones óptimas para ambos problemas, el valor de las funciones objetivo es el mismo en ambos casos (no el valor de las soluciones).

La condición $\mathbf{c} \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{w}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{w}_0^T \mathbf{b}$ también indica que si el problema de minimización es no acotado (es decir, el valor de su función objetivo tiende a menos infinito), entonces el problema de maximización no tiene solución factible.

Si el problema de maximización es no acotado (es decir, el valor de su función objetivo tiende a infinito), entonces el problema de minimización no tiene solución factible.

La condición estudiada no permite decir que necesariamente si uno de los dos problemas es no factible, entonces automáticamente su dual es no acotado. Puede pasar que ambos problemas sean no factibles.

7.4. CONDICIONES DE ÓPTIMALIDAD DE KARUSH - KUHN - TUCKER, KKT

Existen un conjunto de condiciones que son necesarias y suficientes para establecer si un punto $\mathbf{x}^*$ es la solución óptima de un problema de Programación Lineal. Estas condiciones son conocidas como de Karush - Kuhn - Tucker y son la base sobre la que se construye la teoría de Programación Lineal.

La primera condición (**factibilidad primal**) dice que el punto óptimo $\mathbf{x}^*$ debe satisfacer todas las restricciones del problema, es decir ser una solución básica factible.

Considere nuevamente el problema

Minimizar $\mathbf{c}\mathbf{x}$,
sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

con su dual asociado
Maximizar $\mathbf{b}^T\mathbf{w}$,
sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T\mathbf{w} &\leq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{w} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Entonces la primera condición se expresa matemáticamente como:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}^* &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^* &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

La segunda condición (**factibilidad dual**) establece que debe existir un punto $\mathbf{w}^*$, que sea una solución básica factible del problema dual.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T\mathbf{w}^* &\leq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{w}^* &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

La tercera condición es conocida como de **holgura complementaria**, se expresa como:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}^*)^T (\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) &= 0 \\ (\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{A}^T \mathbf{w}^* - \mathbf{c}^T) &= 0\end{aligned}$$

Vale la pena detenerse en esta última condición ya que es útil desde los puntos de vista, práctico y teórico. Se observa que si en alguno de los dos problemas existe un valor diferente de cero para holgura (o un exceso) entonces la variable dual (primal) asociada con la correspondiente restricción toma un valor de cero. Así mismo, si una variable tiene valor positivo entonces la correspondiente restricción dual debe ser activa (cumplirse como una igualdad, sin holgura ni exceso).

Además, mediante la condición de holgura complementaria

$$(\mathbf{w}^*)^T \mathbf{A}\mathbf{x}^* - (\mathbf{w}^*)^T \mathbf{b} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{w}^* - (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{c}^T$$

Por las propiedades de transposición se sabe que:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}^*)^T \mathbf{A}\mathbf{x}^* - (\mathbf{w}^*)^T \mathbf{b} &= (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{w}^*)^T - \left((\mathbf{x}^*)^T \mathbf{c}^T \right)^T \\ \left((\mathbf{x}^*)^T \mathbf{A}^T \mathbf{w}^* \right)^T - \left((\mathbf{x}^*)^T \mathbf{c}^T \right)^T &= (\mathbf{w}^*)^T \left((\mathbf{x}^*)^T \mathbf{A}^T \right)^T - \mathbf{c}\mathbf{x}^*\end{aligned}$$

De donde:

$$(\mathbf{w}^*)^T \mathbf{A}\mathbf{x}^* - (\mathbf{w}^*)^T \mathbf{b} = (\mathbf{w}^*)^T \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{c}\mathbf{x}^*$$

Esta última expresión deja claro que:

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = (\mathbf{w}^*)^T \mathbf{b}.$$

En general se había mostrado que $\mathbf{c}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{w}^T \mathbf{b}$ (llamada *propiedad de dualidad débil*) para cualesquiera par de vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{w}$ factibles, en consecuencia también para $\mathbf{w}^*$, por lo tanto la igualdad $\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{w}^{*T} \mathbf{b}$ indica que $\mathbf{w}^*$ maximiza $\mathbf{w}^T \mathbf{b}$ es decir que $\mathbf{w}^*$ es una solución óptima del problema dual:

Maximizar $\mathbf{b}^T \mathbf{w}$,
 sujeto a:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T \mathbf{w} &\leq \mathbf{c}^T \\ \mathbf{w} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Ahora suponga que el procedimiento se hace considerando como primal el problema de maximización y como dual el de minimización. Dado que la situación es simétrica, aplicando KKT se puede demostrar que si existe una solución $\mathbf{w}^*$ entonces existe un $\mathbf{x}^*$ que minimiza $\mathbf{c}\mathbf{x}$.

Este importante resultado se resume en:

Si cualquiera de los problemas (el primal o el dual) tiene solución óptima, entonces ambos problemas tienen solución óptima y el valor de las dos funciones objetivo es igual.

7.5. INTERPRETACIÓN PRÁCTICA DEL PROBLEMA DUAL

Explicación de las variables

Del tableau final del método simplex o de las salidas de cualquier programa de Programación Lineal es importante entender el significado de estos términos:

Variables

■ Variables Básicas

Recuérdese que las variables de holgura y de decisión que están en la base y en ausencia de degeneración tienen un valor distinto de cero. Todos sus coeficientes en la tabla final de simplex son cero, exceptuando la posición que le corresponde en la cual tiene un coeficiente de 1. Su valor corresponde al lado derecho de la restricción de la fila donde su coeficiente es 1.

Cuando las variables de holgura tienen un valor distinto de cero, su recurso asociado es abundante. El valor de la variable de holgura es lo que se dejó de utilizar de ese recurso.

	Solución	Costo de oportunidad (costo reducido, fila cero)	Renglones diferentes de cero	Recursos y restricciones	Número de variables
Variables básicas de decisión	Tiene algún valor en la solución (cuando no hay degeneramiento).	0			Igual al número de restricciones (m).
Variables básicas de holgura	Tiene algún valor que representa lo que se dejó utilizar el recurso.	0	Se utilizan los coeficientes para el análisis de sensibilidad	Recursos abundantes.	Restricciones no activas.
Variables no básicas de decisión	Su valor en la solución es de cero (no pertenecen a la base)	Diferentes de cero, si es igual a cero existen óptimos alternativos (infinitas soluciones)			(n-m).
Variables no básicas de holgura	Su valor en la solución es de cero (no pertenecen a la base)	Diferente de cero. Es el precio sombra. Entre más escaso es el recurso mayor es su precio sombra	Se utilizan los coeficientes del análisis de sensibilidad	Recursos escasos.	Restricciones activas

■ Variables no básicas

Las variables no básicas tiene un valor de cero (no pertenecen a la solución óptima). Cuando es una variable decisión tiene un coeficiente en la fila cero que representa su costo de oportunidad. Esto significa que su coeficiente en la función objetivo debe aumentar marginalmente (ε) por encima de su costo de oportunidad para que ingrese a la base. Si se aumenta el coeficiente en la función objetivo de la variable de decisión no básica hasta su costo de oportunidad se presenta un óptimo alterno.

Recursos

■ Recursos Abundantes

Se sabe que comprar más de un recurso abundante no produce ninguna modificación en el valor de la función objetivo; si esto fuera cierto, lo primero que se haría sería utilizar todo lo que se tiene disponible y después se compraría algo de este recurso.

Se puede hablar de abundancia solo hasta un límite. La pregunta que se debe hacer es ¿cuánto es lo máximo que puedo disminuir el recurso abundante hasta que se vuelva escaso?

La respuesta es sencilla, los recursos abundantes se convierten en escasos cuando se utiliza o desperdicia el valor indicado por las variables de holgura asociadas a ellos. Por lo tanto los valores de los lados derechos asociados con recursos abundantes pueden disminuirse el valor de la variable de holgura y aumentarse infinitamente conservando las variables que forman la base factible óptima.

■ Recursos Escasos

Están asociados con las variables no básicas de holgura. Las restricciones asociadas con las variables de holgura no básicas son activas se comportan como una igualdad.

Hay dos consideraciones de un recurso escaso:

Como es escaso se deben realizar todos los esfuerzos para no desperdiciarlo. Si se llega a desperdiciar el valor de su función

objetivo disminuye. Si se tuviera más de ese recurso, la función objetivo aumentaría.

Para todo recurso escaso se debe saber:

¿Cuánto me aumenta la función objetivo si se adquiere una unidad adicional?

La primera respuesta se obtiene con el coeficiente en la fila cero de la variable asociada a ese recurso. Recuerde que en la fila cero se ubican los costos de oportunidad.

Fila cero

■ Precio sombra

Es el coeficiente en el fila cero del tableau final con las variables de holgura o exceso que son no básicas.

Se define con tasa a la cual aumentaría o disminuiría la función objetivo por contar con cantidades adicionales o desperdiciar cantidades del recurso escaso.

$$\text{Precio sombra} = \frac{\text{cambio en el valor óptimo}}{\text{cambio en el lado derecho}}$$

Es importante mencionar que la función objetivo no crece indefinidamente sino hasta que la restricción pase de ser activa a ser no activa. En otras palabras cuando el recurso se vuelve abundante debido a la compra que usted realiza de él.

■ Interpretaciones de Precio Sombra

Costo de oportunidad: porque es lo que usted está dejando de ganar por no contar con una unidad más de ese recurso.

Precio sombra: porque es lo máximo que se estaría dispuesto a pagar por una unidad más de ese recurso, ya que la función objetivo crece en ese valor. Es la tasa a la cual aumenta la función objetivo por la compra de una unidad adicional del recurso escaso. Estas consideraciones se deben hacer siempre dentro del intervalo permitido para que se conserve la base óptima.

Los precios sombra se deben mantener dentro de los rangos o límites del análisis de sensibilidad.

Es importante tener en cuenta que entre más escaso es un recurso mayor es su precio sombra.

- ¿Cuántas unidades de los recursos escasos se deben comprar?

La respuesta también es sencilla, hasta que se vuelvan abundantes. Esto quiere decir, una cantidad por encima de un valor determinado, con lo que un recurso que antes era escaso se vuelve abundante. Si el recurso se disminuye por debajo del intervalo permitido, la base cambia y el recurso escaso se vuelve muy apremiante, por lo tanto su precio sombra aumenta. Si se aumenta la cantidad de recurso por encima del intervalo permitido se convierte en un recurso abundante y su precio sombra será cero.

Usos de precios sombra

Pricing Out: cuando se desea fabricar un nuevo producto para el mercado se puede conocer cuál debe ser su precio mínimo para que sea atractivo a la empresa. Para obtener el precio mínimo por unidad de este nuevo producto es necesario conocer la cantidad que se consume de cada uno de los recursos. El precio del nuevo producto debe compensar el costo de oportunidad de unos recursos escasos que pueden ser utilizados en la producción de otros bienes.

$$\text{Precio nuevo Producto} = \sum_{j=1}^n a_{ij} PS_i$$

Donde PS_i es el precio sombra de los recursos y a_{ij} (coeficiente en las restricciones) es el consumo de cada variable de decisión sobre los recursos disponibles. Recuérdese que sólo los recursos escasos tienen un asociado un precio sombra.

- **Costos de oportunidad (costo reducido) de variables de decisión no básicas**

Cuando una variable decisión no pertenece a la solución óptima, tiene un costo de oportunidad que representa el aumento que debe

tener su coeficiente en la función objetivo para que esta variable sea atractiva. Si se aumenta su coeficiente exactamente en su costo reducido se presentan óptimos alternos. Si su coeficiente en la función objetivo se aumenta un valor infinitesimal por encima de costo reducido, esta variable entraría a la base.

El costo reducido es la diferencia del costo de los recursos que requiere una variable de decisión menos su aporte (coeficiente) en la función objetivo. Si una variable aporta menos que los recursos que consume, no se tendrá en cuenta en la solución óptima, por lo tanto es una variable no básica.

$$\text{Costo reducido} = \sum_{j=1}^n a_{ij}PS_i - c_j$$

Donde se c_j es el coeficiente de la variable en la función objetivo.

EJERCICIOS

1. ¿En qué situaciones es más conveniente solucionar el problema dual que el primal? Realice una ilustración.
2. Una vez obtenida la solución de un problema de Programación Lineal ¿cómo se obtienen los valores de las variables del problema dual sin necesidad de formular y solucionar este?
3. Conteste las siguientes preguntas con respecto a la situación de la microempresa de confecciones bogotana ilustrada en el capítulo 4.
 - Formule el problema dual y obtenga los valores de las variables duales de decisión (¿qué significan?) y sus costos reducidos. Obtenga los valores de las variables de holgura y/o de exceso e interpréte los.
 - ¿Cuánto se puede pagar máximo por una hora adicional de corte?
 - ¿Cuánto se puede pagar máximo por una hora adicional de costura?

- ¿Cuánto se puede pagar máximo por un metro adicional de tela?
 - Una camisa de hombre fabricada en China está teniendo un alto éxito en el mercado (líder en el mercado). Después de analizar diferentes alternativas, se llegó a un modelo de camisa de hombre que consume esta cantidad de recursos; 5 de horas de corte, 2 de horas de costura y 2 metros de tela. Los estudios de mercado indican que en Colombia solo podría competir en el segmento de bajo costo si el precio de venta de esta nueva camisa está máximo un 5 % por encima del líder en el mercado. La camisa China tiene un precio de venta de \$62.000 ¿el nuevo modelo de la compañía puede competir con la camisa China?
 - Si por decisión de estrategia de mercadeo se ordena producir diariamente dos camisas para mujer, la cuales se venden a \$ 165.000 cada una ¿cómo se ven afectados los ingresos de la microempresa? Conteste esta pregunta sin volver a solucionar el problema.
4. Usted es contratado en una empresa para optimizar su proceso productivo. La empresa tiene seis productos, dos materias primas (A y B) y tres procesos (C, D; E y F). Se le suministra la siguiente formulación del problema que busca maximizar las ganancias:

Maximizar Utilidad = $70x_1 + 78x_2 + 90x_3 + 74x_4 + 110x_5 + 75x_6$,
sujeto a:

$$9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 4x_6 \leq 80 \text{ (Materia Prima A)}$$

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 3x_6 \leq 55 \text{ (Material Prima B)}$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4,5x_5 + 2x_6 \leq 33 \text{ (Proceso C)}$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3,5x_5 + 3x_6 \leq 24 \text{ (Proceso D)}$$

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4,5x_5 + 4x_6 \leq 40 \text{ (Proceso E)}$$

$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 \leq 50 \text{ (Proceso F)}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \leq 0$$

La disponibilidad de las materias primas esta medida en unidades y la de los procesos en horas.

En las siguientes funciones se muestra el cambio de la función objetivo, el intervalo donde este cambio es válido, cuando se incrementa un recurso o proceso dejando a los otros constantes.

$f(x) = \text{No cambia}$
 $f(x) = \text{No cambia}$
 $f(x) = \pm 10x_c \quad (32 \leq x_c \leq 36)$
 $f(x) = \text{Cambia} \quad (22 \leq x_d \leq 26)$
 $f(x) = \text{Cambia} \quad (33 \leq x_e \leq 41,66)$
 $f(x) = \text{No cambia}$

x_c , x_c y x_c representan las unidades por encima o por debajo de la disponibilidad actual para los recursos C, D, E. El signo (+) indica unidades adicionales a las actuales y el signo (-) que se cuenta con menos unidades que las actuales. En el paréntesis se muestra el intervalo donde es válida esta función. Actualmente se producen los productos x_2 y x_3 .

Variables	Coefficientes en la función objetivo	Aumento permitido	Disminución permitida
x_2	78	10	4
x_3	90	15	5.4

- a. ¿Cuál es la mezcla óptima? y ¿cuál es el valor de las ganancias de la compañía?
- b. ¿Cuál es la utilización de los recursos de la empresa?
- c. Plantear el problema dual. Obtener el valor de las variables duales, las variables de exceso, precio sombra y costos reducidos.
- d. La empresa decidió aumentar el precio del producto 1 a \$75, disminuir el del producto 2 a \$76.5, aumentar el precio del

producto 3 a \$97 y el aumentar el precio del producto 5 a \$105. Adicionalmente, el proveedor de las materias A y B debido a una equivocación en el picking de la orden despachó 76 unidades de A y 57 de B. Como si fuera poco, el proceso productivo de la empresa sufrió una pequeña interrupción dando como resultado que el número de horas disponibles del proceso E disminuyera en 0.3 y del proceso F en 3 horas.

Bajo estas nuevas condiciones ¿cuál es la mezcla óptima? y ¿cuál es valor de las ganancias de la compañía?

- e. La empresa desea introducir un nuevo producto (P7)

Recursos	Insumos para elaborar una unidad de P7
Materia Prima A	Información no suministrada
Materia Prima B	Información no suministrada
Proceso C	5 h
Proceso D	3 h
Proceso E	5 h
Proceso F	4 h

¿Cuál es el precio mínimo del producto 7 que hace que para la compañía sea atractivo producirlo? Si la información que le dio la compañía no es suficiente puede justificarlo.

- f. Un proveedor tiene capacidad sobrante en su proceso, por lo tanto le propone a la empresa el siguiente negocio, que se debe aceptar como un paquete completo o rechazarlo.

Recurso	Precio	Cantidad ofrecida
Proceso D	50 % de lo máximo que estaría dispuesto a pagar	6 h
Proceso E	60 % de lo máximo que estaría dispuesto a pagar	4 h
Proceso F	1	3 h

¿Debe la empresa aceptar el negocio? Justifique su respuesta.

- g. El gerente de mercadeo afirma que si el precio del producto 1 se incrementa 20 % este se debería empezar a producir ¿tiene razón el gerente?
- 5. Formule y solucione el problema dual para el ejercicio 1 del capítulo 4 ¿qué significan cada una de las variables duales? Interprete cada una de ellas considerando su valor y su respectivo signo.
- 6. Formule y solucione el problema dual para el ejercicio 5 del capítulo 4. Analice los resultados de acuerdo al contexto del problema.
- 7. Para ayudar a aclarar algunos aspectos relacionados con dualidad, formule el problema dual para los problemas de los ejercicios 5, 6 y 7 del capítulo tres y soluciónelos por el método gráfico ¿qué se observa?

Referencias bibliográficas

BAZARAA, Mokhtar. JARVIS Jhon & SHERALI, Hanif. *Programación lineal y flujo en redes*. 2 ed en español, Limusa, México. 1998.

HILLIER, Frederick. LIEBERMAN, Gerald. *Introduction to Operations Research Seventh Edition*, McGraw-Hill, New York. 2001.

JAMES K, HO. “Computing True Shadow Prices in Linear Programming”. *Informática*, Vol 11, No. 4, 2000. 412 – 434 pp.

LUENBERGER, David. YINYU, Ye. *Linear and Nonlinear Programming. Third Edition*. Springer Science, New York. 2008.

TAHA, Hamdy. *Investigación de Operaciones*. 7 ed en español, Pearson-Prentice Hall, México. 2004.

CAPÍTULO 8

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD O POSTÓPTIMO

Una vez obtenidos los resultados óptimos aplicando el método simplex (u otro método de solución), resulta conveniente y necesario analizarlos no solo en cuanto a sus valores sino bajo las circunstancias en las que siguen siendo válidos, ya que en la práctica los parámetros son cambiantes.

Cuando en un planteamiento se definen precios, tasas de producción, disponibilidad de materias primas, entre otros parámetros; se hace considerando la situación de ese momento en particular, pero es imposible garantizar que van a seguir manteniéndose esos valores por siempre. Entonces es útil indagar cuál es el comportamiento de la solución obtenida si, por ejemplo, el mercado hace que los precios aumenten (o disminuyan); si cambia la disponibilidad de materia prima; si se compran más máquinas; si se dañan algunas; y muchas otras posibles situaciones.

El análisis de cómo el cambio en los parámetros afecta el valor de la función objetivo se denomina análisis de sensibilidad o análisis postóptimo. Básicamente se consideran dos situaciones; el cambio en los coeficientes de la función objetivo y el cambio en los valores de los lados derechos de las restricciones. El cambio en los valores de los coeficientes de las variables en las restricciones usualmente no se

considera porque se presume que estos parámetros son más estables, ya que corresponden a tasas de producción, recetas de fabricación, estándares de producción y en general a indicadores de desempeño característicos de los procesos.

En el caso de la microempresa de confección que hemos venido considerando, los precios de las camisas dependen del mercado y pueden variar frecuentemente, lo mismo ocurre con la disponibilidad de insumos (unas semanas habrá más cantidad de tela en inventario y en otras menos), los operarios(as) de corte y costura pueden ausentarse y las máquinas pueden dañarse. Sin embargo, si se mantienen los mismos productos por un lapso considerable de tiempo, el consumo de recursos se mantiene prácticamente constante (bajo la misma tecnología un tipo de camisa para hombre consume la misma cantidad de tela, de horas de corte y de horas de confección) y estos parámetros solo cambian significativamente si se cambia el diseño del producto o la forma de producción. Estas situaciones no son tan frecuentes como la variación de precios, costos o disponibilidades.

El lector puede pensar que si cambian los parámetros se pueden introducir esas variaciones al software disponible y volver a solucionar el problema bajo las nuevas circunstancias. Sin embargo, ese enfoque tiene sus desventajas; por un lado puede resultar tedioso en la práctica, por otro lado, puede ser innecesario y –lo más importante– es que limita la comprensión de la situación e impide la obtención de información relevante.

8.1. CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Cuando se cambian los coeficientes de las variables de decisión en la función objetivo sin realizar cambios en la región factible (en los coeficientes de las restricciones o en sus lados derechos), lo que se está buscando es determinar cuánto puede variar la dirección del gradiente de manera tal que se siga encontrando el mismo punto extremo óptimo. Resulta útil recordar el caso de dos dimensiones visto en el capítulo tres, para visualizar el concepto y luego extrapolarlo a un espacio mayor (más variables).

El resultado debe ser un intervalo de validez en el que se pueda mantener cada uno de los coeficientes de la función objetivo sin que se cambie el punto óptimo (por supuesto el valor de la función objetivo sí cambia).

Esta información es de bastante utilidad práctica. En el ejemplo de la microempresa de confección, una vez solucionado el problema con el valor de los parámetros proporcionados se va a obtener un plan de producción que indica cuantas unidades de cada producto se deben fabricar y así el gerente de producción puede asignar los recursos para cumplir con dicho plan.

Ahora suponga que los precios del mercado cambian. El tomador de decisiones puede volver a solucionar el problema o hacer uso de la información proporcionada por el análisis de sensibilidad. Si el nuevo precio está en el intervalo de validez, el gerente de producción se percatará de que el plan de producción óptimo sigue siendo el mismo y, por lo tanto, el plan de producción no se debe modificar.

Desde el punto de vista algebraico los intervalos de validez se encuentran partiendo de la solución óptima actual (la cual está asociada a una base óptima) y analizando el efecto que se produce al realizar cambios en el valor de los coeficientes de la función objetivo (vector c) estos cambios se clasificaran en dos categorías:

- Cambios en el vector c_B , es decir en los coeficientes de variables básicas.
- Cambios en el vector c_N , es decir en los coeficientes de variables no básicas.

Cambios en los coeficientes de variables no básicas

Se debe recordar que de acuerdo al método simplex para cambiar de base se recurre al valor de los costos reducidos $z_j - c_j$ para determinar qué variable no básica debe entrar a la base.

En el caso de cambiar el valor del coeficiente en la función objetivo de la k -ésima variable no básica de c_{Nk} a un valor c'_{Nk} no se produce ningún cambio sobre el vector c_B y, por lo tanto, el componente $z_{Nk} = c_B B^{-1} a_{Nk}$ no se afecta. El costo reducido de la variable no básica sufre el siguiente cambio:

pasa de $(z_{Nk} - c_{Nk})$ a $(z_{Nk} - c'_{Nk})$

Dado que el análisis se hace partiendo de la solución óptima, si el problema es de minimización se debe cumplir $z_{Nk} - c_{Nk} \leq 0$ y si es de maximización $z_{Nk} - c_{Nk} \geq 0$. Por lo tanto el cambio de valor de c_{Nk} a c'_{Nk} puede afectar la condición de óptimalidad.

El nuevo costo reducido se puede expresar en términos del actual si se le suma y resta la cantidad c_{Nk} de la siguiente forma:

$$z_{Nk} - c'_{Nk} = (z_{Nk} - c_{Nk}) + (c_{Nk} - c'_{Nk}) = (z_{Nk} - c_{Nk}) - \Delta c_{Nk} \quad (8.1)$$

Con base en ello se puede concluir que:

- Para un problema de minimización si Δc_{Nk} es positivo la solución actual sigue siendo óptima.
- Para un problema de maximización si Δc_{Nk} es negativo la solución actual sigue siendo óptima.
- Para un problema de minimización si Δc_{Nk} es negativo y $z_{Nk} - c'_{Nk}$ es negativo, la solución actual sigue siendo óptima.
- Para un problema de maximización si Δc_{Nk} es positivo y $z_{Nk} - c'_{Nk}$ es positivo, la solución actual sigue siendo óptima.
- Para un problema de minimización si Δc_{Nk} es negativo y hace que $z_{Nk} - c'_{Nk}$ sea positivo, entonces se debe cambiar la base y la variable x_k debe entrar a ella.
- Para un problema de maximización si Δc_{Nk} es positivo y hace que $z_{Nk} - c'_{Nk}$ sea negativo, entonces se debe cambiar la base y la variable x_k debe entrar a ella.

Cambios en los coeficientes de variables básicas

En este caso siempre hay un cambio en el valor de los costos reducidos ya que al modificar el vector $\mathbf{c}_B$ el valor $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$ cambia.

Suponga que a $\mathbf{c}_B$ se le cambia su k -ésimo componente c_{Bk} a un nuevo valor c'_{Bk} . Los costos reducidos (de las variables no básicas) se modifican así:

$$\begin{aligned} z'_j - c_j &= \mathbf{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \\ &\quad + (0, 0, \dots, c'_{Bk} - c_{Bk}, 0, 0, \dots, 0) \mathbf{y}_j \end{aligned} \quad (8.2)$$

Por lo tanto:

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) + (c'_{Bk} - c_{Bk}) y_j^k \quad \forall j^1 \quad (8.3)$$

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) + (\Delta c_{Bk}) y_j^k \quad \forall j \quad (8.4)$$

Interesa el menor valor de Δc_{Bk} que hace que el nuevo costo reducido sea cero. En el caso de la disminución máxima permitida en el coeficiente considerado se considera la siguiente expresión:

$$\Delta c_{Bk} = \underset{y_j^k < 0}{\text{mínimo}} \left(\frac{-(z_j - c_j)}{y_j^k} \right) \quad (8.5)$$

El incremento máximo permitido para el coeficiente considerado esta dado por:

$$\Delta c_{Bk} = \underset{y_j^k > 0}{\text{mínimo}} \left(\frac{-(z_j - c_j)}{y_j^k} \right) \quad (8.6)$$

En el caso particular en que $j = k$, puesto que se está considerando el cambio en el valor del coeficiente en la función objetivo de la k -ésima variable básica, sabemos que el costo reducido asociado a ella, $z_{Bk} - c_{Bk}$, es cero y que el k -ésimo componente del vector $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{Bk}$ es uno ($y_{Bk} = 1$). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} z'_{Bk} - c_{Bk} &= (z_{Bk} - c_{Bk}) + (c'_{Bk} - c_{Bk}) y_j^k \\ &= 0 + (c'_{Bk} - c_{Bk}) * \mathbf{1} = (c'_{Bk} - c_{Bk}) \\ \therefore z'_{Bk} - c_{Bk} &= (c_{Bk} - c_{Bk}) = 0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Partiendo de la solución óptima actual y para calcular los intervalos en los que se pueden variar los coeficientes de la función objetivo manteniendo la misma solución óptima, se debe proceder de la siguiente forma:

¹Se recuerda que y_j^k hace referencia al k -ésimo componente del vector

- Considerar el cambio de solo un coeficiente a la vez.
- Identificar el cambio más pequeño que implique cambiar de base.

Considérese el problema de la nueva compañía de artículos deportivos, cuya formulación es:

Minimizar $30000000x_1 + 18000000x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$,
sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 2240000x_1 + 2600000x_2 - x_3 &= 9000000 \\ 5760000x_1 + 10400000x_2 - x_4 &= 22000000 \\ x_1 - x_5 &= 1,5x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

y su solución óptima:
$$\begin{bmatrix} x_1 = 675/298 \\ x_2 = 225/149 \\ x_4 = 1006/149 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 675/298 \\ 225/149 \\ 0 \\ 1006/149 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La base que genera la solución óptima y su respectiva inversa son:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{ccc} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_4 \\ \begin{bmatrix} 2,24 & 2,6 & 0 \\ 5,76 & 10,4 & -1 \\ 1 & -1,5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

y

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 75/298 & 0 & 65/149 \\ 25/149 & 0 & -56/149 \\ 476/149 & -1 & -208/149 \end{bmatrix}$$

Los costos reducidos de las variables no básicas son:

$$\text{Variable } x_3 = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_3 - c_3 = -\frac{1575}{149}$$

Costo reducido de $x_5 = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_5 - c_5 = -\frac{942}{149}$

Para este problema es de interés calcular intervalos en que se pueden mover los coeficientes de la función objetivo (30 y 18) para las de las variables de decisión x_1 y x_2 , que en la solución óptima son básicas, por lo tanto se recurre a la expresión:

$$z'_j - c_j = (z_j - c_j) + (c'_{Bk} - c_{Bk})y_j^k \quad \forall j$$

Como no se están realizando cambios en la base los vectores no se modifican.

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 75/298 & 0 & 65/149 \\ 25/149 & 0 & -56/149 \\ 476/149 & -1 & -208/149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75/298 \\ -25/149 \\ -476/149 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} 75/298 & 0 & 65/149 \\ 25/149 & 0 & -56/149 \\ 476/149 & -1 & -208/149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -65/149 \\ 56/149 \\ 208/149 \end{bmatrix}$$

Existe un valor máximo y un valor mínimo que se pueden adicionar y sustraer al valor actual del coeficiente ende la variable básica considerada sin que se tenga que cambiar de base. Para hacer un cambio de base una de las variables no básicas actuales debe tener un valor positivo, entonces se calcula el mínimo que convierta uno de los costos reducidos en cero.

- Considerando un cambio en el coeficiente de la variable básica x_1 se tiene que los costos reducidos cambian de la siguiente forma:

Para x_3

$$0 = -\frac{1575}{149} + (c'_{Bk} - 30) * \left(-\frac{75}{298}\right) \quad \therefore c'_{Bk} = -12 \text{ y } \Delta c'_{Bk} = -42$$

Para x_5

$$0 = -\frac{942}{149} + (c'_{Bk} - 30) * \left(-\frac{65}{149}\right) \quad \therefore c'_{Bk} = \frac{1008}{65} \text{ y } \Delta c'_{Bk} = -\frac{942}{65}$$

Que corresponde al cambio más pequeño en el valor de c_1 que hace cambiar de signo a por lo menos uno de los costos reducidos.

Adicionalmente se tienen que y_3^1 y y_5^1 son negativos, por lo tanto un aumento en el valor de c_1 por encima de 30 llevará siempre a un costo reducido negativo y c_1 se puede aumentar tanto como se desee.

En resumen, si

$$c_1 \in \left(\frac{1008}{65}, \infty \right)$$

la solución óptima actual seguirá inalterada pero con un nuevo valor de función objetivo dado por $\mathbf{c}_B^1 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$.

- Para el coeficiente de la variable de decisión x_2 (básica) cuyo valor actual es 18, se tiene que los cambios de los costos reducidos en función de Δc_{Bk} son:

$$\begin{aligned} z_3' &= -\frac{1575}{149} + (c'_{Bk} - 18) * \left(-\frac{25}{149} \right) \\ z_5' &= -\frac{942}{149} + (c'_{Bk} - 18) * \left(\frac{56}{149} \right) \end{aligned}$$

Para que los costos reducidos de x_3 y x_5 se hagan cero es necesario que:

$$0 = -\frac{1575}{149} + (c'_{Bk} - 18) * \left(-\frac{25}{149} \right) \quad \therefore \quad c'_{Bk} = -45 \text{ y } \Delta c'_{Bk} = -63$$

o

$$0 = -\frac{942}{149} + (c'_{Bk} - 30) * \left(\frac{56}{149} \right) \quad \therefore \quad c'_{Bk} = \frac{975}{28} \text{ y } \Delta c'_{Bk} = \frac{471}{28}$$

Obsérvese que los signos de y_3^2 y y_5^2 son diferentes. Esto indica que para el coeficiente c_2 hay limitaciones, tanto para el valor que se puede aumentar como par el que se puede disminuir.

El aumento máximo permisible es $\frac{471}{28}$

La disminución máxima permitida es 63.

El intervalo buscado en el que puede permanecer sin que se afecte el valor de la solución actual es:

$$c_2 \in \left(-45, \frac{975}{28}\right)$$

Aunque el intervalo anterior es correcto matemáticamente, se debe analizar que c_2 representa un costo medido en $\frac{\$}{\text{segundo}}$ y por lo tanto no tiene sentido un valor negativo.

- El cálculo de los intervalos para c_3 y c_4 se deja como ejercicio y se muestra cómo realizar el cálculo del el intervalo para el coeficiente c_5 que corresponde a la variable no básica x_5 .

Puesto que x_5 es una variable no básica, el cambio de c_5 a c'_{N5} se analiza con la expresión:

$$\begin{aligned} z_{N5} - c'_{N5} &= (z_{N5} - c_{N5}) - (c'_{N5} - c_{N5}) \\ &= (z_{N5} - c_{N5}) - \Delta c_{N5} = -\frac{942}{149} - (c'_{N5} - 0) \end{aligned}$$

El problema es de minimización y x_5 es variable no básica por lo que el criterio de óptimalidad exige que su costo reducido sea negativo y por lo tanto cualquier incremento sobre el valor actual de c_5 hace que la solución óptima actual no cambie.

Se determina el valor que debe tomar el nuevo coeficiente de x_5 , c'_{N5} , para que el costo reducido se haga cero:

$$0 = -\frac{942}{149} - (c'_{N5} - 0) \quad \therefore \quad c'_{N5} = -\frac{942}{149} = \Delta c_{N5}$$

Resumen del análisis de sensibilidad.

Coeficiente	Valor Actual	Aumento Máximo	Disminución Máxima	Intervalo Permitido
c_1	30	∞	$\frac{292}{65}$	$(\frac{1008}{65}, \infty)$
c_2	18	$\frac{471}{28}$	63	$(-45, \frac{975}{28})$
c_3	0	∞	$\frac{1575}{149}$	$(-\frac{1575}{149}, \infty)$
c_4	0	$\frac{471}{104}$	$\frac{225}{68}$	$(-\frac{225}{68}, \frac{471}{104})$
c_5	0	∞	$\frac{942}{149}$	$(-\frac{942}{149}, \infty)$

8.2. CAMBIOS EN LOS VALORES DEL LADO DERECHO DE LAS RESTRICCIONES

En la mayoría de las ocasiones los lados derechos de las restricciones indican la disponibilidad de recursos y como se mencionó éstas cambian frecuentemente. El correspondiente análisis se hará inicialmente para cambios simultáneos y finalmente considerando solo un cambio en los lados derechos a la vez.

Los intervalos que se obtienen indican los límites en los que se pueden mover los componentes del vector **b** (lados derechos), da tal forma que se siga conservando la misma base actual. Estos intervalos a diferencia de los obtenidos mediante el análisis de sensibilidad para el vector **c** implican que **el valor de la solución óptima cambia, lo que se mantiene intacto es la base.**

Para mantener la base óptima **B** (de rango *m*) se debe mantener el signo de los costos reducidos de las variables no básicas (no positivo en problemas de minimización y no negativo en problemas de maximización). La condición de factibilidad consistente en que $\bar{\mathbf{b}}$ no debe

tener componentes negativos. Un cambio del vector $\mathbf{b}$ a $\mathbf{b}'$ no afecta los costos reducidos, por lo tanto el análisis se reduce solo a que el nuevo vector $\bar{\mathbf{b}}'$ no tenga componentes negativas.

Cambiar el vector $\mathbf{b}$ a $\mathbf{b}^l$ implica cambiar el valor óptimo de las variables básicas de

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} \quad \text{a} \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}^l = \bar{\mathbf{b}}^l$$

Al sumar y restar $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ a la última expresión se tiene:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}^l = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}^l + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (8.8)$$

reorganizando y factorizando:

$$\bar{\mathbf{b}}^l = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}^l = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b}^l - \mathbf{b}) = \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b} \quad (8.9)$$

La expresión anterior permite ver que se pueden realizar cambios simultáneos en los componentes de $\mathbf{b}$ si se garantiza que los nuevos componentes de $\bar{\mathbf{b}}^l$ sean no negativos, si esta condición se cumple entonces la nueva solución óptima será $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}^l$ con valor de función objetivo $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}^l$.

Si el cambio en $\mathbf{b}$ se hace únicamente en la k -ésima componente (el lado derecho de la k -ésima restricción) que pasa de b_k a b_k^l , se llega a:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{b}}^l = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}^l &= \begin{bmatrix} B_{1,1}^{-1} & B_{1,2}^{-1} & \cdots & B_{1,k}^{-1} & \cdots & B_{1,m}^{-1} \\ B_{2,1}^{-1} & B_{2,2}^{-1} & \cdots & B_{2,k}^{-1} & \cdots & B_{2,m}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{m,1}^{-1} & B_{m,2}^{-1} & \cdots & B_{m,k}^{-1} & \cdots & B_{m,m}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k^l \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1, j \neq k}^m B_{1,j}^{-1}b_j + B_{1,k}^{-1}b_k^l + B_{1,k}^{-1}b_k - B_{1,k}^{-1}b_k \\ \vdots \\ \sum_{j=1, j \neq k}^m B_{i,j}^{-1}b_j + B_{i,k}^{-1}b_k^l + B_{i,k}^{-1}b_k - B_{i,k}^{-1}b_k \\ \vdots \\ \sum_{j=1, j \neq k}^m B_{m,j}^{-1}b_j + B_{m,k}^{-1}b_k^l + B_{m,k}^{-1}b_k - B_{m,k}^{-1}b_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{b}}^l = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m B_{1,j}^{-1} b_j + B_{1,k}^{-1} (b_k^l - b_k) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m B_{i,j}^{-1} b_j + B_{i,k}^{-1} (b_k^l - b_k) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m B_{m,j}^{-1} b_j + B_{m,k}^{-1} (b_k^l - b_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 + B_{1,k}^{-1} (b_k^l - b_k) \\ \vdots \\ \bar{b}_i + B_{i,k}^{-1} (b_k^l - b_k) \\ \vdots \\ \bar{b}_m + B_{m,k}^{-1} (b_k^l - b_k) \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

$$\bar{\mathbf{b}}^l = \bar{\mathbf{b}} + \begin{bmatrix} B_{1,k}^{-1} (b_k^l - b_k) \\ \vdots \\ B_{i,k}^{-1} (b_k^l - b_k) \\ \vdots \\ B_{m,k}^{-1} (b_k^l - b_k) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{b}} + \begin{bmatrix} B_{1,k}^{-1} \Delta b_k \\ \vdots \\ B_{i,k}^{-1} \Delta b_k \\ \vdots \\ B_{m,k}^{-1} \Delta b_k \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

Dependiendo del signo del componente $B_{i,k}^{-1}$ se calcularán los valores máximos en que se puede aumentar y disminuir b_k de tal forma que ningún componente de $\bar{\mathbf{b}}^l$ sea negativo.

- Si existe al menos un $B_{i,k}^{-1}$ positivo, la disminución máxima permisible será finita.
- Si existe al menos un $B_{i,k}^{-1}$ es negativo, el aumento máximo permisible será finito.
- Si todos los componentes de la k -ésima columna de $\mathbf{B}^{-1}$ son del mismo signo, entonces: o la disminución máxima permitida será infinita o el aumento máximo permitido será infinito.

Para calcular la disminución máxima permitida para el k -ésimo componente del vector $\mathbf{b}$ se recurre a:

$$\Delta b_k = \underset{B_{i,k}^{-1} > 0}{\text{mínimo}} \left| -\frac{\bar{b}_i}{B_{i,k}^{-1}} \right| \quad (8.12)$$

Para calcular el valor del aumento máximo permitido para el k -ésimo componente del vector $\mathbf{b}$

$$\Delta b_k = \underset{B_{i,k}^{-1} < 0}{\text{mínimo}} \left| -\frac{\bar{b}_i}{B_{i,k}^{-1}} \right| \quad (8.13)$$

Retomando el problema de la nueva empresa de artículos deportivos y recordando que la forma en que se ordenen las columnas de la base afecta el orden de los elementos de $\mathbf{B}^{-1}$ y $\bar{\mathbf{b}}$ (que a su vez se deben ordenar para que mantengan su correspondencia con el problema dual), en la solución óptima se tienen los siguientes elementos:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 75/298 & 0 & 65/149 \\ 25/149 & 0 & -56/149 \\ 476/149 & -1 & -208/149 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 675/298 \\ 225/149 \\ 1006/149 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar los aumentos y disminuciones máximas que se pueden hacer al valor actual de b_1 manteniendo la base, se procede de la siguiente forma:

Remplazando en la ecuación 8.11:

$$- \begin{bmatrix} \frac{675}{298} \\ \frac{225}{149} \\ \frac{1006}{149} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{75}{298} \Delta b_k \\ \frac{25}{149} \Delta b_k \\ \frac{476}{149} \Delta b_k \end{bmatrix}$$

Considerando que todos los elementos $B_{i,1}^{-1}$ son positivos, *el incremento en el valor de b_1 es ilimitado* y la disminución máxima permisible es:

$$\Delta b_1 = \text{mínimo} \left(\left| \frac{-\frac{675}{298}}{\frac{75}{298}} \right|, \left| \frac{-\frac{225}{149}}{\frac{25}{149}} \right|, \left| \frac{-\frac{1006}{149}}{\frac{476}{149}} \right| \right) = \frac{1006}{476}$$

En el caso de b_2 se tiene que los elementos $B_{i,2}^{-1}$ son negativos o cero, por lo tanto la disminución permitida es ilimitada y el incremento máximo está dado por:

$$\Delta b_2 = \text{mínimo} \left(\left| \frac{-\frac{675}{298}}{0} \right|, \left| \frac{-\frac{225}{149}}{0} \right|, \left| \frac{-\frac{1006}{149}}{-1} \right| \right) = \frac{1006}{149}$$

En cuanto a b_3 se encuentra que la tercera columna de $\mathbf{B}^{-1}$ tiene elementos ($B_{i,3}^{-1}$) positivos y negativos, con lo que se deduce que existe limitación para el aumento y la disminución máxima permitida.

Aumento:

$$\Delta b_3 = \underset{B_{i,k}^{-1} < 0}{\text{mínimo}} \left(\left| \frac{-\frac{225}{149}}{-\frac{56}{149}} \right|, \left| \frac{-\frac{1006}{149}}{-\frac{208}{149}} \right| \right) = \frac{225}{56}$$

Disminución:

$$\Delta b_k = \underset{B_{i,k}^{-1} > 0}{\text{mínimo}} \left(\left| \frac{-\frac{675}{298}}{\frac{65}{149}} \right| \right) = \frac{135}{26}$$

En resumen, se tiene el siguiente análisis de sensibilidad para el vector **b**.

Valor actual de b_i	Aumento Máximo Permitido	Disminución Máxima Permitida
9	∞	$\frac{1006}{476}$
22	$\frac{1006}{149}$	∞
0	$\frac{225}{56}$	$\frac{135}{26}$

8.3. REGLA DEL CIEN POR CIENTO

Las variaciones en los coeficientes de la función objetivo o de las restricciones de los lados derechos pueden hacerse de forma simultánea. Para determinar si la solución actual se mantiene inalterada (cambios simultáneos en el vector **c**) o si se mantiene la base (cambios en el vector **b**), se puede aplicar una regla conocida como “regla del 100 %”.

Esta regla indica que si la suma de los cambios porcentuales en los parámetros es menor al 100 %, entonces los cambios se pueden hacer en forma simultánea.

El cálculo del porcentaje de cambio se hace con respecto al Δ correspondiente (si es aumento o disminución) y no con respecto al intervalo completo.

Como ilustración considérese el ejercicio de la publicidad para la tienda de artículos deportivos. La situación de la competencia en los medios de comunicación ha hecho que el precio de cada minuto de propaganda en televisión cambie a \$ 25'000,000 y en radio pase a \$ 19'500,000 ¿cómo se ve afectada la solución óptima actual con estos cambios?

Para responder esta pregunta se deben considerar los siguientes aspectos:

- Verificar si los cambios se encuentran dentro de los intervalos de sensibilidad permitidos. En este caso la respuesta es afirmativa.
- Calcular los valores porcentuales de los cambios.

Precio del minuto en televisión: disminuyó \$ 5'000.000 de \$ 14'492,307 en que puede hacerlo. Esto corresponde a $\frac{5'000.000}{14'492.307} * 100$ que es cerca del 34.5%

Precio del minuto en radio: aumentó \$ 1'500,000 de \$ 16'821,428 en que puede hacerlo. Esto corresponde a $\frac{1'500.000}{16'821.428} * 100$ que es cerca del 8.9%.

Sumar el valor de los cambios porcentuales y comparar contra 100%.

Para el ejemplo los cambios porcentuales suman $34.5\% + 8.9\% = 43.4\%$. Puesto que este valor es inferior a 100%, se puede decir que los cambios en los precios de las pautas no afectan el valor de la solución actual (si el valor de la función objetivo). El lector puede solucionar el problema con estos cambios y verificar que se mantiene la solución óptima actual.

EJERCICIOS

1. ¿Qué relación existe entre los costos reducidos y los intervalos de factibilidad?
2. ¿Qué relación existe entre los costos reducidos y los precios sombra?

3. ¿Qué relación existe entre los precios sombra y los intervalos de factibilidad?
4. Con respecto a la situación de la microempresa bogotana de confecciones (primer ejemplo del capítulo 5), conteste las siguientes preguntas:
 - Si las camisas para hombre se venden a \$150000 ¿cuántas camisas de cada tipo se deben producir?
 - El gerente de producción afirma que si se incrementa el precio de la camisa de mujer en 30%, ésta se produciría en la mezcla óptima ¿tiene razón el gerente?
 - ¿Cuál es el precio mínimo de las camisas para mujer que haría atractivo producirlas?
 - El gerente de mercadeo quiere incrementar la demanda de las camisas Unisex. Ha estudiado varias alternativas de publicidad y cree que una campaña con un costo de \$60.000 pesos y una estimación de crecimiento de la demanda de 10 unidades es la mejor alternativa. ¿usted recomendaría esta campaña? Justifique su respuesta.
 - Si las camisas de hombre se venden a \$140.000 y las unisex a \$128.000, ¿cuántas camisas de cada tipo se deben producir?
 - Si las camisas de hombre se venden a \$155.000 y las de mujer a \$190.000, ¿cuántas camisas de cada tipo se deben producir?
 - Si las camisas de hombre se venden a \$140.000 y las unisex a \$145.000, ¿cuántas camisas de cada tipo se deben producir?
5. Usted está en la última etapa del proceso de selección de una empresa y compite con otros candidatos para una vacante en el departamento de investigación de operaciones. La prueba escrita para evaluar su conocimiento en este campo es la siguiente:

Información del proceso productivo de la compañía

La compañía tiene su planta en Yumbo, ciudad industrial del Valle del Cauca, para cubrir la demanda de sus cuatro productos principales en todo el territorio nacional. El proceso de producción es secuencial para cada uno de los productos. En la siguiente tabla se muestra el tiempo (en minutos) que le toma a cada máquina producir un kilogramo de cada uno de los productos.

Tiempos de proceso

	Productos producidos actualmente (mínimo)				Minutos disponibles semanalmente para cada máquina
Máquina	P	Q	R	S	
A	5	6	8	5	2000
B	7	6	5	4	1800
C	6	7	6	5	1800
D	4	7	6	6	1800

A continuación se muestran el precio, los requerimientos y costos de materia prima y servicios industriales por kilogramo de cada uno de los productos.

Precios y Costos

	Producto	Materias Primas		Servicios Industriales	
Productos	\$/Kg.	MP/PF	\$/Kg.	Agua (m ³)	Energía Eléctrica (Kw)
P	257000	3.5	25000	1.25	0.85
Q	248000	2.5	30000	1.4	0.97
R	256000	2.5	28000	1.1	0.75
S	246000	3.0	33000	1.3	0.93
T*	-	2.0	18000	0.7	0.65

- MP/PF = Es la relación de los kg de materia prima que se requiere para producir un kilogramo de cada producto.
- T^* representa un producto nuevo que está pensado introducir la compañía
- El costo del agua y el kilowatio de energía son respectivamente \$2100 /m3 y \$380/kWh.

En la siguiente tabla se muestra la demanda semanal de cada uno de los productos.

Producto	Demanda
P	110
Q	120
R	130
S	110
T*	110

A continuación se muestran los coeficientes internos que se obtuvieron en la última tabla del método simplex para algunas de las variables de holgura (no se incluyen los costos reducidos).

Salidas simplex

H3	H7	H8
-0.8333	-3	-0.8333
-1.1667	2	1.8333
0.1667	-1	-0.8333
-0.6667	-2	-2.6667
0	0	0
0	0	1
0	1	0
-0.1667	1	0.8333

Las primeras cuatro holguras corresponden a las restricciones de las capacidades de las máquinas y las otras cuatro a las demandas de productos.

En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de lo que no se utiliza de los recursos, es decir lo que sobra.

Máquina	Minutos disponibles
A	0.9163 %
B	8.9814 %
C	0 %
D	2.5926 %

Continúa

Productos	Demanda
P	28.7879 %
Q	100 %
R	0 %
S	0 %

Para este caso interprete la demanda como un recurso

- a. Formule el problema (maximizando utilidades).
- b. ¿Cuáles son los recursos escasos y abundantes?, ¿cuáles son los valores de las variables de holgura?, ¿cuál es la mezcla óptima? y ¿cuál es valor de la utilidad de la compañía?
- c. La empresa quiere subcontratar minutos de ciertas máquinas ¿qué máquinas debe subcontratar, cuánto debería pagar por minuto y cuantos minutos debe subcontratar?
- d. La empresa desea introducir un nuevo producto T ¿Cuál debe ser el precio mínimo del producto T para que sea atractivo producirlo?

Máquina	Minutos que consume T en cada máquina.
A	Información no suministrada
B	5
C	3
D	Información no suministrada

Si la información que le dio la compañía no es suficiente puede justificarlo y no hacer cálculos.

- e. El departamento de producción considera que puede lograr un mayor aprovechamiento del tiempo disponible en una de las máquinas, disminuyendo el tiempo que requiere uno de los productos en ellas, es decir disminuyendo uno de los coeficientes tecnológicos. Los coeficientes tecnológicos son los coeficientes que multiplican cada una de las variables

de decisión en las restricciones. Usted debe determinar qué coeficiente tecnológico se debe disminuir y cuál debe ser su valor para que se manufacture el producto o productos que actualmente no se fabrican y qué cantidad de este(os) producto(s) se produciría(n).

- f. La compañía decidió aumentar las ventas del producto R, para esto busca diferentes alternativas publicitarias. La que mejor se acomoda a su presupuesto y a la imagen que quiere transmitir le ofrece aumentar en 20 unidades la demanda actual (que es de 130) y le cobraría \$118.000 ¿es adecuada esta propuesta para la compañía?, justifique su respuesta.
- g. El Gerente de ventas afirma que el precio del producto Q está por debajo del mercado, por lo tanto, se está pensando en aumentar su precio para que la empresa considere atractivo producirlo ¿cuál es el porcentaje mínimo que debe aumentar el precio del producto Q para que la empresa lo produzca?
- h. Como la máquina C estaba teniendo mucha vibración, se decidió disminuir su tiempo semanal en 100 minutos. Por la entrada de un nuevo competidor se proyecta que la demanda del producto P se disminuirá en 10 unidades, Q en 20 unidades, R en 7 unidades y S en 5 unidades ¿cuál es el nuevo valor de la función objetivo y la mezcla óptima?
- i. Formule el problema dual. Compruebe las respuestas de los puntos anteriores solucionándolo.

Referencias bibliográficas

BAZARAA, Mokhtar. JARVIS Jhon & SHERALI, Hanif. *Programación lineal y flujo en redes*. 2 ed en español, Limusa, México. 1998.

LUENBERGER, David. YINYU, Ye. *Linear and Nonlinear Programming*. Third Edition. Springer Science, New York. 2008.

VASILIEV F.P. IVANITSKY A. Y. *Linear Programming*. 2ed. Factorial Press. Moscú. 2003.

CAPÍTULO 9

SOFTWARE PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL: SOLVER Y GAMS

En este capítulo se exponen dos de los más utilizados programas para la solución de problemas Programación Lineal: Solver y GAMS.

Solver se presenta debido a su accesibilidad, ya que prácticamente cualquier persona u organización puede contar con una hoja de cálculo. Por otra parte, GAMS se ilustra puesto que es un programa flexible, de gran capacidad y muy eficiente para modelar situaciones reales que involucren un gran número de variables y restricciones.

Existen disponibles otra gran variedad de programas comerciales con buenas características y de fácil manejo, por ejemplo WIN QSB, Lingo y Lindo. Dentro de la oferta de software libre se destaca LP-Solve por su capacidad de solución, su estructura para el modelado, la forma en que reporta los resultados y por supuesto ¡es gratis!

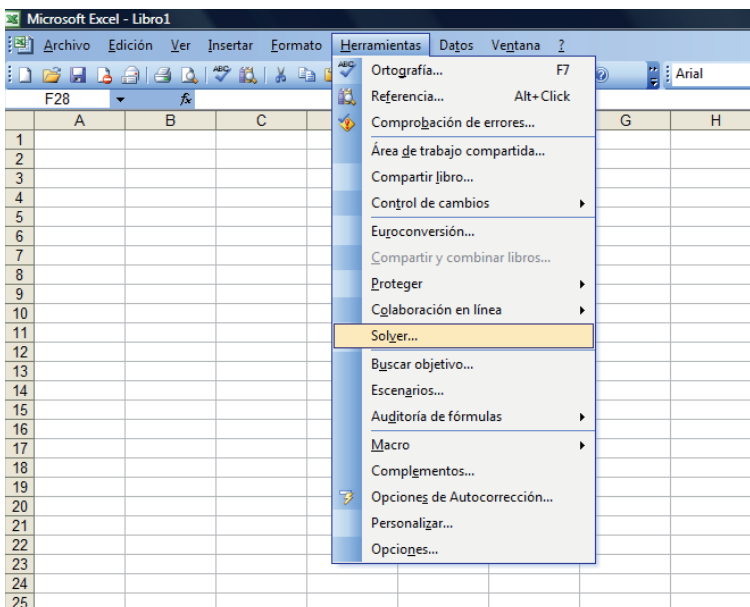
9.1. SOLVER PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

La herramienta Solver disponible en las hojas de cálculo resulta una herramienta útil para la solución de problemas de programación lineal, especialmente porque es de muy fácil acceso para todo tipo de organizaciones. Aunque no es la única opción existente, en este libro se indica el uso de SOLVER bajo la hoja de cálculo de EXCEL. El manejo en otras hojas electrónicas (por ejemplo la de OpenOffice.org) es muy similar, aunque la forma en que se reportan los resultados si puede diferir.

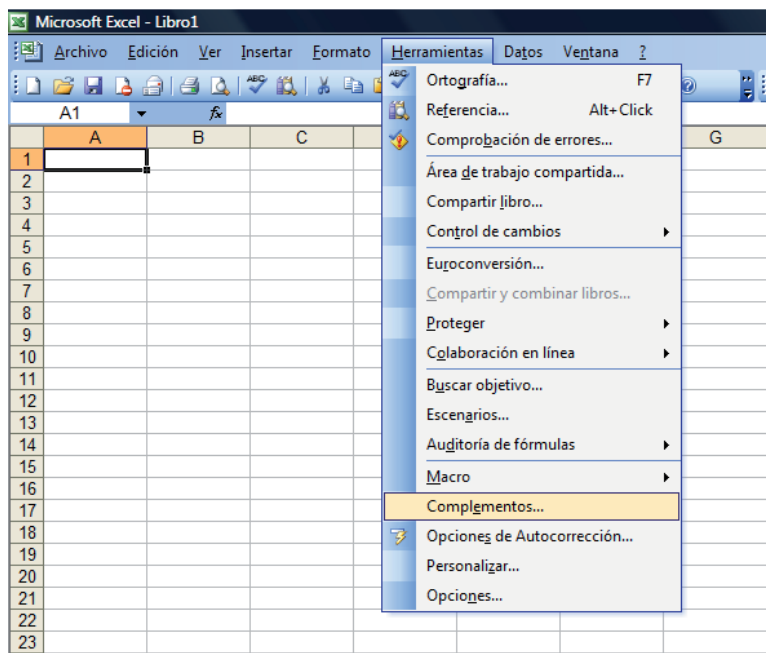
La forma de introducir un problema a SOLVER es diversa ya que depende del gusto particular del usuario. Aquí se presentara una versión sencilla y práctica.

Lo primero es verificar si la opción está disponible y activada, para ello:

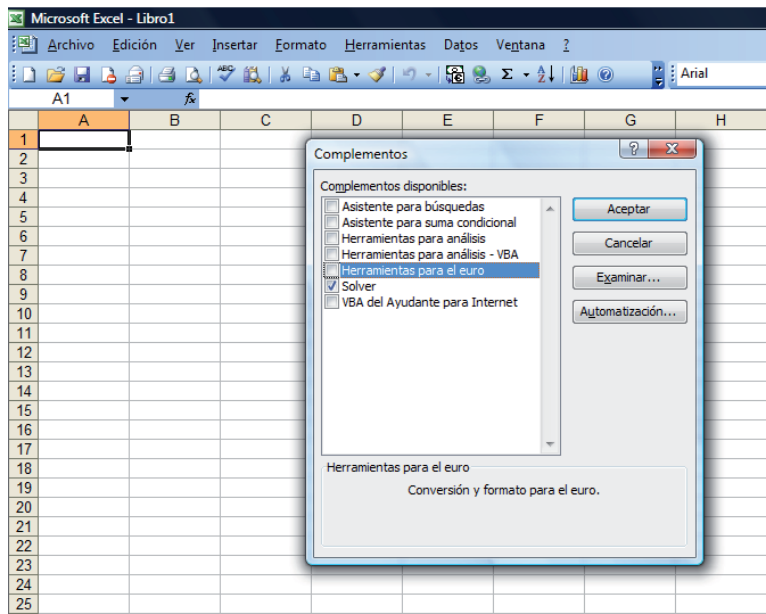
- En versiones de Office 2003 o inferiores vaya a Herramientas y busque Solver



En caso de que no esté disponible, en herramientas seleccione complementos



y una vez desplegadas las opciones, marque Solver y de aceptar.



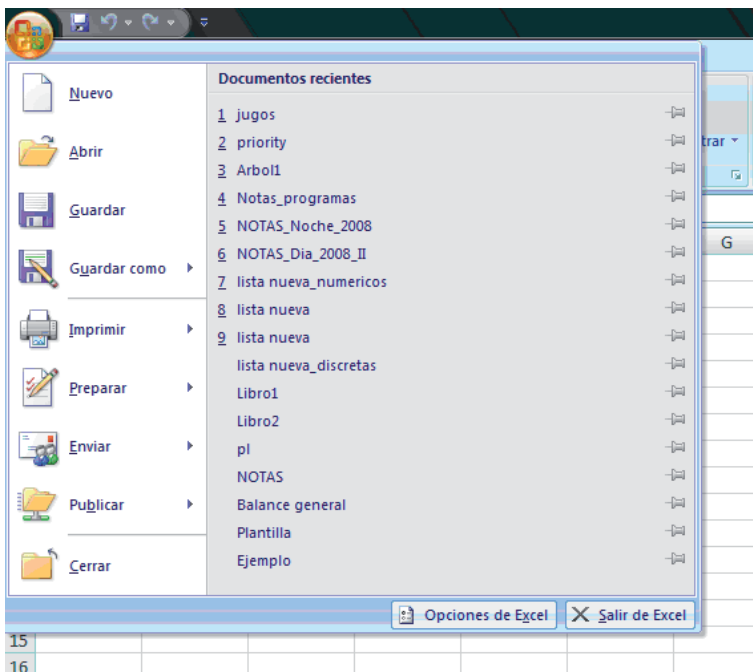
Vuelva a entrar por complementos y ya tendrá disponible la opción

Solver.

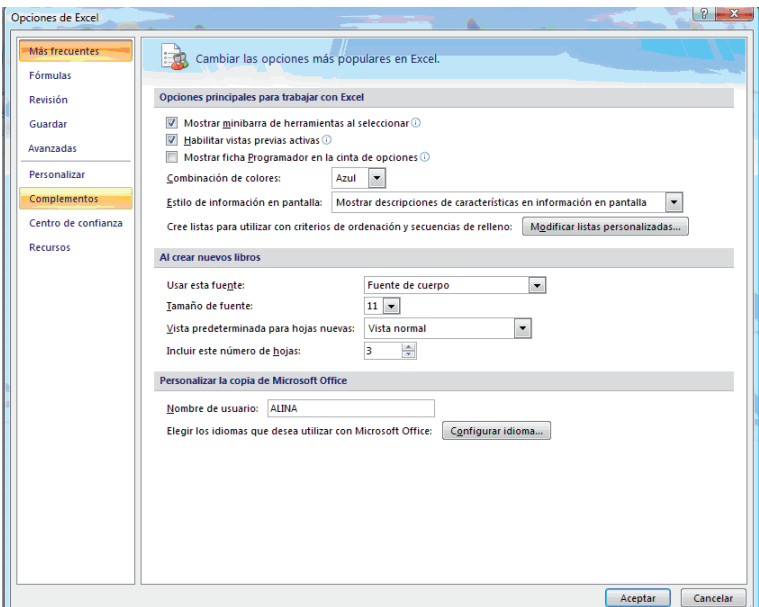
- En Office 2007 o 2010 vaya a



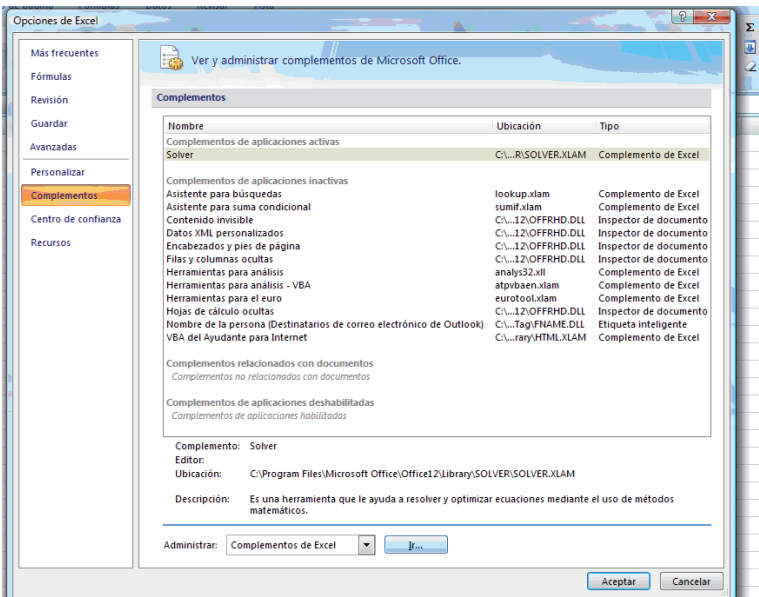
despliegue la ventana de diálogo y en la parte inferior derecha ubíquese en opciones de Excel.



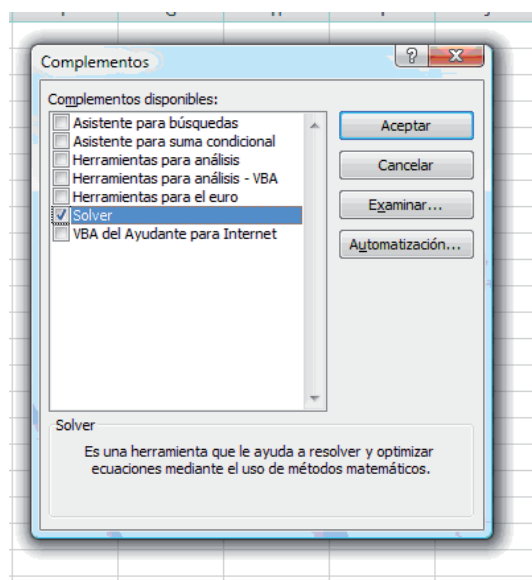
Luego seleccione complementos



Una vez allí diríjase a la parte inferior y en el cuadro Administrar seleccione complementos de Excel y de clic en Ir ...

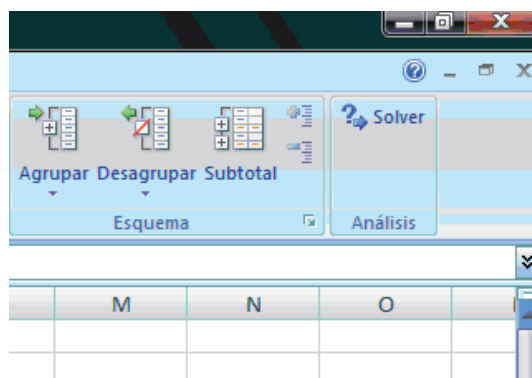


Ahora, en el cuadro de diálogo que aparece, marque Solver y de aceptar.



En ese momento le queda la opción activada. Puede suceder que inicialmente Solver no esté instalado, en ese caso el sistema le dará la opción de instalar.

Para utilizarlo diríjase en la barra superior de la hoja de cálculo a la opción datos y allí en la parte derecha aparecerá Solver.



Una vez activada la opción, su utilización es igual independientemente de la versión de office. Sin embargo las versiones 2007 y 2010 de

Excel cuentan con una mayor capacidad, lo que permite trabajar con un mayor número de variables.

Se procederá ahora a solucionar mediante el empleo de la herramienta Solver el problema de la compañía artículos deportivos. Recuerdese que la formulación es:

Minimizar $30000000x_1 + 18000000x_2$,
sujeto a:

$$\begin{aligned} 2240000x_1 + 2600000x_2 &\geq 9000000 \\ 5760000x_1 + 10400000x_2 &\geq 22000000 \\ x_1 &\geq 1,5x_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Al iniciar el usuario se encuentra con la hoja de cálculo vacía y se puede ubicar en cualquier celda. Aunque no es necesario para el funcionamiento del programa, a fin de facilitar la comprensión de los pasos a seguir, se sombrearán en color las celdas que requiere Solver.

El primer paso es introducir los datos o parámetros del problema, para ello se divide la hoja de cálculo en tres secciones; las variables, la función objetivo y las restricciones. Recuerde que se puede ubicar en cualquier celda de la hoja de cálculo, eso sí procurando una buena distribución de la misma.

	A	B	C	D	E
1					
2			VARIABLES		
3			Televisión	Radio	
4			X1	X2	
5					

Las celdas que se requiere Solver son las que están sombreadas (C5 y D5). Los nombres Televisión, Radio, son opcionales para que el usuario identifique donde está ubicado cada parámetro, pero si no se escriben no afectan el funcionamiento de Solver.

En la sección de la función objetivo se introdujeron los coeficientes y en la celda B9 se escribió la fórmula que la representa.

En las celdas C7 y D7 se escribieron los coeficientes de la función objetivo y en la celda B9 se escribió la correspondiente formula;

B9		=C7*C5+D7*D5		
	A	B	C	D
1				
2			VARIABLES	
3			Televisión	Radio
4			X1	X2
5			FUNCION OBJETIVO	
6				
7		\$/minuto	30000000	18000000
8		Costo Total		
9				

$C7 \cdot C5 + D7 \cdot D5$ que es equivalente a $30000000x_1 + 18000000x_2$. B9 se sombreó porque esa fórmula es información requerida por Solver. El encabezado Costo Total y \$/minuto son para ubicar al usuario o lector de la hoja de cálculo pero no son requeridos por el Solver.

Para escribir las restricciones se necesita introducir los coeficientes (matriz **A**), los lados derechos (vector **b**) y las correspondientes fórmulas. Es recomendable escribirle a cada restricción un nombre que la identifique.

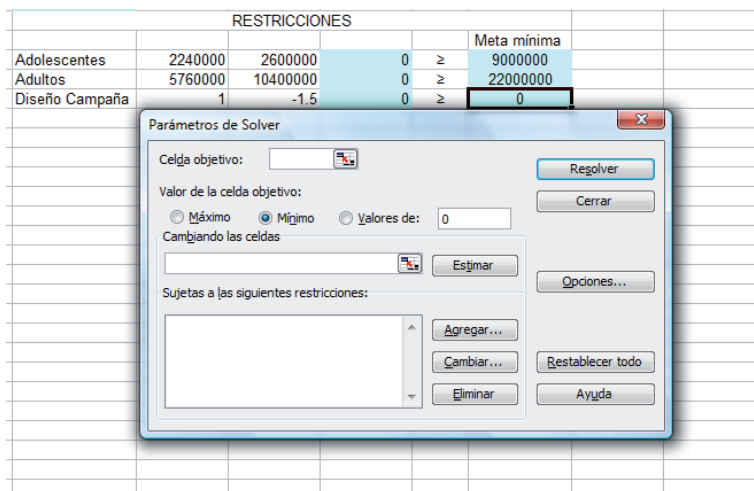
Las celdas E12, E13 y E14 se emplean para escribir las restricciones (observe la barra de fórmulas) y se sombrean para indicar que son requeridas por Solver. En las celdas G12, G13 y G14 se escriben los lados derechos de las restricciones, es decir el vector **b**, y también son solicitadas por Solver.

Una aclaración importante es la correspondiente a los signos $\geq$ ubicados en las celdas F12, F13 y F14, éstos no son necesarios para la solución del problema por medio de Solver pero se ponen para claridad de quien lea la hoja de cálculo.

E12		=+\$C\$5*C12+\$D\$5*D12				
	A	B	C	D	E	F
1						
2			VARIABLES			
3			Televisión	Radio		
4			X1	X2		
5			FUNCION OBJETIVO			
6						
7		\$/minuto	30000000	18000000		
8		Costo Total				
9						
10			RESTRICCIONES			
11						Meta mínima
12		Adolescentes	2240000	2600000	0	$\geq$ 9000000
13		Adultos	5760000	10400000	0	$\geq$ 22000000
14		Diseño Campaña	1	-1.5	0	$\geq$ 0

Hasta el momento se ha transcrito en la hoja de cálculo la formulación del problema, ahora se hará uso de Solver. Para ello se va a Herramientas

(en versiones 2003 hacia atrás) o directamente en datos (Office 2007 y 2010) y se selecciona Solver. Debe aparecer el siguiente cuadro:

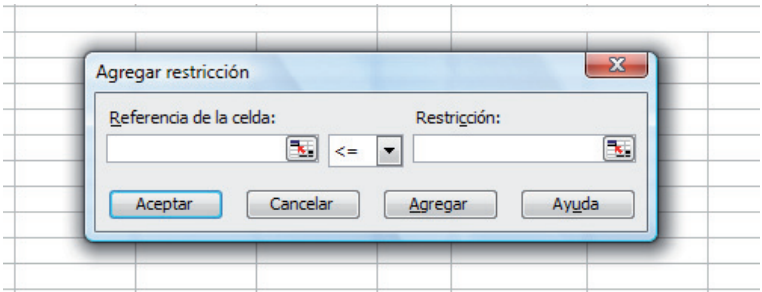


En él se piden los Parámetros de Solver:

- Celda objetivo. Se debe indicar la ubicación de la celda que contiene la fórmula correspondiente a la función objetivo. En este caso se da clic en , se ubica el puntero sobre la celda B9 y se hace clic.
- Valor de la celda objetivo. Se marca si la función objetivo se está maximizando o minimizando. Para el problema considerado se marca mínimo.
- Cambiando las celdas. Se refiere a la ubicación de las celdas que se reservaron para las variables, es decir C5 y D5.
- Sujetas a las siguientes restricciones. Permite agregar, modificar o eliminar restricciones.

Las restricciones se pueden introducir en bloque, para ello se recomienda escribir en forma consecutiva todas las restricciones de tipo mayor igual, luego las del tipo menor igual y luego las de igualdad. Se introducen las del primer tipo, luego se da agregar para introducir las del otro tipo y así sucesivamente.

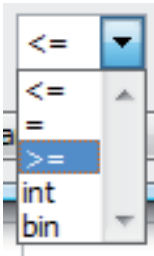
Dando clic en Agregar aparece



En referencia de la celda se introducen las celdas que contienen las formulas de los lados izquierdos de las restricciones, en este caso E12, E13 y E14 (se seleccionan de forma simultánea si todas tienen el mismo signo). Luego se despliega



y aparecen las opciones para los signos de las desigualdades.

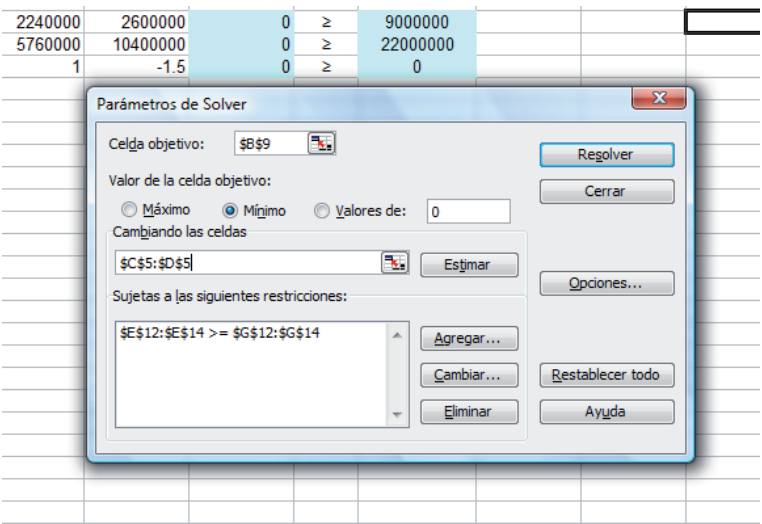


Para el problema estudiado se debe escoger $\geq$.

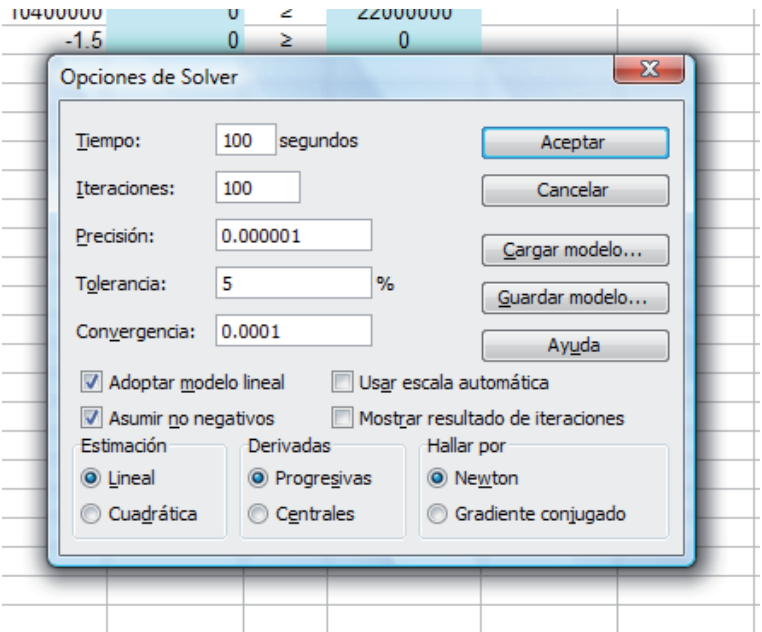
En restricción se referencian las celdas que contienen el vector b , es decir G12, G13 y G14.

Una vez se ha concluido de introducir todas las restricciones (en bloque o individualmente), se da clic en aceptar.

El cuadro de parámetros de Solver debe quedar de la siguiente forma:



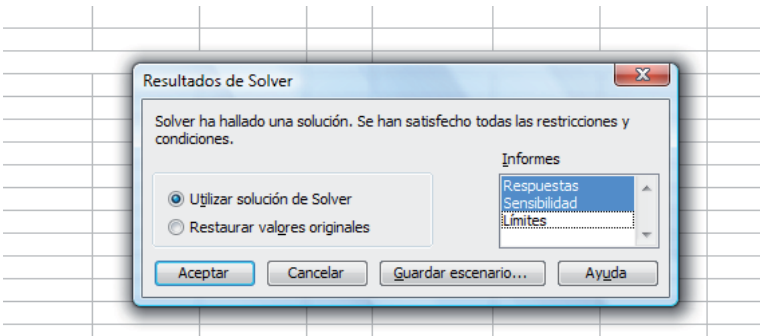
Luego se da clic en opciones y aparece



El tiempo e iteraciones aparecen por defecto en 100, pero se pueden modificar para problemas con una cantidad grande de variables y

restricciones. La precisión, tolerancia y convergencia también tienen valores por defecto pero son modificables.

Se debe marcar adoptar modelo lineal y asumir no negativos, luego se da clic en aceptar y cuando se regresa al cuadro anterior se da clic en resolver. Un cuadro de diálogo indica si el problema fue solucionado, tiene infinitas soluciones, o si no converge.



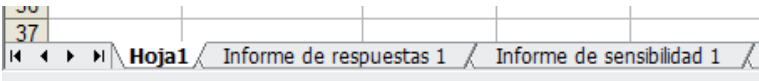
En la sección de informes, se las tres opciones se marcan los que se desean ver y se da clic en aceptar.

La hoja original queda

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			VARIABLES				
3			Televisión	Radio			
4			X1	X2			
5			2.26510067	1.51006711			
6			FUNCION OBJETIVO				
7		\$/minuto	30000000	18000000			
8		Costo Total					
9		95134228.19					
10			RESTRICCIONES				
11						Meta mínima	
12		Adolescentes	2240000	2600000	9000000	≥	9000000
13		Adultos	5760000	10400000	28751677.9	≥	22000000
14		Diseño Campaña	1	-1.5	0	≥	0
15							
16							
17							

Note que todas las celdas que se sombrearon fueron modificadas una vez obtenida la solución, indicándose el valor final de las variables (C5 y D5), la función objetivo (B9) y el valor que tomaron las restricciones (E12, E13 y E14).

Los resultados se pueden ver en la hoja original en la que se escribió el problema o en las hojas adicionales en que se generan los informes de respuestas.



El informe de respuestas muestra los valores finales de la función objetivo y de las variables y la diferencia entre los lados derechos e izquierdos de las restricciones, es decir el valor de las holguras o excesos de correspondientes a cada una de las restricciones.

5																									
6	Celda objetivo (Mínimo)																								
7	<table><tr><th>Celda</th><th>Nombre</th><th>Valor original</th><th>Valor final</th></tr><tr><td>\$B\$9</td><td>Costo Total</td><td>0</td><td>95134228.19</td></tr></table>	Celda	Nombre	Valor original	Valor final	\$B\$9	Costo Total	0	95134228.19																
Celda	Nombre	Valor original	Valor final																						
\$B\$9	Costo Total	0	95134228.19																						
9																									
10																									
11	Celdas cambiantes																								
12	<table><tr><th>Celda</th><th>Nombre</th><th>Valor original</th><th>Valor final</th></tr><tr><td>\$C\$5</td><td>X1</td><td>0</td><td>2.265100671</td></tr><tr><td>\$D\$5</td><td>X2</td><td>0</td><td>1.510067114</td></tr></table>	Celda	Nombre	Valor original	Valor final	\$C\$5	X1	0	2.265100671	\$D\$5	X2	0	1.510067114												
Celda	Nombre	Valor original	Valor final																						
\$C\$5	X1	0	2.265100671																						
\$D\$5	X2	0	1.510067114																						
13																									
14																									
15																									
16																									
17	Restricciones																								
18	<table><tr><th>Celda</th><th>Nombre</th><th>Valor de la celda</th><th>fórmula</th><th>Estado</th><th>Divergencia</th></tr><tr><td>\$E\$12</td><td>Adolescentes</td><td>9000000</td><td>\$E\$12>=\$G\$12</td><td>Obligatorio</td><td>0</td></tr><tr><td>\$E\$13</td><td>Adultos</td><td>28751677.85</td><td>\$E\$13>=\$G\$13</td><td>Opcional</td><td>6751677.852</td></tr><tr><td>\$E\$14</td><td>Diseño Campaña</td><td>0</td><td>\$E\$14>=\$G\$14</td><td>Obligatorio</td><td>0</td></tr></table>	Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia	\$E\$12	Adolescentes	9000000	\$E\$12>=\$G\$12	Obligatorio	0	\$E\$13	Adultos	28751677.85	\$E\$13>=\$G\$13	Opcional	6751677.852	\$E\$14	Diseño Campaña	0	\$E\$14>=\$G\$14	Obligatorio	0
Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia																				
\$E\$12	Adolescentes	9000000	\$E\$12>=\$G\$12	Obligatorio	0																				
\$E\$13	Adultos	28751677.85	\$E\$13>=\$G\$13	Opcional	6751677.852																				
\$E\$14	Diseño Campaña	0	\$E\$14>=\$G\$14	Obligatorio	0																				
19																									
20																									
21																									
22																									
23																									

El informe de sensibilidad muestra los precios sombra y los intervalos obtenidos del análisis de sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo y los lados derechos de las restricciones. También indica el costo reducido (gradiente reducido) de las variables del problema.

5

6

Celdas cambiantes

7

8

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coficiente objetivo	Aumento permisible	Aumento permisible
\$C\$5	X1	2.265100671	0	18000000	1E+30	2492307.692
\$D\$5	X2	1.510067114	0	18000000	2892857.143	45000000

9

10

11

12

Restricciones

13

14

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Aumento permisible
\$E\$10	Adolescentes Alcanzados	9000000	7.55033557	9000000	1E+30	2113445.378
\$E\$11	Adultos Alcanzados	28751677.85	0	22000000	6751677.852	1E+30
\$E\$12	Diseño Campaña Alcanzados	0	1087248.322	0	4.017857143	5.192307692

15

16

17

18

19

Nota. En las versiones de Excel 2003 y 2007 en la versión en español hay un error en el informe de sensibilidad, en la última columna donde dice Aumento permisible

Aumento permisible	Aumento permisible
-----------------------	-----------------------

debería decir "Disminución permisible"

Aumento permisible	Disminución permisible
-----------------------	---------------------------

Para los lectores familiarizados con otros programas es útil advertir que Solver no entrega el intervalo del análisis de sensibilidad sino que el usuario debe calcularlo; al valor del coeficiente respectivo debe sumarle el valor indicado por la celda de aumento permisible y restarle el correspondiente a la celda de disminución permisible (la segunda marcada como Aumento permisible).

El problema también se puede proporcionar en forma estándar, es decir con las restricciones en forma de igualdades (con las correspondientes variables de holgura y de exceso).

VARIABLES								
Televisión	Radio							
X1	X2	X3	X4	X5				
2.26510067	1.51006711	0	6751677.85	0				
FUNCION OBJETIVO								
\$/minuto	30000000	18000000	0	0	0			
Costo Total								
95134228.19								
RESTRICCIONES								
								Meta mínima
Adolescentes	2240000	2600000	-1	0	0	9000000	=	9000000
Adultos	5760000	10400000	0	-1	0	22000000	=	22000000
Diseño Campaña	1	-1.5	0	0	-1	0	=	0

En el informe de respuestas ahora se tiene que todas las divergencias son cero ya que el valor de las variables de exceso (o de holgura) se indica directamente como variables.

6	Celda objetivo (Mínimo)					
7	Celda	Nombre	Valor original	Valor final		
8	\$B\$9	Costo Total	95134228.19	95134228.19		
9						
10						
11	Celdas cambiantes					
12	Celda	Nombre	Valor original	Valor final		
13	\$C\$5	X1	2.265100671	2.265100671		
14	\$D\$5	X2	1.510067114	1.510067114		
15	\$E\$5	X3	0	0		
16	\$F\$5	X4	6751677.852	6751677.852		
17	\$G\$5	X5	0	0		
18						
19						
20	Restricciones					
21	Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
22	\$H\$12	Adolescentes	9000000	\$H\$12=\$J\$12	Opcional	0
23	\$H\$13	Adultos	22000000	\$H\$13=\$J\$13	Opcional	0
24	\$H\$14	Diseño Campaña	0	\$H\$14=\$J\$14	Opcional	0
25						
26						

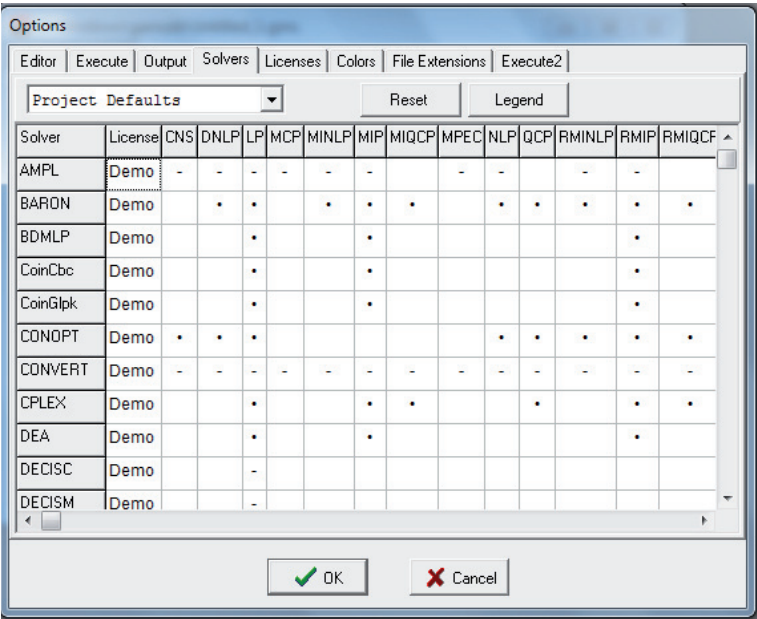
Los informes de sensibilidad difieren en que se puede identificar directamente cuales variables son básicas y cuáles no. Note que x_3 y x_4 al ser variables no básicas tienen costos reducidos (gradientes reducidos) diferentes de cero1.

5							
6	Celdas cambiantes						
7	Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coficiente objetivo	Aumento permisible	Aumento permisible
9	\$C\$5	X1	2.265100671	0	30000000	1E+30	14492307.69
10	\$D\$5	X2	1.510067114	0	18000000	16821428.57	63000000
11	\$E\$5	X3	0	10.5704698	0	1E+30	10.5704698
12	\$F\$5	X4	6751677.852	0	0	4.528846154	3.308823529
13	\$G\$5	X5	0	6322147.651	0	1E+30	6322147.651
14							
15	Restricciones						
16	Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Aumento permisible
18	\$H\$12	Adolescentes	9000000	10.5704698	9000000	1E+30	2113445.378
19	\$H\$13	Adultos	22000000	0	22000000	6751677.852	1E+30
20	\$H\$14	Diseño Campaña	0	6322147.651	0	4.017857143	5.192307692
21							

9.2. GAMS

GAMS son las siglas de General Algebraic Modeling System, es un sistema de modelamiento de alto nivel para optimización. Dentro de sus características se destacan la versatilidad para el modelamiento de diferentes situaciones y que proporciona la opción de solucionarlos a través de diferentes solucionadores (solvers), los cuales se pueden

elegir de acuerdo a la situación sin ninguna dificultad. También permite importar datos de hojas de cálculo y codificar bucles.



Algunos solucionadores disponibles en GAMS y sus aplicaciones.

GAMS es muy adecuado para modelar situaciones generales y con un número elevado de variables y restricciones puesto que el modelo se puede separar de los parámetros. Así se tiene un código general y después simplemente se introducen los valores de los respectivos parámetros que se hayan definido.

Cabe anotar que GAMS es útil para modelar y solucionar problemas de programación lineal, programación entera, programación binaria, programación mixta y programación no lineal. Una versión demo se puede descargar de la página www.gams.com.

Aunque suele decirse que no es recomendable para solucionar problemas pequeños, esta afirmación es bastante discutible puesto que, aunque existen programas en los que modelar problemas de menor escala es una tarea muy fácil, con GAMS también es relativamente sencillo. Los dos siguientes ejemplos ilustran esta situación.

Ejemplo 1 de codificación en GAMS

El primer ejemplo del capítulo cuatro, referente a una fábrica de concentrados para gatos, es sencillo ya que solo tiene dos variables y cuatro restricciones. Para su codificación en GAMS se procede de la siguiente forma:

- Definición de las variables:

Consiste en dar un símbolo a cada una de las variables necesarias.

- Nominación de las restricciones:

Se da nombre a cada restricción del problema y también a la función objetivo.

- Definición de las restricciones:

La función objetivo y las restricciones se escriben como expresiones matemáticas. Para ello es útil saber que:

- El signo igual se representa como $= E =$
- El signo $\leq$ se representa como $= G =$
- El signo $\geq$ se representa como $= L =$

Para expresar una ecuación o inecuación, se escribe el nombre que se le asignó seguido de `..` y se procede a escribir la expresión matemática de acuerdo a la convención que se acaba de presentar.

- Se eligen los parámetros de solución.

Se debe escoger el solucionador a utilizar, el número de iteraciones (`iterlim`), el criterio de optimización (maximizar o minimizar), la precisión (`optcr`) y la información que se desea que el programa reporte.

Para la elección del solucionador se debe ser cuidadoso de verificar si es útil para el tipo de problema que se está solucionando, por ejemplo, no todos los solver sirven para programación con variables binarias. Las últimas líneas del código presentado corresponden a estas opciones.

El siguiente es el código para el problema de la fábrica de concentrados para gato.

Modelo en GAMS
VARIABLES
X
Y
Z;
EQUATIONS
OBJ FUNCION OBJETIVO RESIDUOS
AGUA
PRESERVANTE
DEMANDA;
OBJ.. $Z = E = 6000 * X + 8000 * Y$;
RESIDUOS.. $X + 2 * Y = L = 500$;
AGUA.. $0,5 * X + 0,8 * Y = L = 1000$;
PRESERVANTE.. $0,01 * X + 0,015 * Y = L = 10$;
DEMANDA.. $Y = G = 100$;
Option <i>iterlim</i> = 1000;
Option <i>optcr</i> = 0,05;
Option <i>lp</i> = MINOS5;
Model desicion /all/;
Solve desicion using lp maximizing Z;
Display <i>X.l</i> , <i>Y.l</i> ;

Ejemplo 2 de codificación en GAMS

Para el problema de la microempresa de confecciones (ejemplo dos del capítulo 4), el procedimiento es similar. Puesto que GAMS lo permite y para hacer el código menos plano, en este caso se escribió la información asociada a las variables y las restricciones.

Modelo en GAMS
VARIABLES
X1 Camisas para hombre a producir diariamente
X2 Camisas para mujer a producir diariamente
X3 Camisas unisex a producir diariamente
I Ingresos diarios de la microempresa;
EQUATIONS
INGRESOS Ingresos de la microempresa
CORTE Horas de corte disponibles
COSTURA Horas de costura disponibles
TELA Metros de tela disponibles
DEMANDA Demanda máxima de camisas unisex;
INGRESOS.. $I = E = 130000 * X1 + 145000 * X2 + 160000 * X3$;
CORTE.. $X1 + 1,5 * X2 + 1 * X3 = L = 8$;
COSTURA.. $1,2 * X1 + 1,8 * X2 + 3 * X3 = L = 11,4$;
TELA.. $1 * X1 + 1,4 * X2 + 1,5 * X3 = L = 8,5$;
DEMANDA.. $X3 = L = 3$;
Option <i>iterlim</i> = 1000;

Continúa

```

Option optcr = 0,05;
Option lp=MINOS5;
Model desicion /all/;
Solve desicion using lp maximizing I;
Display X1.l, X2.l, X3.l;

```

Ejemplo 3 de codificación en GAMS

Se presenta la codificación en GAMS para el tercer ejemplo del capítulo cuatro. La naturaleza de este problema es diferente ya que corresponde a una situación que se puede presentar con un mayor número de restricciones y variables, por lo tanto es propicia para ilustrar un tipo de codificación más elaborado.

En este tipo de problemas se deben definir los conjuntos que están presentes, los índices que los contarán, declarar los parámetros y utilizar sumatorias. Dentro del código se muestra como hacerlo además de dos alternativas para escribir comentarios.

Las sumatorias se expresan con el comando sum. La expresión $\sum_{i=1}^n x_i$ se codificaría como sum ((i),X(i)).

Modelo en GAMS para el ejemplo tres del capítulo cuatro

\$Ontext

Se pueden escribir comentarios tan largos como se desee utilizando los comandos que abren y cierran este párrafo. También se pueden hacer comentarios sobre una línea si se inicia esta con *

\$Offtext

Continúa

***DECLARACION DE CONJUNTOS**

set

i productos /1*5/

j estaciones /1*4/

k materias_primas/1*2/;

*Los alias son subíndices diferentes para nombrar conjuntos ya

* declarados

Alias (i, p);

Alias (j, n);

***DECLARACION DE PARÁMETROS**

*Se definen los parámetros que se van a usar, esto se puede hacer

*de varias formas entre las que están; definir uno a uno, por formula

* o por tablas.

Parameters $H(j)$ minutos disponibles en cada estación

/1 = 5300, 2 = 4800, 3 = 5000, 4 = 4800/;

Parameters $MP(k)$ disponibilidad semanal de materia prima

/1 = 10000, 2 = 12000/;

Parameters $dm(i)$ demanda mínimas de cada producto

/ 1 = 20, 2 = 20, 3 = 30, 4 = 40, 5 = 30/;

Continúa

Parameters $dmax(i)$ demanda máxima de cada producto
/ 1 = 100, 2 = 120, 3 = 100, 4 = 100, 5 = 100/;

Parameters $un(i)$ utilidad neta de una unidad del producto i
/ 1 = 14000, 2 = 17000, 3 = 18000, 4 = 10000, 5 = 17000/;

* Se pueden definir escalares que no dependan de ningún conjunto con Scalar

* Si es más práctico se hacen tablas

Table $tp(j, i)$ tiempo de proceso de los productos en las estaciones

	1	2	3	4	5
1	17	17	14	20	17
2	15	20	19	19	18
3	19	15	11	13	12
4	17	11	11	15	16;

Table $cmp(k, i)$ materia prima requerida para hacer una unidad de producto

	1	2	3	4	5
1	7	6	5	6	5
2	5	6	5	7	3;

*DECLARACIÓN DE VARIABLES

* Se les da nombre a las variables que se definen

Variables

$X(i)$ cantidad del producto i que se debe producir semanalmente
profit variable que se debe maximizar;

* Se define si las variables son positivas, enteras o irrestrictas Positive variables X ;

*DECLARACION DE RESTRICCIONES

* Se le da nombre a cada conjunto de restricciones, indicando que conjuntos

* se usaran en cada una

Equations

Capacidad(j) Restricciones de capacidad

Mat_Prima(k) Restricciones de materia prima

Demin(i) Restricciones de demanda mínima

Demax(i) Restricciones de demanda máxima

utilidad Proporciona la función objetivo que se debe maximizar;

*Ahora se escriben las restricciones

utilidad .. $profit = e = \text{sum}((i), un(i) * X(i));$

Capacidad(j).. $H(j) = g = \text{sum}((i), tp(j, i) * X(i));$

Mat_Prima(k).. $MP(k) = g = \text{sum}((i), cmp(k, i) * X(i));$

Demin(i).. $dm(i) = l = X(i);$

Demax(i).. $dmax(i) = g = X(i);$

Option iterlim=1000;

Continúa

```

Option optcr = 0,05;
Option lp = MINOS5;
Model desicion /all/;
Solve desicion using lp maximizing profit ;
Display X.l;

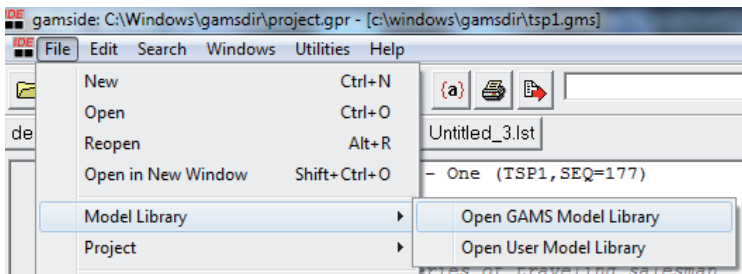
```

Es importante anotar que problemas como el anterior se pueden hacer aún más generales separando totalmente en dos bloques el modelo y los valores numéricos de los parámetros, de esta forma no se altera el modelo y simplemente cuando haya cambios en los parámetros, se hacen en el respectivo bloque.

Ejemplo 4 de codificación en GAMS

La situación del representante de ventas ilustrada en el cuarto ejemplo del capítulo cuatro se modela en forma similar al ejemplo anterior, salvo que las variables utilizadas son binarias. Esta declaración se hace con Binary variables (para variables continuas se utiliza Positive variables y para variables enteras Integer variables). También se debe elegir un solver apropiado.

La codificación presentada a continuación no incluye las restricciones para evitar los subciclos, esta tarea se deja como ejercicio para el lector ayudándose de la biblioteca de modelos disponible en GAMS (tiene cuatro formulaciones de TSP). Para acceder a este recurso se sigue la ruta por File, model library y open GAMS model library.



Ejemplo 4

*DECLARACIÓN DE CONJUNTOS

set

i ciudades /1*6/

j ciudades /1*6/;

*DECLARACIÓN DE PARÁMETROS

* En las diagonales se escribe un valor relativamente grande para hacer que en la solución las

*variables $x_{i,i}$ valgan cero.

Table $Km(i, j)$ kilómetros que separan la ciudad i y la ciudad j .

1 2 3 4 5 6

1 10000 460 646 655 580 778

2 460 10000 193 238 252 325

3 646 193 10000 178 280 150

4 655 238 178 10000 120 300

5 580 252 280 120 10000 420

6 778 325 150 3000 420 10000;

*DECLARACION DE VARIABLES

* Se les da nombre a las variables

Variables

Continúa

$X(i, j)$ variable binaria que indica si después de visitar la ciudad i se visita la ciudad j D variable que se debe minimizar;

* Se define si las variables son positivas, enteras o irrestrictas Binary variables X ;

*DECLARACION DE RESTRICCIONES

Equations

Entrar(i) Se debe entrar a cada ciudad

Salir(j) Se debe salir de cada ciudad

distancia Proporciona la función objetivo que se debe minimizar;

*Ahora se escriben las restricciones

distancia.. $D = e = \text{sum}((i, j), Km(i, j) * X(i, j));$

Entrar(i)..1 = $e = \text{sum}((j), X(i, j));$

Salir(j)..1 = $e = \text{sum}((i), X(i, j));$

Option *iterlim* = 1000;

Option *optcr* = 0,05;

Option *mip* = XA ;

Model decision /all/;

Solve decision using mip minimizing D ;

Display $X.l$;

Los ejemplos presentados son una introducción a GAMS, para información más profunda se puede consultar el manual incluido en el software y que se referencia en la bibliografía. Otra alternativa para profundizar en el arte del modelado en GAMS es abrir y analizar los modelos disponibles en la biblioteca de modelos que se mencionó.

EJERCICIOS

1. En una hoja de cálculo solucione los problemas de la microempresa de confecciones bogotana y de la compañía de artículos deportivos formulados en forma estándar (las restricciones en forma de igualdades). Compare los resultados con los obtenidos al solucionar el problema planteado en forma canónica (restricciones en forma de desigualdad) ¿cuáles son las diferencias entre los dos informes de respuestas? y ¿cuál enfoque le parece más ventajoso?
2. Solucione los problemas de la microempresa de confecciones bogotana y de la compañía de artículos deportivos utilizando GAMS.
3. Al observar una tabla de resultados obtenida por Solver y otra con GAMS ¿cómo identificaría una solución que presente degeneramiento?
4. A usted le entregan los resultados de Solver y la formulación de un problema expresado en forma canónica ¿cómo identificaría una solución degenerada? y ¿cómo identificaría cuando existen infinitas soluciones?
5. Solucione cada uno de los ejemplos formulados en el capítulo 4 utilizando Solver y GAMS (en este caso basta con copiar los códigos del presente capítulo y correrlos en el demo que se puede descargar de la página www.gams.com). Exprese las ventajas y desventajas de cada uno de los programas y de la forma en que proporcionan los resultados.
6. Solucione cada uno de los ejercicios del capítulo 4 utilizando Solver y GAMS. Ubique e intérprete cada uno de los resultados proporcionados. Recuerde que cuando se utilizan variables binarias o variables enteras, no es posible obtener los análisis de sensibilidad.
7. Utilizando alguno de los modelos de la biblioteca de GAMS solucione el problema del representante de ventas, evitando los subciclos.

Referencias bibliográficas

Rosenthal, R. *GAMS A User's Guide*. GAMS Development Corporation, Washington, DC, USA. 2008

Rosenthal, R. *A GAMS tutorial*. Naval Postgraduate School. Monterey, California USA.

ÍNDICE ANALÍTICO

- agente viajero
 - TSP, 82
- análisis
 - análisis de sensibilidad (algebraico), 195
 - gráfico de sensibilidad, 46
 - sensibilidad en la función objetivo, 48
- base
 - definición, 103
- coeficientes de la función objetivo
 - intervalos de validez, 199
- combinación
 - lineal, 14
 - lineal afín, 14
- condición
 - local de optimalidad, 108
- condiciones de optimalidad
 - Karush Kuhn Tucker, 182
- conjunto convexo, 22
- cono convexo, 27
- costo
 - de oportunidad, 187
 - reducido, 106
- Dantzig, 7
- dualidad, 173
 - consideraciones sobre, 179
- elemento pivote, 137
- factibilidad dual, 182
- forma
 - canónica, 38
 - estándar, 39
- función objetivo, 37
- GAMS
 - modelamiento, 231
- Gauss-Jordan, 136
- hiperplano, 25
- Kantorovich, 7
- Karmakar, 8
- Khachiyani, 8
- lados derechos
 - cambios en, 204
- matriz
 - cero, 15
 - definición de, 15
 - identidad, 15
 - inversión con Excel, 20
 - multiplicación con Excel, 17
 - rango de, 21
 - triangular, 16
- método
 - de la gran M , 162
 - de las dos fases, 152
 - gráfico, 39
- modelamiento, 63
- multiplicador
 - de Lagrange, 135
 - simplex, 173
- poliedro, 27
- politopo, 27

- precio sombra
 - deducción gráfica, 55
 - Pricing Out*, 188
- problema dual
 - formulación, 176
- problema primal, 174
- producto escalar, 13
- programación lineal, 7
- puntos extremos, 24
- rayo, 25
- recursos
 - abundantes, 186
 - escasos, 186
- región factible, 39
- regla del 100 %, 208
- restricciones, 37
- simplex, 99
- solución
 - básica, 104
 - básica factible, 104
 - degenerada, 104
 - existencia de infinitas, 42
 - inicial, 152
 - óptima única, 41
- solver
 - utilización de, 218
- tablas simplex, 136
- teorema de representación, 31
- variable
 - artificial, 151
 - básica, 184
 - dual, 173
 - dual, explicación práctica, 184
 - entrante, 110
 - saliente, 111
- variables
 - binarias, 68
 - de holgura, 37
 - enteras, 67
- vector
 - cero, 12
 - columna, 11
 - magnitud, 13
 - operaciones con, 12
 - suma, 12
 - unitario, 12

