

DECISIONES GERENCIALES ESTRATÉGICAS

Una aplicación a la teoría de juegos

2ª edición

Maximiliano González F. | Alexander Guzmán V.

María Andrea Trujillo D.



**Colegio de Estudios
Superiores de Administración**



**Colegio de Estudios
Superiores de Administración**

DECISIONES GERENCIALES ESTRATÉGICAS

UNA APLICACIÓN
A LA TEORÍA DE JUEGOS
2^a EDICIÓN

Maximiliano González F.
Alexander Guzmán V.
María Andrea Trujillo D.

CESA - Colegio de Estudios Superiores de Administración

658.4012 / G659d 2017

González F., Maximiliano (Autor)

Decisiones gerenciales estratégicas: una aplicación a la teoría de juegos. 2a edición / Maximiliano González F., Alexander Guzmán V., María Andrea Trujillo D. (Autores). Bogotá: CESA–Colegio de Estudios Superiores de Administración. Editorial CESA, 2017. 338 p.

ISBN Impreso: 978-958-8988-14-6

ISBN Digital: 978-958-8988-15-3

Descriptores:

1. PLANIFICACIÓN ESTRATEGICA. 2. TEORÍA DE LOS JUEGOS

© 2017 CESA - Colegio de Estudios Superiores de Administración

© 2017 María Andrea Trujillo D. [Maria.trujillo@cesa.edu.co]

© 2017 Alexander Guzmán V. [Alexander.guzman@cesa.edu.co]

© 2017 Maximiliano González F. [Maxgonza@uniandes.edu.co]

ISBN Impreso: 978-958-8988-14-6

ISBN Digital: 978-958-8988-15-3

Editorial CESA

Casa Incolda

Diagonal 34a No 5a - 23

www.editorialcesa.com

www.cesa.edu.co

editorialcesa@cesa.edu.co

Grupo de Estudios en Administración

Proyecto de Investigación: Economía de la Información

Código interno: 10012

Bogotá, D.C, junio de 2017

Dirección Editorial: Editorial CESA

Corrección de estilo: José Ignacio Curcio

Diagramación y diseño: YO_Diseño

Impresión: Imageprinting Ltda

Todos los derechos reservados. Esta obra no puede ser reproducida sin el permiso previo escrito.

Impreso y hecho en Colombia

Contenido

Agradecimientos | 9

Prólogo | 11

CAPÍTULO 1.
INTRODUCCIÓN Y EQUILIBRIO DE NASH

¿Qué es la teoría de juegos? | 15

¿Qué hace que algo sea considerado un juego? | 17

¿Cuál es el objetivo y la estructura de este libro? | 18

Teoría de juegos y decisiones gerenciales | 20

Estructura básica de un juego | 24

Juegos estáticos de información completa y equilibrios | 30

Aplicaciones | 48

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos | 61

CAPÍTULO 2.
ESTRATEGIAS MIXTAS

Interpretación de los equilibrios mixtos | 67

Aplicaciones | 79

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos | 80

CAPÍTULO 3.
JUEGOS DINÁMICOS

Equilibrio Perfecto de Nash en Sub-juegos (EPNS) | 107

¿Cómo transformar un juego dinámico en un juego estático? | 109

Importancia de los juegos dinámicos | 112

Aplicaciones | 120

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos | 124

CAPÍTULO 4.
JUEGOS REPETIDOS E
INFORMACIÓN IMPERFECTA | 147

Juegos repetidos finitos | 148

Juegos repetidos infinitos | 151

Aplicaciones | 154

Juegos de información imperfecta | 160

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos | 174

CAPÍTULO 5
JUEGOS DE INFORMACIÓN INCOMPLETA | 179

Actualización de creencias | 181

Concepto de estrategia y equilibrio en los juegos bayesianos | 183

Aplicaciones | 188

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos | 219

CAPÍTULO 6.
JUEGOS DE SEÑALES | 223

Estructura básica de los juegos de señales | 224

Aplicaciones | 238

Problemas con solución
para practicar y afianzar conceptos | 257

CAPÍTULO 7.
OPCIONES REALES Y TOMA DE DECISIONES
FINANCIERAS ESTRATÉGICAS | 265

¿Qué es una opción real? | 268

Clasificación de las opciones reales | 272

Valoración de las opciones reales | 284

Aplicaciones | 288

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos | 294

CAPÍTULO 8.

MINICASOS DE ESTUDIO

Caso de estudio 1.

Determinación de la política de precios

Caso de estudio 2.

Salida y entrada al mercado de explosivos para la minería en Colombia

Caso de estudio 3.

Política de cobranzas y descuentos por pronto pago

Caso de estudio 4.

Negociación con sindicatos

Caso de estudio 5.

Lucha entre banqueros

Caso de estudio 6.

Control corporativo, takeovers y el problema del “free-raider”

Caso de estudio 7.

Corrupción e incentivos

Caso de estudio 8.

Acceso al microcrédito

Caso de estudio 9.

Contratos como juegos de información incompleta

Caso de estudio 10.

Políticas de desarrollo como un juego de coordinación

Caso de estudio 11.

Empresa petrolera y sus opciones reales (parte A)

Caso de estudio 12.

Empresa petrolera y sus opciones reales (parte B)

Caso de estudio 13.

Empresa petrolera y sus opciones reales (parte C)

Bibliografía

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos especialmente a Diego Téllez, estudiante del doctorado en Administración de la Universidad de los Andes, la asistencia en la estructuración de la primera edición de este texto. Igualmente, reconocemos el aporte a la discusión y aplicación de la Teoría de Juegos a situaciones cotidianas de los estudiantes del curso Decisiones Gerenciales Estratégicas en el Magister en Administración, el Magister en Finanzas y la Maestría en Gerencia y Práctica del Desarrollo de la Facultad de Administración de la Universidad de los Andes. Finalmente, agradecemos la acogida de la Editorial CESA, y el proceso riguroso de evaluación que nos llevó a un mejor texto.

PRÓLOGO

En mi práctica docente con empresarios y directivos he encontrado que la teoría de juegos es una excelente herramienta para incentivar el pensamiento estratégico. Sin duda una buena preparación en este campo es necesaria para quienes buscan ejercer cargos de dirección. Hay excelentes libros sobre el tema —como los que nos recomiendan los autores en las primeras páginas—, pero desafortunadamente muchos de los que se usan como textos en los cursos de la materia resultan complejos, abstractos y en cierta medida, difíciles de leer.

El presente texto apunta en una dirección muy interesante: mantener el rigor necesario para un grupo de estudiantes en formación, sin permitir que ese rigor se convierta en un obstáculo al entendimiento o el interés; vale decir, que la lectura juiciosa de este libro les permitirá conocer con cierta profundidad la teoría de juegos y los principios en que se sustenta, y les brindará multitud de oportunidades para aplicarlas a su vida gerencial y personal, sin que ello les exija una preparación matemática superior.

La teoría de juegos es cada vez más apreciada y su campo de aplicación crece en todas direcciones: economía, biología, psicología, negociación, politología, sociología, etc., por lo cual creo conveniente hacerle al lector dos advertencias.

La primera hace relación con lo que en teoría de juegos se denomina “pagos”, es decir, los números que acompañan a las matrices, y los árboles que encontrarán en este libro y en todo libro de teoría de juegos. Pero, ¿qué representan? Los pagos representan las preferencias del jugador: si el jugador tiene que elegir, elegirá la alternativa con el mayor pago (el número mayor en la matriz o en el árbol). ¿Y de dónde salen esos pagos? Simplificando en exceso se puede decir que se obtienen así: se le pregunta al jugador cuál alternativa, A o B, prefiere; si nos dice que prefiere B asignamos un pago de, por ejemplo, 1 a la alternativa B y un pago de 0 a la A. Así pues, ese 0 y ese 1 nos indican qué preferirá el jugador.

Naturalmente, cuando le llegue el momento a nuestro jugador de elegir entre la alternativa A y la B, podremos predecir que elegirá la B apoyados en que esta tiene un valor de 1, superior al valor de 0 de la alternativa A. Como se ve, se trata de una tautología: ¿por qué elige B?, porque tiene un valor mayor; ¿y por qué tiene un valor mayor?, porque nos dijo que esa sería la que elegiría.

Pero no por esto el lector debe creer que la teoría de juegos es simple, porque lo que resulta asombroso y apasionante es ver la cantidad de resultados sorprendentes que a partir de unas bases tan sencillas

se pueden lograr. Tan sorprendentes que a veces nuestra intuición se revela, cuando no es la misma realidad la que lo hace. A esto, la teoría de juegos solo puede contestar que, si los pagos son los correctos y se presume racionalidad en los jugadores, el resultado es el que se indica, y que si el resultado no nos gusta o no se da en la realidad, debemos culpar a la mala asignación de los pagos, no a las conclusiones lógicas que obtiene la teoría.

A veces estos pagos no nacen de una pregunta directa, sino de una suposición como, por ejemplo, la de que frente a dos sumas de dinero el jugador preferirá la mayor. No es una mala suposición, pero los experimentos no se cansan de mostrar que los seres humanos, por múltiples razones, no siempre respondemos “lógicamente”, ni uniformemente, ni siquiera consistentemente. Esto, lejos de restarle belleza a la teoría, le agrega, creo, más asombro al conocimiento de nuestra condición de seres humanos.

La segunda advertencia tiene relación con lo que podríamos llamar la neutralidad ética de la teoría de juegos. Si bien esta teoría puede usarse, y se ha usado, para desarrollar teorías éticas, básicamente fundadas en el concepto de reciprocidad, muchas veces las recomendaciones de un análisis riguroso de una situación de juegos son inmorales y peligrosas. La carrera armamentista está muy bien justificada teóricamente, como puede estarlo la “guerra preventiva”, la aniquilación total del enemigo o, en un plano más cercano, y dadas ciertas circunstancias, la indiferencia, el abuso o la corrupción. No se

trata solo de preocupaciones abstractas: los debates sobre armamentismo y ataques preventivos con armas nucleares se han sustentado en análisis incluso primitivos de teoría de juegos por personas de alto calibre intelectual.

La teoría de juegos se presenta como una herramienta interesantísima y enriquecedora, tanto, que es fácil dejarse deslumbrar. Los análisis y los ejemplos que están a punto de leer resultarán tan atractivos que correrán el peligro de intoxicarse con ellos. Tomada con la debida moderación, aplicada con la debida prudencia, la teoría de juegos puede ser una herramienta utilísima y hermosa, un mundo mágico y sorprendente que vale la pena conocer.

Agradezco a los autores por invitarme a prologar esta publicación, y los felicito por el trabajo desarrollado; al amable lector le deseo un viaje placentero y fructífero.

Ciro Gómez Ardila

Director Académico de INALDE Business School

Ph.D. en Management, IESE Business School

Master en Dirección de Empresas –MBA, INALDE Business School

Médico y Especialista en Anestesiología, Universidad del Rosario

CAPÍTULO 1.

INTRODUCCIÓN Y EQUILIBRIO DE NASH

Comencemos con un juego... hace un tiempo en Inglaterra un periódico anunció un concurso con las siguientes características: cada persona iba a enviar a la dirección del periódico una carta con su nombre y un número entero ente 1 y 100..., el ganador sería aquella persona cuyo número se aproximara más al promedio de todos los números recibidos dividido entre dos. Por ejemplo, si la persona A envió el número 60, la B el 50 y la C el 40, entonces el promedio es 50 y al dividirlo entre 2 el resultado es 25, y el ganador del concurso sería la persona C. Supongamos que hacemos ese concurso en un salón de clase y ofrecemos un premio de \$1.000 (en la versión original el premio era 1.000 libras esterlinas!). ¿Qué cree que ocurriría? ¿Si usted estuviese en ese salón de clase, que número escribiría en el papel?

Nuestra experiencia, nos indica que los estudiantes razonan de la siguiente manera: si todos escogen 50 voy a poner 25..., pero si todos están pensando igual que yo entonces voy a escribir 12 (o 13) ..., pero si todos siguen esta línea de razonamiento entonces mejor me voy con el 6 (o 7)... Generalmente los estudiantes llegan hasta allí; sin embargo, el razonamiento puede continuar un par de pasos adelante y llegar hasta el valor óptimo de 1 (o 2)...

Con esta información, ¿qué número escribiría en el papel?, ¿todos los estudiantes colocarían el mismo número?, ¿qué ocurre si repetimos varias veces este juego? Note que la respuesta a estas preguntas requiere pensar sobre qué harán los demás y eso es justamente lo que diferencia a la teoría de juegos de otras disciplinas que estudian los procesos de toma de decisiones.

¿Qué es la teoría de juegos?

Formalmente podemos decir que la teoría de juegos es una disciplina que estudia la manera como los individuos racionales toman decisiones estratégicas, es decir, considerando las posibles acciones de sus contrincantes; como en nuestro ejemplo introductorio, donde la decisión sobre qué número escribir en el papel depende de lo que creemos que colocarán los demás.

La teoría de juegos es una disciplina importante. Prueba de ello es que cerca de un tercio de los últimos premios Nobel de economía han tenido algo que ver con el desarrollo de tales ideas. Sin embargo, es una disciplina relativamente joven comparada con otros paradigmas económicos, pues su origen, puede decirse, se remonta a 1944 con la publicación del libro *Games and Economic Behavior* del matemático (¡y genio!) John Von Newman¹ y el economista Oskar Morgenstern.

1 Para un perfil de John von Newman ver Osborne, 2004, p. 3.

El objeto de estudio de la teoría de juegos no son realmente “juegos” como comúnmente los conocemos; por el contrario, en este libro un “juego” es cualquier interacción estratégica entre dos o más personas. Los ejemplos de los “juegos” que se analizan aquí se focalizan en interacciones gerenciales estratégicas: imagine un gerente de finanzas que está considerando recortar un dividendo para financiar un proyecto de inversión... ¿se puede justificar de manera creíble ese recorte?, ¿cómo reaccionará el mercado al momento del anuncio?

O considere dos contratistas petroleros que entran en un proceso de licitación para explorar en una determinada zona geográfica donde las condiciones de la oferta se fundamentan en la fracción de las ganancias que cada empresa ofrece como regalías a la estatal petrolera; entonces, ¿cuál es el mejor curso de acción para cada una de las empresas, considerando que entre mayor sea la regalía más probabilidades tienen de ganar la licitación pero a costa de reducir los márgenes de ganancia?

¿Qué hace que algo sea considerado un juego?

Adelante se formaliza aún más el concepto, pero, por ahora: si una determinada interacción estratégica tiene al menos dos “jugadores”, cada jugador tiene un conjunto de “estrategias” o planes de acción, y la interacción genera “pagos”, entonces estamos hablando de un “juego”.

También es importante entender que no necesariamente el análisis de un juego nos va a indicar qué va a suceder en la situación observada, pues ese no es el objetivo de la teoría de juegos; más bien lo que se busca es comprender mejor ciertas situaciones como, por ejemplo, el siguiente caso:

Un experto en juegos se reunió en una sala de juntas con un grupo de ejecutivos de finanzas y les propuso subastar un billete de 100 dólares. La regla de la subasta era que ganaba aquel que ofreciera más por el billete pero pagaba el que hiciera la segunda mejor oferta... ¿Por cuánto subastaron el billete? Bueno, ¡terminaron pagando 465 dólares por un billete de 100 dólares!

¿Cómo puede ocurrir esto entre ejecutivos bien entrenados en finanzas? Si el ejecutivo A dice que pagará 100 por el billete, el ejecutivo B dice entonces que pagará 110 y en ese caso se lleva el billete, mientras que el ejecutivo A paga los 100... pero el ejecutivo C viendo la situación ofrece 120, se lleva el billete y paga el ejecutivo B 110... Lo anterior sucedió de manera sucesiva hasta que el juego paró y el experto en juegos se llevó 465 dólares por el billete de 100.

Entonces, el objetivo de la teoría de juegos es entender más que predecir. Por eso es tan útil en prácticamente todas las áreas de conocimiento. Inclusive existen algunos economistas que argumentan que la teoría de juegos es realmente la teoría unificada de las ciencias sociales (Luce y Raiffa, 1989).

¿Cuál es el objetivo y la estructura de este libro?

Aquí estudiaremos juegos sencillos que permiten entender situaciones complejas de la vida real, pero sin el aparato económico-matemático de los libros tradicionales sobre el tema. Para el lector interesado en comprender los fundamentos teóricos de la teoría de juegos recomendamos consultar diferentes textos, entre ellos Gibbons (1992), Dutta (1999), Rasmussen (2007), Dixit y Bailebuff (2010), Pérez, Jimeno y Cerdá (2004), y Binmore (1994) representan exposiciones que si bien tienen un enfoque más técnico,

son accesibles para un lector con conocimientos universitarios de matemáticas y economía; para aquellos lectores más interesados en los formalismos remitimos a Fudenberg (1991), Vega-Redondo (2003), Tirole (2006) y los *handbooks* de Aumann y Hart (1992, 1994 y 2002); en cuanto a los libros de texto editados en Colombia, y que presentan un enfoque técnico, resaltamos los de Monsalve y Arévalo (2005), y Özak (2006). Todas esas publicaciones son consideradas fundamentales y abordadas por especialistas en la materia. Por lo tanto, esta obra constituye un aporte que les permite a los actuales y futuros gerentes acercarse a la aplicación de la teoría de juegos en la toma de decisiones, sin necesidad de tener un conocimiento profundo matemático o económico, pero sin desconocer tampoco los elementos fundamentales de esas disciplinas, así como las limitaciones de esta teoría en la solución de problemas concretos en el ámbito gerencial.

Cada capítulo presenta una breve introducción teórica acerca de las distintas categorías de juegos que se van a estudiar, luego se analizan juegos abstractos (sin historias) para entender los conceptos presentados, posteriormente se abordan aplicaciones (juegos con historias) donde se busca enfrentar al lector a situaciones de la vida cotidiana que pueden ser analizadas como juegos estratégicos, después se incluyen problemas resueltos con los cuales se busca afianzar los conceptos aprendidos mediante la explicación paso a paso de cómo hallar e interpretar equilibrios y, finalmente, se introducen problemas sugeridos que incluyen tanto juegos abstractos como situaciones reales que deben ser analizados como juegos estratégicos.

Hemos dividido los juegos en dos categorías: juegos estáticos, donde cada jugador no sabe cómo jugó su contrincante, o donde ambos juegan simultáneamente (caps. 1, 2 y 5), y juegos dinámicos, donde los jugadores compiten secuencialmente (caps. 3, 4 y 6).

Dentro de esta categorización estudiamos los juegos de información completa (caps. 1, 2, 3 y 4), en los cuales todos los jugadores tienen la misma información sobre los pagos de su contrincante, y los juegos de información incompleta, donde existe incertidumbre en alguno de los jugadores sobre los pagos de sus adversarios (caps. 5 y 6). Además, incorporamos un capítulo dedicado a las opciones reales, por la trascendencia que pueden tener en la valoración de un proyecto y de oportunidades de inversión que en general agregan valor a las empresas (cap. 7). El último capítulo ofrece una colección de trece minicasos que representan situaciones en contextos reales, donde se busca que el lector utilice las herramientas aprendidas a lo largo del texto.

Teoría de juegos y decisiones gerenciales

Como lo definimos previamente, un juego representa una interacción estratégica entre al menos dos contrapartes. Pero si quisiéramos una definición apropiada de la teoría de juegos podemos remitirnos a los aportes de Martin Shubik, profesor de Princeton University a mediados del siglo pasado. Para Shubik (1955) la teoría de juegos estudia la toma de decisiones en situaciones de conflicto, es decir, situaciones en las cuales una sola persona no tiene el control total de todos los factores que afectan el resultado. El autor ofrece diferentes ejemplos, como el de los generales que dirigen sus ejércitos en una confrontación, los jugadores de póquer, y los políticos que buscan obtener una posición sometándose a elección popular. Todos esos “juegos”, y la toma de decisiones que los subyace, son objeto de estudio en la teoría de juegos.

Shubik sostiene que los problemas que se estudian en esta teoría son más complejos que un simple proceso de maximización. El

jugador, o tomador de decisiones, busca obtener lo máximo que le sea posible, siendo consciente de que los demás persiguen también sus propios objetivos y que sus acciones afectan el resultado final que todos alcanzan; por lo tanto, debe tener en cuenta las posibles acciones y reacciones de los demás actores involucrados en el juego.

Decidimos traer a este texto los aportes de Shubik (1955) porque para él la teoría de juegos tiene una aplicación directa en la toma de decisiones gerenciales; por ejemplo, considera que dos compañías se enfrentan a duelo en diferentes ocasiones, de forma que en aquellos mercados que han alcanzado cierta madurez y cuyo tamaño se ha estabilizado, los nuevos clientes que logra conquistar una empresa implican una pérdida para su competidora, es decir, las firmas son oponentes claros ya que lo que gana una lo pierde la otra. Igual sucede cuando dos refinerías comparten el mismo mercado con una demanda relativamente fija. De acuerdo con Shubik, utilizando juegos más complejos que no son de suma cero, es posible dilucidar la propuesta que debe hacer una empresa que compite contra otros oferentes por contratos que licita el gobierno. Lo anterior, suponiendo que la empresa no cuenta con la capacidad instalada para atender más que un porcentaje de los proyectos, digamos un 30%, por lo que la oferta que hace la empresa debe modelarse para perder aproximadamente el 70% de los contratos debido a un precio menos competitivo que el de sus pares en el mercado.

Ahora bien, según Shubik (1955), las aplicaciones en el mundo empresarial no se limitan exclusivamente a nivel empresa; por ejemplo, al momento de expedir regulaciones relacionadas con la libre competencia, potenciales colusiones entre competidores, creaciones de carteles, y otras prácticas de competencia desleal, es posible modelar el comportamiento de los tomadores de decisiones en cada empresa a partir de la teoría de juegos. De igual manera, dentro de cada empresa, en unidades de análisis más pequeñas, se presentan

situaciones que se pueden examinar a través de la teoría de juegos, tales como el poder de una persona al interior de un comité que le señala un comportamiento o relación no lineal con los votos que controla y las coaliciones que puede llegar a concretar.

Diversos estudios académicos validan la posición clásica de Shubik (1955). Por ejemplo, Saloner (1991) analiza la utilidad de la modelación que se puede realizar a través de la teoría de juegos para la gerencia estratégica; para él una gran cantidad de asuntos relacionados con la estrategia y la competitividad de las empresas puede modelarse y analizarse a través de la teoría de juegos, entre ellos la importancia de las ventajas para quien realiza el primer movimiento, el papel del compromiso estratégico cuidando una participación en el mercado, la construcción de una reputación, la señalización al mercado, y el control estratégico de la información.

Pero no solo las estrategias externas se pueden analizar con esta batería de herramientas. Los tomadores de decisiones pueden apoyarse en la teoría de juegos para resolver asuntos relacionados con la estrategia interna de la empresa, entre ellos los esquemas de incentivos, la integración vertical, la composición de los comités ejecutivos, y la asignación de poder formal a diferentes niveles organizacionales. Saloner hace una aclaración que es totalmente válida para el lector de este texto: los juegos que se plantean alrededor de asuntos estratégicos y gerenciales tienen una limitante representada en la racionalidad de los jugadores o tomadores de decisiones, de forma que la efectividad del uso de la teoría de juegos en el contexto gerencial depende de cuáles sean las expectativas de los ejecutivos respecto del papel de las herramientas que provee esta teoría.

Si se quieren tomar decisiones muy específicas en respuesta a interrogantes tales como cuánta debe ser la capacidad instalada, cómo posicionar un producto y cuánto producir, la teoría de juegos se puede ver desafiada por la dificultad de modelar la racionalidad

del tomador de decisiones. Sin embargo, es posible encontrar diferentes juegos aplicados a la toma de decisiones gerenciales donde el nivel de plausibilidad de las conclusiones no se ve amenazada por la modelación de la racionalidad. En general los juegos proveen intuición, permiten al ejecutivo evidenciar las tensiones, tratar de anticipar la reacción de las contrapartes involucradas y tomar una mejor decisión. Además, para Saloner la teoría de juegos permite a la empresa no solo pensar en maximizar utilidades sino en obtener resultados óptimos en diferentes aspectos, monetarios o no monetarios, que tendrán impacto en su sustentabilidad a largo plazo.

Pulido, Sánchez-Soriano y Llorca (2002) analizan un caso particular que enfrenta la gerencia y que es común en las universidades: las tensiones que enfrentan las directivas cuando asignan recursos financieros para la compra de equipos técnicos destinados a los laboratorios de los diferentes departamentos. El problema particular surge cuando los recursos financieros limitados no logran satisfacer las demandas de los diferentes departamentos, y se hace más severo debido a que las demandas que realizan son altamente subjetivas. Pulido et al. desarrollan en detalle un modelo basado en teoría de juegos que explica el proceso de toma de decisiones que observan en su universidad y que puede servir de soporte para otros tomadores de decisiones.

Un estudio reciente de Peldschus (2008) resalta la importancia y aplicabilidad de la teoría de juegos para la alta gerencia de las empresas dedicadas a la construcción. El autor asegura que ese sector se ve afectado por decisiones complejas que se deben tomar con información incompleta respecto de factores determinantes como la adquisición de maquinaria y herramientas, la implementación de procesos, la contratación de personal y en general, la coordinación de todos esos elementos para alcanzar el mayor resultado posible con los limitados recursos financieros a disposición.

Sin embargo, tales características del proceso de toma de decisiones en ese sector, por demás evidentes, son regularmente ignoradas por los ejecutivos a cargo del despliegue operativo y del desarrollo de la estrategia, por lo que la toma de decisiones se basa en modelos simples que se adaptan parcialmente de acuerdo con las experiencias del equipo de alta gerencia y los resultados de la empresa, pero que no reflejan de manera adecuada la situación a enfrentar. Peldschus asegura que a través de esos métodos se llega a soluciones que se pueden implementar y que son viables, pero que no necesariamente representan la mejor opción para las empresas.

La posibilidad de representar situaciones con diversas tensiones y sus potenciales soluciones permite escoger el comportamiento más favorable entre un conjunto de comportamientos posibles, así el autor presenta soluciones a problemas cotidianos a través de las herramientas ofrecidas por la teoría de juegos.

Podríamos ofrecer ejemplos adicionales, pero con las investigaciones aquí reseñadas es posible resaltar el valor de la teoría de juegos, reconocida en la literatura por más de seis décadas, y su aplicación directa al entorno empresarial, especialmente por aquellos a cargo del proceso de toma de decisiones gerenciales y estratégicas.

Estructura básica de un juego

Veamos un juego clásico conocido como el juego de la guerra fría, e introduzcamos las definiciones básicas para que una situación dada se convierta en un juego, a saber: jugadores, estrategias, pagos y equilibrio.

Considere la situación entre Estados Unidos y la Unión Soviética durante el período 1945-1985. En nuestro contexto cada país representa un jugador y ambos tienen dos posibles estrategias: lanzar un

ataque nuclear (A), o no hacerlo (NA). Si los dos países atacan simultáneamente el resultado sería la destrucción total del mundo; si uno solo ataca, el país atacado quedará totalmente destruido, pero el otro deberá asumir los costos ambientales del ataque, que, supongamos, puede representarse por una cantidad C . En caso de que ninguno de los dos decida atacar, cada uno deberá invertir un monto importante de dinero (I) en armamento nuclear para que le quede claro a su rival que cuenta con suficiente poder destructivo. Supongamos que las inversiones requeridas en armamento son menores que los costos ambientales de un ataque nuclear.

Antes de seguir es importante dejar en claro la diferencia entre acciones y estrategias. En este caso, dado que estamos suponiendo un juego estático donde los dos jugadores juegan simultáneamente, las acciones y las estrategias representan exactamente el mismo conjunto: (A, NA); sin embargo, las acciones representan hechos físicos (qué botón accionar si la decisión es atacar) mientras que las estrategias representan planes sobre qué hacer en determinadas circunstancias. Más adelante, cuando introduzcamos los juegos secuenciales, quedará más clara la diferencia entre acciones y estrategias; por ahora lo importante es entender que las estrategias representan “planes” de acción.

Generalmente la situación planteada se puede representar gráficamente con una matriz como la siguiente:

		U.R.S.S.	
		A	NA
E.E.UU.	A	$(-\text{inf} , -\text{inf})$	$(-C , -\text{inf})$
	NA	$(-\text{inf} , -C)$	$(-I , -I)$

Note que, de acuerdo con lo definido, la matriz representa un juego, ya que claramente se establece quiénes son los jugadores (Estados Unidos y la Unión Soviética), cuáles son sus estrategias (Atacar o No Atacar) y cuáles son los pagos para cada situación posible dentro del juego (p. ej., destrucción total si los dos atacan, lo cual genera un pago de menos infinito ya que los dos países quedan totalmente destruidos).

Por otra parte, cuando se representa un juego en forma de matriz, es una convención usual que el jugador 1 esté a la izquierda (Estados Unidos en este caso) y el jugador 2 en la parte de arriba de la matriz (la Unión Soviética, en este caso). El primer número dentro de cada cuadrante representa el pago² del jugador 1 y el segundo representa el pago del jugador 2 (Pago *Jugador 1*, Pago *Jugador 2*). Por ejemplo, si Estados Unidos decide no atacar mientras que la Unión Soviética sí lo hace, el pago correspondiente a cada jugador sería de menos infinito para el primer jugador dado que queda destruido, y el pago para el jugador que ataca sería el costo ambiental generado por la decisión de atacar ($-\infty$, $-C$).

Este juego permite entender el concepto de equilibrio. Se habrá alcanzado una situación de equilibrio cuando a ninguno de los jugadores le conviene moverse. Otra forma de entenderlo es cuando cada jugador escoge la estrategia óptima dado que sus contrincantes también escogieron sus estrategias óptimas. Como cada uno está optimizando su conjunto de estrategias ninguno querrá salir de esa situación, por lo que en consecuencia se dice que el juego llegó a un equilibrio³.

2 Los pagos son representaciones numéricas de las preferencias de los jugadores, sin entrar a detallar los cálculos que se realizan a partir de las funciones de utilidad de cada uno de los individuos para determinar esos números. La representación numérica puede incluir pagos monetarios y no monetarios que afectan la función de utilidad del individuo o jugador. En lo posible estos beneficios monetarios y no monetarios deben estar representados en pagos, de forma que la solución que se plantee al juego sea cercana a la realidad. Dado el alcance de este texto, dichas representaciones son intuitivas, por lo que no entraremos en los detalles de lo que implica la formulación de la función de utilidad de los individuos y el proceso matemático para la maximización de la misma. Para el lector interesado sugerimos consultar los textos mencionados en la sección anterior.

3 Para una definición formal del concepto de equilibrio consultar Rasmussen (2007).

Veamos si el juego de la guerra fría llega a un equilibrio. Para hacerlo cada jugador supone las distintas estrategias de su contrincante y trata, dado su propio conjunto de estrategias, de escoger aquellas que maximicen su pago. Note que los jugadores no están tratando de “ganar el juego” sino de “maximizar sus pagos”.

Por ejemplo, para el caso del juego de la guerra fría, ¿cuál será la estrategia óptima de la Unión Soviética si Estados Unidos ataca? Utilizando la matriz de pagos encontramos lo siguiente:

		U.R.S.S.	
		A	NA
E.E.UU.	A	$(-\text{inf}, -\text{inf})$	$(-C, -\text{inf})$
	NA	$(-\text{inf}, -C)$	$(-I, -I)$

En este caso para la Unión Soviética es indiferente atacar o no atacar debido a que de todas formas quedará totalmente destruida. Supongamos que en caso de “empate” se toma la decisión de atacar también. ¿Qué hará la Unión Soviética si Estados Unidos decide no atacar? Utilizando la matriz de pagos encontramos lo siguiente:

		U.R.S.S.	
		A	NA
E.E.UU.	A	$(-\text{inf}, -\text{inf})$	$(-C, -\text{inf})$
	NA	$(-\text{inf}, -C)$	$(-I, -I)$

Note que en esta situación la Unión Soviética debe comparar entre los costos ambientales de atacar a Estados Unidos versus las inversiones requeridas en armamento. Como hemos supuesto que C es mayor que I , entonces la Unión Soviética decide, maximizando sus pagos, no atacar.

El mismo análisis lo hacemos análogamente para el caso en que Estados Unidos debe decidir qué hacer dadas las distintas estrategias de la Unión Soviética, tal como se muestra en la siguiente matriz:

		U.R.S.S.	
		A	NA
E.E.UU.	A	$(-\text{inf}, -\text{inf})$	$(-C, -\text{inf})$
	NA	$(-\text{inf}, -C)$	$(-I, -I)$

Si la Unión Soviética decide atacar, para Estados Unidos es indiferente llevar a cabo cualquier estrategia dado que sus pagos serían los mismos.

		U.R.S.S.	
		A	NA
E.E.UU.	A	$(-\text{inf}, -\text{inf})$	$(-C, -\text{inf})$
	NA	$(-\text{inf}, -C)$	$(-I, -I)$

Pero si la Unión Soviética decide no atacar, Estados Unidos desarrollará un análisis relacionado con la maximización de sus pagos. Bajo el supuesto de que la inversión realizada en armamento nuclear sea inferior al costo ambiental que genera la destrucción del país, Estados Unidos decidirá igualmente no atacar.

Note que luego de hacer las respectivas comparaciones de pagos para cada uno de los jugadores dadas las posibles estrategias de su contrincante, llegamos al cuadrante (-I, -I) donde ninguno de los jugadores ataca y los dos prefieren invertir en armamento nuclear:

		U.R.S.S.	
		A	NA
EE.UU.	A	$(-\text{inf} , -\text{inf})$	$(-C , -\text{inf})$
	NA	$(-\text{inf} , -C)$	$(-I , -I)$

A ese equilibrio se le llamó “guerra fría”.

Mucho de lo que se hace en este libro es justamente buscar e interpretar equilibrios, es decir, encontrar interacciones estratégicas que conduzcan a situaciones donde ninguno de los jugadores tenga incentivos para desviarse, es decir, situaciones de equilibrio.

Otro concepto importante que se desprende del juego de la guerra fría es el de *common knowledge*. Tanto Estados Unidos como la Unión Soviética entienden el juego (jugadores, estrategias y pagos), y cada uno entiende que el otro entiende. Ese es un concepto complejo cuando pensamos en más de dos jugadores, pero básicamente

lo importante es que todos saben cuál es la estructura del juego, y cada uno sabe que los otros también lo saben⁴.

Igualmente, es importante resaltar en este juego el concepto de racionalidad. La teoría de juegos supone una de dos cosas: los jugadores son racionales, entendiendo la racionalidad como estrategias consistentes con las preferencias de cada jugador, o los jugadores aprenden si el juego se repite varias veces. Si jugamos un número de veces suficientemente grande el juego planteado al inicio del libro (colocar un número en un papel que represente el promedio dividido entre 2), eventualmente todos terminaremos por colocar el número 1 y ese será el equilibrio del juego.

Juegos estáticos de información completa y equilibrios

Introduzcamos un tipo especial de juegos que llamaremos juegos estáticos de información completa. En ellos los contrincantes se mueven una sola vez de forma simultánea (o cuando se mueven no saben cómo se ha movido su contraparte) y, además, existe completa información respecto de los pagos de cada jugador.

La primera pregunta es cómo encontrar equilibrios una vez definido formalmente un juego (es decir, cuando conocemos cuáles son los jugadores, las estrategias y los pagos). Considere el siguiente juego abstracto, que llamaremos juego abstracto 1:

4 Para una definición formal del concepto de *common knowledge* consultar Rasmussen (2007).

		Luis		
		L1	L2	L3
Daniel	D1	(2 , 12)	(1 , 10)	(1, 11)
	D2	(0 , 12)	(0 , 10)	(0 , 11)
	D3	(0 , 12)	(0 , 10)	(0 , 13)

Recordando que el primer número de cada cuadrante es el pago de Daniel (*Jugador 1*) y el segundo el de Luis (*Jugador 2*), notamos que Luis, independientemente de lo que haga Daniel, nunca jugará la estrategia L_2 . ¿Por qué?: si Daniel juega D_1 Luis jugará L_1 ya que el pago de 12 es mayor que el pago de 10 si juega L_2 , y mayor que el pago de 11 si juega L_3 . Igualmente, si Daniel juega D_2 , tampoco será óptimo para Luis jugar L_2 ya que el pago sería de 12 si juega L_1 o de 11 si juega L_3 lo cual es mejor que el pago que obtendría jugando L_2 . Un análisis similar lleva a Luis a descartar jugar L_2 cuando Daniel juega D_3 . Por lo tanto, como en ninguna circunstancia es óptimo para Luis jugar L_2 descartamos esa estrategia, tal como se muestra en la siguiente matriz:

		Luis		
		L1	L2	L3
Daniel	D1	(2 , 12)		(1, 11)
	D2	(0 , 12)		(0 , 11)
	D3	(0 , 12)		(0 , 13)

La estrategia L_2 se dice que está “estrictamente dominada” por las estrategias L_1 y L_3 . Como estamos suponiendo *common knowledge*, Daniel sabe que Luis nunca jugará la estrategia L_2 independientemente de lo que él haga, y por lo tanto los dos jugadores están viendo exactamente la misma matriz (información completa).

Ahora bien, note que las estrategias D_2 y D_3 están estrictamente dominadas por la estrategia D_1 ; es decir, Daniel nunca jugará D_2 o D_3 ya que en ambos casos obtendría un pago de 0 mientras que jugando la estrategia D_1 obtendría un pago de 2 o de 1 dependiendo de lo que haga Luis. Eliminado las estrategias estrictamente dominadas de Daniel, la matriz del juego sería:

		Luis		
		L1	L2	L3
Daniel	D1	(2 , 12)		(1, 11)
	D2			
	D3			

Luis sabe que Daniel solo jugará D_1 por lo tanto él decide jugar L_1 ya que L_3 sería también una estrategia estrictamente dominada (por L_1). Note que el par de estrategias (D_1, L_1) son las únicas sobrevivientes del proceso de eliminación y, en consecuencia, es el único equilibrio del juego. A este procedimiento se le conoce como Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas (EIED).

		Luis		
		L1	L2	L3
Daniel	D1	(2 , 12)		
	D2			
	D3			

¿Cómo sabremos si hemos llegado a un equilibrio? Porque ninguno de los jugadores tiene incentivos para desviarse de (D_1, L_1) debido a que cualquier otra combinación de estrategias le generaría a cada uno un menor pago.

El problema con este método es que no en todos los juegos sobrevive una única combinación de estrategias.

Considere el siguiente juego, que llamaremos juego abstracto 2:

		Luis		
		L1	L2	L3
Daniel	D1	(2 , 12)	(2 , 10)	(1, 12)
	D2	(0 , 12)	(1 , 15)	(3 , 11)
	D3	(3 , 12)	(0 , 10)	(3 , 13)

Note que en este juego no existen estrategias que se puedan eliminar bajo el procedimiento de EIED. Cada una de las estrategias de Daniel genera una respuesta distinta para Luis, por lo que Luis no puede descartar *a priori* ninguna de sus estrategias. Por otro lado, Daniel tampoco puede descartar ninguna de sus estrategias ya que cada una de ellas representa una respuesta óptima para cada posible estrategia de Luis. Una forma usual que ayuda a saber cuál es la “mejor respuesta” ante las estrategias de los oponentes es evaluar cada estrategia y subrayar el pago más alto. Por lo tanto, si Daniel juega la estrategia D_1 , ¿cuál es la mejor respuesta para Luis? Como

se muestra abajo, Luis sería indiferente entre jugar la estrategia L_1 o L_3 ya que ambas le generan un pago de 12.

		Luis		
		L1	L2	L3
Daniel	D1	(2 , <u>12</u>)	(2 , 10)	(1, <u>12</u>)
	D2	(0 , 12)	(1 , 15)	(3 , 11)
	D3	(3 , 12)	(0 , 10)	(3 , 13)

Si Daniel juega D_2 , entonces la mejor respuesta de Luis es jugar L_2 y, en consecuencia, subrayamos el número 15 que representa el pago para Luis de jugar L_2 , como se muestra abajo.

		Luis		
		L1	L2	L3
Daniel	D1	(2 , <u>12</u>)	(2 , 10)	(1, <u>12</u>)
	D2	(0 , 12)	(1 , <u>15</u>)	(3 , 11)
	D3	(3 , 12)	(0 , 10)	(3 , 13)

Procedemos de igual manera para el caso en donde Daniel juega D_3 :

		Luis		
		L1	L2	L3
Daniel	D1	(2 , <u>12</u>)	(2 , 10)	(1, <u>12</u>)
	D2	(0 , 12)	(1 , <u>15</u>)	(3 , 11)
	D3	(3 , 12)	(0 , 10)	(3 , <u>13</u>)

Si realizamos exactamente el mismo procedimiento, pero esta vez evaluando las estrategias que generan la “mejor respuesta” para Daniel, dadas las estrategias de Luis, obtendríamos la matriz que se muestra abajo:

		Luis		
		L1	L2	L3
Daniel	D1	(2 , <u>12</u>)	(<u>2</u> , 10)	(1, <u>12</u>)
	D2	(0 , 12)	(1 , <u>15</u>)	(<u>3</u> , 11)
	D3	(<u>3</u> , 12)	(0 , 10)	(<u>3</u> , <u>13</u>)

Entonces, ¿cómo saber cuál es el equilibrio de un juego donde no se pueda eliminar ninguna estrategia? Para ello necesitamos un nuevo concepto de equilibrio: equilibrio de Nash (EN)⁵.

Ese concepto se basa en una idea muy sencilla: estaremos en un EN si cada jugador juega su mejor estrategia (la que le brinda mayores pagos) suponiendo que los demás jugadores están haciendo justamente lo mismo⁶.

Al igual que antes, si estamos en un EN ningún jugador tendrá incentivos para moverse, lo cual es una condición necesaria para que un equilibrio sea considerado un EN. Tenga en cuenta de nuevo esta definición para el caso del juego abstracto 2 que acabamos de analizar. A pesar de que no existen estrategias estrictamente dominadas, sí hay un EN: Daniel juega D_3 y Luis juega L_3 , el cual usualmente lo representaremos como (D_3, L_3) . Note que justamente en ese cuadrante es donde aparecen los dos pagos subrayados de acuerdo con el procedimiento descrito anteriormente.

		Luis		
		L1	L2	L3
Daniel	D1	(2 , 12)	(2 , 10)	(1, 12)
	D2	(0 , 12)	(1 , 15)	(3 , 11)
	D3	(3 , 12)	(0 , 10)	(3 , 13)

Estrategia de equilibrio (Equilibrio de Nash): (D_3, L_3)

5 En honor a John Nash que se hizo famoso, no tanto por ganar el premio Nobel de Economía en 1994, sino porque lo representó Russell Crowe en la película “A Beautiful Mind”, la cual ganó varios premios Oscar.

6 Para una definición formal de Equilibrio de Nash consultar Gibbons (1992).

Cuando encontramos uno y solo un EN, podemos estar seguros que este será el desenlace del juego, como en el caso del juego de la guerra fría; sin embargo, no siempre hay un EN, inclusive podemos encontrar juegos con múltiples EN o juegos de estrategias puras sin EN (más adelante distinguiremos entre el concepto de estrategias puras y estrategias mixtas).

Considere el siguiente juego abstracto 3:

		Luis	
		L1	L2
Daniel	D1	(2 , 8)	(-7 , 0)
	D2	(0 , -7)	(8 , 2)

En este juego se puede mostrar que tiene dos EN siguiendo el procedimiento de subrayar los pagos de las estrategias óptimas de cada jugador.

		Luis	
		L1	L2
Daniel	D1	(<u>2</u> , <u>8</u>)	(-7 , 0)
	D2	(0 , -7)	(<u>8</u> , <u>2</u>)

Piense que en cada uno de los equilibrios encontrados ninguno de los jugadores tiene incentivos para desviarse. Es claro que Luis prefiere el equilibrio (D_1, L_1) porque obtiene un pago de 8 contra 2 si el juego llega al equilibrio (D_2, L_2) . Lo contrario ocurriría con Daniel, que prefiere (D_2, L_2) a (D_1, L_1) ya que 8 es mayor que 2. Ahora bien, independientemente de las preferencias de cada uno de los jugadores, si se llega a (D_1, L_1) o a (D_2, L_2) ninguno tendría incentivos para moverse ya que si lo hacen su pago disminuiría.

Considere ahora el juego abstracto 4:

		Luis	
		L1	L2
Daniel	D1	(1 , -1)	(-1 , 1)
	D2	(-1 , 1)	(1 , -1)

En este caso podemos observar que al seguir el procedimiento de subrayar los mayores pagos para cada una de las estrategias no encontramos ningún cuadrante con sus dos pagos subrayados.

		Luis	
		L1	L2
Daniel	D1	(<u>1</u> , -1)	(-1 , <u>1</u>)
	D2	(-1 , <u>1</u>)	(<u>1</u> , -1)

Es decir, en este juego no existe EN ya que para cualquier par de estrategias siempre habrá algún jugador que tiene incentivos para moverse contradiciendo la condición de equilibrio del juego. Luego veremos que este juego sí tiene EN pero en estrategias mixtas, concepto que, como dijimos, definiremos más adelante.

JUEGOS BÁSICOS

Juegos de coordinación

Puesto que ya sabemos encontrar EN estudiemos ahora cuatro juegos básicos, en el sentido de que son los juegos más simples que se pueden encontrar en una interacción estratégica⁷; son muy importantes porque aparecen en muchas aplicaciones más complejas en el mundo real y siempre tendrán una estructura basada en dos jugadores con dos estrategias.

A los primeros los llamaremos *juegos de coordinación*. Estos juegos son útiles sobre todo cuando tenemos múltiples equilibrios de Nash. Considere el siguiente contexto: dos empresas chinas de hardware están considerando preinstalar el sistema operativo Windows o el sistema operativo Linux. Es claro que ambas empresas lograrán mejores resultados adaptando el mismo sistema operativo debido a las economías de escala que esto generaría.

7 Para la formalización de estas ideas ver Rasmussen (2007).

Considere la siguiente matriz de pagos:

		Yan	
		W	L
Yin	W	(3 , 3)	(-1 , -1)
	L	(-1 , -1)	(1 , 1)

A pesar de la simplicidad del juego, note que estamos suponiendo dos cosas importantes: 1. Que ambos jugadores entienden el juego exactamente y están conscientes de los pagos (*common knowledge*), y 2. Que ambos son racionales y que ninguno “se equivoca” eligiendo el sistema operativo. Igualmente, note que lo único que nos interesa de los pagos es su orden, es decir, que 3 es mayor que 1 y que 1 es mayor que -1, pero en sí los pagos solo sirven para ordenar las preferencias de los jugadores.

¿Cuál es el desenlace de este juego? Siguiendo el procedimiento usual tendremos dos equilibrios:

		Yan	
		W	L
Yin	W	(3 , 3)	(-1 , -1)
	L	(-1 , -1)	(1 , 1)

Observe que (L, L) es un equilibrio porque estando en ese cuadrante ninguno de los jugadores tendría incentivos para desviarse; por ejemplo, si la empresa Yin se desvía, en vez de recibir 1 instalando el sistema Linux obtendría -1 instalando el sistema Windows. Ahora bien, es claro que (W, W) es un “mejor” equilibrio para ambas empresas por lo que se podría suponer que el desenlace del juego sería las dos empresas instalando el sistema Windows.

Juegos “chicken games”

El segundo grupo de juegos básicos se denomina *chicken games* y representa situaciones justamente contrarias a los juegos de coordinación⁸.

Considere la siguiente matriz de pagos para dos empresas que quieren entrar en un mercado cuyo tamaño solo permite que una de las dos subsista rentablemente.

		Empresa B	
		E	NE
Empresa A	E	(0 , 0)	(3 , 1)
	NE	(1 , 3)	(2 , 2)

8 Este nombre viene de los “juegos” que hacían (y siguen haciendo) algunos jóvenes suicidas donde los dos se aproximan en vehículos a alta velocidad y el primero que gire para no chocar de frente es el perdedor (el *chicken* o la gallina, o el cobarde).

Note que otra vez en este caso los números que aparecen en la matriz solo nos interesan para ordenar las preferencias, las cuales pueden representar diferentes aspectos como las utilidades de la empresa, el precio de la acción o cualquier medida de rentabilidad, pero lo importante para analizar esta situación como un juego estratégico es que 3 es mayor que 2 y 2 mayor que 1, etc.

El procedimiento tradicional para encontrar los equilibrios nos lleva a la siguiente situación:

		Empresa B	
		E	NE
Empresa A	E	(0 , 0)	(3 , 1)
	NE	(1 , 3)	(2 , 2)

En este tipo de situaciones no es claro cuál será el resultado del juego ya que las dos empresas tratarán de forzar el equilibrio que más les favorezca. Más adelante veremos que en situaciones como esta las promesas, los compromisos o las amenazas creíbles pueden ser factores clave para predecir el desenlace.

Por ejemplo, en el contexto de este caso la empresa A puede decirle a la empresa B que ya compró las maquinarias requeridas para servir el mercado, por lo que ella sin duda entrará. Si esa afirmación de la empresa A es creíble para B, entonces será mejor para la empresa B no competir, por lo cual la afirmación de A de alguna manera habrá forzado el juego hacia el equilibrio (E, NE). Ahora bien,

si la afirmación (que puede ser una promesa, un compromiso o una amenaza) no es creíble, entonces no es posible hacer predicciones concretas con respecto al desenlace del juego. De manera general, en este tipo de juegos, la decisión de cada jugador depende de la estrategia del otro y cada uno tenderá a realizar exactamente lo contrario a lo que haga su contrincante.

Juegos “batalla de los sexos”

El tercer grupo de juegos básicos se conoce como *batalla de los sexos*. En el contexto original de este juego una pareja quiere ir a un evento que puede ser un concierto de música barroca o una pelea de boxeo, etc.; sin favorecer preferencias de género supongamos que ÉL prefiere la pelea y ELLA el concierto. Ahora bien, ambos valoran mucho estar juntos inclusive en el evento que no es de su preferencia. La siguiente matriz de pagos muestra esta situación:

		Ella	
		P	C
Él	P	(3 , 2)	(1 , 1)
	C	(0 , 0)	(2 , 3)

¿Cuál es el equilibrio de este juego? Difícil saberlo sin más información. Es fácil comprobar que este juego tiene también dos EN:

		Ella	
		P	C
Él	P	(3 , 2)	(1 , 1)
	C	(0 , 0)	(2 , 3)

Pero es difícil predecir cuál sería el desenlace de juego, es decir, cuál de los equilibrios sería el más probable. Para este tipo de juegos es importante el concepto de punto focal⁹ (*Schelling point*). Imagine que no se pusieron de acuerdo pero ella notó que él salió de casa con la gorra que siempre lleva cuando va a ver las peleas. En ese caso lo más probable es que el punto focal del juego sea la pelea y el resultado del juego se mueva hacia ese equilibrio. Por otro lado, suponga que él notó que ella salió con una ropa muy formal parecida a la que siempre lleva cuando van a los conciertos. En ese caso seguramente el punto focal será el concierto. Thomas Schelling fue el primero que habló de este tema y ganó el premio Nobel de economía en el año 2005.

En un programa de la cadena ABC en 2006 se escogieron seis personas desconocidas entre sí con el objetivo de encontrarse en algún lugar en New York (NY) sin la posibilidad de comunicarse. NY tiene cerca de diez millones de habitantes lo cual hace prácticamente imposible esa misión. Sin embargo, ¡las seis personas se encontraron!: tres en el *Time Square* y tres en el edificio *Empire State* al medio día. Tanto la hora como los sitios representan puntos focales en NY.

9 Para una exposición completa sobre este concepto consultar Rasmussen (2007).

Juegos “el dilema del prisionero”

El cuarto juego básico, y quizá el más importante de todos por sus aplicaciones en el mundo real, es *el dilema del prisionero*. El argumento original del juego es el siguiente: dos personas han sido arrestadas bajo la sospecha de haber cometido un robo, supongamos que esas personas son Daniel y Luis. Si ninguno confiesa el delito, cada uno debe pagar dos años en prisión, que es el tiempo que tardan las investigaciones pertinentes. Si ambos confiesan el delito, el juez les impone una pena de nueve años de prisión; ahora, si uno confiesa el delito y el otro no, al que confesó se le da una pena de un año mientras que al otro lo dejan quince años en la cárcel (nueve por el delito y seis por tratar de evadir la justicia).

La matriz de pagos de este juego es la siguiente:

		Luis	
		NC	C
Daniel	NC	(-2 , -2)	(-15 , -1)
	C	(-1 , -15)	(-9 , -9)

El equilibrio de Nash de este juego es el peor de todos los escenarios para los prisioneros. Ya que tal como se muestra a continuación, existe un solo EN:

		Luis	
		NC	C
Daniel	NC	(-2 , -2)	(-15 , <u>-1</u>)
	C	(<u>-1</u> , -15)	(<u>-9</u> , <u>-9</u>)

Como solo existe un y solo un EN, ese sin duda será el desenlace del juego, ya que ninguno tendría incentivos para desviarse. Por ejemplo, si los dos jugadores están en el cuadrante (C, C), y uno de ellos, digamos Daniel, decide desviarse, es decir NC, entonces Luis saldría libre (pago de -1 que es mejor que el pago de -9) y Daniel no pagaría nueve años de cárcel como antes, sino quince. Claramente, a Daniel no le conviene desviarse del equilibrio y por simetría, a Luis tampoco.

¿Qué pasaría si ellos pudieran comunicarse? Note que el mejor desenlace del juego es cuando ninguno confiesa, ya que ambos pagarían dos años de prisión y no nueve como indica el EN. Pero si Daniel promete no confesar, ¿Luis cumplirá su promesa de tampoco confesar? No, ya que, si Daniel no confiesa y Luis sí, entonces en vez de dos años de cárcel pagaría solo uno por lo que Luis claramente no tiene incentivos para cumplir su promesa. Como estamos suponiendo *common knowledge*, Daniel sabe *ex ante* que Luis no cumplirá por lo que tampoco a él le conviene cumplir su promesa. Por lo tanto, si no hay manera de que las “promesas” sean creíbles inclusive dejando que los dos prisioneros se comuniquen, el equilibrio será el mismo: (C, C).

Este es sin duda uno de los juegos más estudiados en teoría de juegos y es sorprendente la cantidad de situaciones que nos llevan a dilemas del prisionero (ver Aplicación 1).

Aplicaciones

APLICACIÓN 1^[10]

En 1980 la tienda por departamentos Macy's estaba interesada en adquirir Confederated Stores, CS (incluye a Bloomingdale's), cuya acción se estaba transando en el mercado por \$100. Macy's hizo una oferta pública por \$102, condicionada a tener el control (por lo menos 50%) de la empresa.

Es claro que la estrategia “vender a Macy's” es dominante ya que si el 50% de los accionistas venden se obtiene una ganancia de 2 y si no se llega a ese valor se obtiene una ganancia de 0. Ahora bien, en los ochenta existían muchos “tiburones corporativos” buscando hacer adquisiciones hostiles de acciones. Uno de ellos era Robert Campeau, un especialista en estas operaciones con un amplio conocimiento de teoría de juegos.

El Sr. Campeau hizo la siguiente oferta a los accionistas de CS (*two-tier offer*): pagar \$105 a los accionistas que vendieran hasta llegar al 50% y pagar \$90 al resto. Todo el dinero recolectado se dividía entre el número de acciones recibidas y se entregaba un cheque a cada accionista.

10 Adaptado de Loomis (1990).

Es decir, si un accionista vendía le entregaba la acción a Campeau y él ponía los \$105 en una cuenta... y así para todos los accionistas hasta llegar al 50%; el siguiente accionista que entregara la acción a Campeau hacía que este depositara \$90 en esa misma cuenta. Cuando terminó la operación, Campeau dividió el dinero que tenía en la cuenta y pagó a todos los accionistas que le vendieron la misma cantidad de dinero.

Podían ocurrir varias cosas:

- 1) *Campeau no llegó a tener el 50% de las acciones.* En ese caso, cada accionista que vendió recibió \$105 (ya que él depositó en la cuenta \$105 por todas las acciones que recibió, hasta el 50%).
- 2) *Campeau obtuvo el 100% de las acciones.* En ese caso, cada accionista que vendió recibió \$97,5 ($= \$105 * 50\% + \$90 * 50\%$). En ese caso hubo accionistas que le entregaron la acción esperando recibir \$105, pero como todos vendieron terminaron recibiendo solo \$97,5.
- 3) *Campeau superó el 50%, pero no llegó al 100%.* En ese caso, cada accionista recibió un monto entre \$97,5 y \$105.

Por otro lado, en ese tipo de compras hostiles los accionistas que no venden su participación accionaria, pero el control de la firma es obtenido por uno de esos tiburones (es decir, se obtiene más del 50% pero menos del 100%), corren el riesgo de que la firma se haga privada (se salga de la bolsa) y reciban el menor valor del *two-tier offer*, en este caso \$90.

Si usted fuera accionista de CS, ¿qué haría? Seguramente vendería a Campeau y terminaría obteniendo \$97,5 por una acción que vale \$100 ¡y que Macy's le había ofrecido en \$102! ¿Cómo podemos explicar esta aparente locura? No necesariamente es una "locura": lo que ocurre es que el Sr. Campeau nos introdujo dentro de un dilema del prisionero. Veamos:

Suponga que usted tiene una acción de CS y está decidiendo qué hacer...; tiene tres posibilidades:

1. Si Macy's logra obtener el 50% quiere decir que Campeau tiene menos del 50%. En ese caso es mejor vender su acción a Campeau ya que él ofrece \$105 mientras que Macy's ofrece \$102.
2. Si Macy's no logra obtener el 50% quiere decir que Campeau tiene más del 50%. En ese caso, si vende termina obteniendo \$97,5 pero si no, corre el riesgo de que la empresa salga de la bolsa y termine con una acción que valdría \$90. Vende la acción a Campeau.
3. Ni Macy's ni Campeau tienen la mayoría. En ese caso Macy's no le compra (ya que solo pagará \$102 si obtiene más del 50%), por lo tanto, si vende a Campeau recibe \$105 mientras que si no vende se queda con la acción que vale \$100.

Note que el equilibrio de Nash de este juego es que todos los accionistas le venden a Campeau y terminan recibiendo \$97,5 por acción, ¡lo cual fue justamente lo que ocurrió! (en su portada la revista *Fortune* lo definió como el negocio más

insólito de la década). Pero simplemente era el resultado natural de un “dilema del prisionero”.

En la aplicación anterior una determinada situación nos introdujo en un dilema del prisionero. Ahora veamos otra donde una ley, que en principio desfavorece a un grupo de empresas, termina por favorecerlas porque las saca de un “dilema del prisionero”.

APLICACIÓN 2

Existen mercados para los cuales la publicidad en televisión está prohibida¹¹. Suponga dos empresas, A y B. Si cada una invierte \$500 millones en publicidad su mercado aumenta 5%; ahora bien, si una de ellas invierte esa cantidad en publicidad y la otra no lo hace, además del 5% de incremento de nuevos clientes obtiene el 80% del nuevo mercado.

Si suponemos que el mercado tiene un tamaño de \$3.000 millones podemos analizar la siguiente matriz de pagos:

		Empresa B	
		I	NI
Empresa A	I	(1.150 , 1.150)	(2.020 , 630)
	NI	(630 , 2.020)	(1.500 , 1.500)

11 Puede ser el caso de empresas que comercializan bebidas alcohólicas o tabacaleras.

Si las dos empresas invierten en publicidad el mercado total crece 10% (5% por la inversión de cada una), es decir, las dos empresas se reparten ahora un mercado de 3.300 millones, lo cual significa, suponiendo que se dividan el mercado en partes iguales, que cada una obtiene \$1.150 millones, después de descontar la inversión. Si una de ellas no invierte, pero la otra sí, el mercado crece 5% (gracias a la inversión de una de ellas) pero la que invirtió obtiene el 80% del mercado. Así, si el mercado es de \$3.150 millones y se obtiene el 80%, entonces la que invierte recibe \$2.020 millones y la que no solo \$630 (= 3.150-2.020). Ahora bien, si ninguna invierte cada una recibe 1.500 millones que es el mejor de los escenarios, pero no un equilibrio de Nash. ¡Otra vez el dilema del prisionero! Tal y como se muestra abajo:

		Empresa B	
		I	NI
Empresa A	I	(<u>1.150</u> , <u>1.150</u>)	(<u>2.020</u> , 630)
	NI	(630 , <u>2.020</u>)	(1.500 , 1.500)

Sin embargo, en este caso la prohibición de hacer propaganda les permite “salir” del dilema del prisionero. Noten que esa es una solución óptima porque ambas ganan: las empresas ganan más (\$1.500 versus \$1.150) y el mercado se mantiene en 3.000.

APLICACIÓN 3

Considere un constructor que está solicitando un permiso para una determinada obra. El representante de la oficina de gobierno puede, según su criterio, evaluar la solicitud en sesenta días; sin embargo, si logra “ponerse de acuerdo” con el constructor la solicitud puede ser aprobada en siete *días*.

Suponga que el constructor no ofrece ningún “incentivo” para acelerar el proceso y el representante tampoco solicita ninguno (los dos actúan de forma honesta). En ese caso el primero recibe un pago de 3 y el segundo un pago de 1. Por el contrario, si los dos actúan de forma corrupta, el constructor recibe un pago de 1 mientras que el representante del gobierno recibe un pago de 3.

En caso de que el constructor no ofrezca soborno alguno y el representante del gobierno exija un pago para acelerar el proceso, el constructor puede denunciarlo y el representante obtiene un pago de -2; sin embargo, el costo de hacer esta denuncia, y dado que el constructor debe solicitar permisos en el futuro, genera para él un pago de 0.

Por otro lado, si el constructor ofrece un soborno, pero el representante es honesto y denuncia ante las autoridades ese hecho, produce un pago para el constructor de -2, pero dada la presión que debe soportar en el proceso de probar el intento de soborno genera para él un pago de cero. Con la información obtenida se podría interpretar esta interacción como un juego estratégico, de la siguiente manera:

		Representante	
		Honesto	Corrupto
Constructor	Honesto	(3 , 1)	(0 , -2)
	Corrupto	(-2 , 0)	(1 , 3)

Es claro que existen dos equilibrios de Nash en esta interacción entre el constructor y el representante:

		Representante	
		Honesto	Corrupto
Constructor	Honesto	(3 , 1)	(0 , -2)
	Corrupto	(-2 , 0)	(1 , 3)

Este es un típico juego al estilo “batalla de los sexos” donde existen dos equilibrios, uno más favorable que el otro, para cada jugador.

Siempre que exista más de un equilibrio será difícil predecir el desenlace. Allí es importante tener en cuenta otras variables del contexto donde se realiza el juego. Por ejemplo, si tuviera que “predecir” el desenlace si el juego se desarrolla en algún país latinoamericano, ¿cuál cree usted que sería? O,

por el contrario, si esa interacción se diera en algún país nórdico, ¿cuál sería su respuesta? Note que en esos dos contextos el punto focal del juego es distinto. Más aún: entendiendo que gran parte del interés en analizar situaciones como juegos estratégicos no se limita a hallar los equilibrios sino también a forzar los equilibrios deseados, ¿cómo se podría obtener el equilibrio (Honesto, Honesto)?

APLICACIÓN 4^[12]

El Salvador y Costa Rica tienen muchas cosas en común, por ejemplo, ambos países fueron colonizados por los españoles, tienen poblaciones y dimensiones territoriales similares, comparten la misma religión y la exportación de café es su principal *commodity*; sin embargo, son muy distintos en cuanto al desarrollo de su economía política.

Esa diferencia se debe, entre otras cosas, a la distribución de la tierra y los derechos de propiedad. Los primeros colonizadores de Costa Rica, que la llamaron así porque creyeron que era “rica” en oro, tuvieron que concentrarse en la agricultura. La precaria población nativa murió de enfermedades traídas por los españoles por lo que la esclavitud fue prácticamente inexistente. Como la mano de obra agrícola era relativamente escasa, los colonizadores tuvieron que trabajar su propia tierra; además, los orígenes de esos colonizadores españoles eran más humildes que los de quienes colonizaron otras partes de Centro América.

12 Esta aplicación está motivada en Wydick (2010).

Por contraste, la tierra en el Salvador era propiedad de la Corona española, la cual la entregó a un grupo de catorce familias que se dedicaron a sembrar extensas plantaciones y a esclavizar gran parte de la población nativa, además de “comprar” esclavos africanos.

Considere un juego entre un campesino y un terrateniente: el campesino puede trabajar la tierra y vivir en ella o, por el contrario, puede irse a trabajar a otro lado; por su parte, el terrateniente puede explotar la tierra o irse a otro lado. Si el terrateniente y el campesino deciden permanecer en el mismo espacio, eventualmente habrá guerra entre ellos lo cual generará un pago de -10 para ambos. Si cada uno decide irse a otro lado, el pago será de 0 para ambos.

Ahora bien, si el terrateniente se queda y el campesino se va, sus pagos serán de 5 y -5, respectivamente. Por el contrario, si el terrateniente decide irse y el campesino se queda en la tierra los pagos serán de -5 y 5, respectivamente.

Con esta información se podría considerar el siguiente juego entre el campesino y el terrateniente.

		Terrateniente	
		Quedarse	Irse
Campesino	Quedarse	(-10 , -10)	(5 , -5)
	Irse	(-5 , 5)	(0 , 0)

Y claramente se pueden observar los dos equilibrios de Nash de esta interacción.

		Terrateniente	
		Quedarse	Irse
Campesino	Quedarse	$(-10, -10)$	$(5, -5)$
	Irse	$(-5, 5)$	$(0, 0)$

Donde, como un típico juego *chicken*, los equilibrios resultantes son (Quedarse, Irse) e (Irse, Quedarse).

Es claro que en Costa Rica los “campesinos” se quedaron. Se construyó una sociedad más igualitaria donde la propiedad de la tierra fue distribuida equitativamente, generando un fuerte sistema de derechos de propiedad y una sólida estructura democrática. Por el contrario, en el Salvador se generó una sociedad profundamente desigual, donde los derechos de propiedad de los terratenientes fueron defendidos por medio de una fuerte opresión militar y brutales guerras civiles donde se estima que unas 75 mil personas murieron por causas violentas en los años setenta.

Como se desprende de las cuatro aplicaciones, muchas situaciones se pueden entender mejor si se analizan en términos de juegos, donde, luego de identificar a los jugadores, las estrategias y los pagos, se hallan equilibrios que permiten interpretar la situación y, en consecuencia, tomar mejores decisiones. Es claro que aquí se presentan simplificaciones de la realidad, y que una de las limitaciones más fuertes para la aplicación de la teoría de juegos en la vida cotidiana consiste en establecer los pagos o beneficios monetarios y

no monetarios que cada jugador o contraparte obtiene en las situaciones aquí planteadas. Sin embargo, la lógica subyacente en la cual se centra el análisis sigue siendo la misma.

Terminemos este primer capítulo con el siguiente problema:

PROBLEMA RESUELTO

Suponga que Manuela tiene una gran idea de negocio que requiere una inversión de seis millones y que el valor presente del ingreso esperado es doce millones. Sin embargo, ella solo tiene cuatro millones para invertir. Por otro lado, Santiago también tiene cuatro millones adicionales y le propone a Manuela hacer un *joint venture* donde cada uno invierte tres millones en el proyecto y obtiene un pago igual a la mitad del valor presente de los ingresos totales del negocio (seis millones). Ambos, con su millón adicional, pueden invertir en un portafolio de mercado que genere un ingreso esperado de 1,5 millones. Las órdenes de inversión se entregan de manera simultánea a una fiduciaria encargada de canalizar los recursos al proyecto y al portafolio de mercado. Sin embargo, al recibir las órdenes, la fiduciaria privilegia al inversionista que mayor monto destine al proyecto. Por ejemplo, si Manuela destina cuatro millones al proyecto y Santiago tres, y un millón al portafolio de mercado, la fiduciaria toma los cuatro millones de Manuela y solo dos de Santiago para el proyecto, y queda un millón de recursos ociosos por parte de Santiago sin ninguna rentabilidad. Igual sucede en caso contrario. Un primer cuestionamiento sería el siguiente:

a) *¿Es bueno ese negocio para Manuela y para Santiago?*

Tanto Manuela como Santiago recibirán un pago esperado de 3,5 millones. Siempre y cuando los dos cumplan lo pactado, el proyecto generará tres millones de utilidad para cada uno, mientras que el portafolio de mercado generará 0,5 millones adicionales para cada uno también.

Sin embargo, cada uno tiene incentivos para desviarse: invirtiendo una cantidad adicional de un millón pueden quedarse con dos tercios de los beneficios esperados del *joint venture* (ocho millones) dejando al otro con el tercio restante (cuatro millones). Si uno de los dos hace esa inversión adicional su pago será: $8 - 4 = 4$, mientras que el pago del otro será 1,5, así: $4 - 3 = 1$ del proyecto y $1,5 - 1 = 0,5$ del portafolio.

Ahora bien, si los dos tratan de desviar los recursos hacia el proyecto, dejando dos millones de fondos ociosos en el mismo, el pago de cada uno será: $6 - 4 = 2$.

b) *Plantee esta situación como un juego definiéndolo formalmente (en términos de jugadores, estrategias y pagos).*

c) *¿Cuál es el equilibrio del juego planteado en (b)?*

d) *¿Cuál cree usted que será el desenlace de esta historia?*

e) *¿Qué recomendación le haría a Manuela y a Santiago para que el proyecto se lleve a cabo?*

Solución:

a) *El negocio es evidentemente bueno para ambos porque el Valor Presente Neto (VPN) es 3 para cada uno.*

b) *La forma matricial de ver esta situación es:*

M/S	D	ND
D	(2 , 2)	(4 , 1,5)
ND	(1,5 , 4)	(3,5 , 3,5)

- c) *Es fácil ver que el EN de este juego es [D, D] (¡dilema del prisionero!).*
- d) *Se realizará el negocio, pero los pagos no serán los óptimos.*
- e) *Sería necesario generar una penalización de 0,5 millones como mínimo para el inversionista que incumpla lo pactado.*

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos

PROBLEMA 1

Halle los equilibrios de Nash de los siguientes juegos e identifique qué tipo de juego “básico” representan:

a)

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	A	(0 , 2)	(5 , 4)
	B	(1 , 5)	(0 , 0)

Solución:

EN(A, B) y EN(B, A) – Juego tipo *chicken game*

b)

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	A	(1 , 2)	(6 , 0)
	B	(0 , 8)	(4 , 6)

Solución:

EN(A, A) – Dilema del Prisionero

c)

		Jugador 2		
		A	B	C
Jugador 1	A	(5 , 3)	(3 , -1)	(3 , -5)
	B	(-5 , 6)	(4 , 8)	(4 , 4)
	C	(-6 , 6)	(0 , 8)	(1 , 4)

Solución:

EN(A, A) y EN(B, B) – Batalla de los sexos

PROBLEMA 2

Pedro y María fueron contratados recientemente en una banca de inversión. Su jefe les encomendó, entre otras cosas, hacer un *due diligence* a la empresa X (investigación profunda para fines de adquisición) que deben entregar en un par de días. Pedro es un tipo competente y trabajador; María, sin embargo, es competente pero un poco floja. Ambos saben que necesitarán dedicar por lo menos 20 horas entre los dos para hacer un trabajo excelente, 16 horas para hacer un trabajo bueno, 12 horas para hacer un trabajo mediocre y, si trabajan menos de 12 horas, el resultado será un trabajo pésimo. Tanto Pedro como María definen su dedicación como muy baja cuando trabajan

4 horas, baja cuando trabajan 8 horas, alta cuando trabajan 12 horas y muy alta cuando trabajan 16 horas. Por otro lado, los resultados del *due diligence* lo pueden de alguna manera cuantificar en dinero (bonos, promociones futuras, etc.), pero las apreciaciones de Pedro son diferentes a las de María. Para Pedro un trabajo excelente le reporta 17 millones mientras que a María solo le reporta 7; un trabajo bueno le reporta 10 millones mientras que a María solo le reporta 2 millones; un trabajo mediocre le reporta -5 millones mientras que a María solo le reporta -1; y, por último, un trabajo malo le costará a Pedro -10 millones mientras que a María solo le costará -5 millones.

- a. *Modele esta situación como un juego. ¿Cuál es la tensión del juego?*
- b. *Si cada hora de trabajo les cuesta a Pedro y a María un millón, haga una matriz (Pedro es el jugador 1 y María el jugador 2) donde se muestre la utilidad de cada jugador (ganancias esperadas menos costos de trabajar) para cada nivel de esfuerzo (muy bajo, bajo, alto, muy alto).*
- c. *Si suponemos que cada jugador, ante pagos iguales, prefiere aquella estrategia que implique menos horas de trabajo, ¿cuál o cuáles son los EN en estrategias puras?*

Solución:

$EN(\text{Muy alta, Muy baja}) = (1, 3)$, $EN(\text{Alta, Baja}) = (5, -1)$,
 $EN(\text{Baja, Alta}) = (9, -5)$, $EN(\text{Muy baja, Muy alta}) = (13, -9)$

- d. *¿Cuál cree usted que será el desenlace del juego?*

Solución:

(MA, MB)

PROBLEMA 3

Considere el juego entre los Jugadores 1, 2 y 3 que se muestra abajo. Indique, si existen todos los EN en estrategias puras.

		Jugador 2	
		L	R
Jugador 1	U	(0 , 5 , 7)	(9 , 8 , 12)
	D	(9 , 2 , 5)	(14 , 6 , 7)

Jugador 3 escoge A

		Jugador 2	
		L	R
Jugador 1	U	(8 , 7 , 6)	(5 , 8 , 15)
	D	(0 , 5 , 0)	(6 , 7 , 11)

Jugador 3 escoge B

Solución:
EN(D, R, B).

PROBLEMA 4

Suponga que existen dos jugadores y cada uno puede tomar una de dos acciones: callar o confesar. Cada una de las acciones resulta en un pago para cada uno de los jugadores; si el jugador 1 escoge callar y el 2 confesar, entonces el jugador 2 recibe \$5 y el jugador 1 nada. Si los dos jugadores escogen callar entonces los dos reciben \$3 y si los dos jugadores deciden confesar entonces los dos reciben \$2. Ahora bien, existe una función de utilidad asociada a los pagos de cada jugador, ya que los jugadores no son egoístas sino altruistas. La función de utilidad de cada jugador se representa así:

$$U_i = P_i(e) + \beta P_j(e)$$

En donde $P_i(e)$ es el pago del jugador i cuando se implementa la estrategia e y $P_j(e)$ es el pago del jugador 2 cuando se implementa la estrategia e . Finalmente β es un número positivo.

- a. Modele una matriz de pagos cuando $\beta = 1$. ¿Existe un equilibrio de Nash?
- b. Halle los valores de β para los cuales el juego es un dilema del prisionero.

Solución:

$$2/3 > \beta$$

PROBLEMA 5

Tres personas deben manejar desde el pueblo X hasta el pueblo Y al mismo tiempo y cada uno debe escoger qué camino tomar. Se pueden tomar dos rutas: una pasa por el punto A y otra pasa por el punto B. Los caminos desde X hasta A y desde B hasta Y son exactamente iguales y un carro se demora 10 minutos recorriéndolos; por cada carro adicional que tome ese camino el tiempo de recorrido se incrementa en 5 minutos. Por otro lado, los recorridos (A, Y) y (X, B) son un poco más largos por lo que un carro se demora treinta minutos transitándolos y por cada carro adicional que tome ese camino el tiempo se incrementa en un minuto.

- a. *Formule esta situación con una matriz de pagos.*
- b. *Halle los equilibrios de Nash.*

Solución:

Los equilibrios de Nash están en que no todos los jugadores deciden irse por el mismo camino.

CAPÍTULO 2.

ESTRATEGIAS MIXTAS

En el capítulo 1 se estudiaron los equilibrios basados en estrategias puras, es decir, cuando los jugadores toman una u otra de las estrategias disponibles. Sin embargo, vimos que pueden existir juegos que no tienen equilibrios puros. Consideremos otra vez el juego abstracto estudiado en el capítulo anterior:

		Luis	
		L1	L2
Daniel	D1	(1 , -1)	(-1 , 1)
	D2	(-1 , 1)	(1 , -1)

Como ya se analizó, este juego no tiene equilibrios en estrategias puras ya que para cualquier par de estrategias (cualquiera de los cuadrantes de la matriz) alguno de los jugadores tiene incentivos para desviarse. Por ejemplo, en el cuadrante (D_1, L_1) Luis estaría mejor desviándose a L_2 ya que en el cuadrante (D_1, L_2) su pago es de 1; sin embargo, en ese cuadrante (D_1, L_2) Daniel estaría mejor desviándose a D_2 , ya que en el cuadrante (D_2, L_2) su pago sería de 1 en vez de -1. Luis, al observar la situación, se desviaría a L_1 ya que (D_2, L_1) le ofrece un pago mayor. Finalmente, Daniel, observando esta situación, se desvía a D_1 ya que (D_1, L_1) le ofrece un mayor pago y regresamos al punto de inicio. En ese sentido, el juego nunca para en ninguno de los cuadrantes porque no consigue el equilibrio.

Para solucionar este tipo de juegos necesitamos un nuevo concepto de equilibrio: estrategias mixtas, es decir, las reglas que usan los jugadores para tomar decisiones. Esas reglas se plantean en términos probabilísticos a fin de que el otro jugador no conozca la estrategia que se va a escoger; en ese sentido, cada jugador le asigna una probabilidad de jugar a cada una de sus estrategias puras.

Como dicen Von Neumann y Morgenstern: “mediante las estrategias mixtas, los oponentes no pueden saber qué estrategia se llevará a cabo, ya que ni siquiera el mismo jugador que va a tomar la decisión lo sabe”¹³.

Formalmente una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras. Por lo tanto, un equilibrio de Nash en estrategias mixtas representa una distribución de probabilidad (de todas las posibles) que produce los mayores pagos esperados para cada jugador. El conjunto de las “mejores” distribuciones será un equilibrio mixto de Nash, si a ninguno de los jugadores le conviene cambiar de distribución.

13 Von Neumann y Morgenstern (1944).

Continuemos con el juego abstracto y encontremos las estrategias mixtas así como el equilibrio mixto de Nash del juego.

		Luis	
		L1 (q)	L2 (1-q)
Daniel	D1 (r)	(1 , -1)	(-1 , 1)
	D2 (1-r)	(-1 , 1)	(1 , -1)

Note que $(r, 1-r)$ y $(q, 1-q)$ son las estrategias mixtas de Daniel y Luis respectivamente, y representan las probabilidades de jugar una u otra estrategia pura. Por ejemplo, si Daniel juega la estrategia pura D_1 , significa que adoptó la estrategia mixta $(1, 0)$, es decir, que juega la estrategia pura D_1 con probabilidad 1 y la estrategia pura D_2 con probabilidad 0. En otras palabras, las estrategias “puras” están contenidas dentro de las estrategias mixtas.

¿Cuál es la mejor estrategia para Luis cuando Daniel juega la estrategia mixta $(1, 0)$? Tal y como se representa en la siguiente matriz:

		Luis	
		L1 (q)	L2 (1-q)
Daniel	D1 (1)	(1 , -1)	(-1 , 1)
	D2 (0)	(-1 , 1)	(1 , -1)

Obviamente, jugar la estrategia mixta (0, 1). Sin embargo, esta tampoco representa un equilibrio pues en ese caso la mejor respuesta de Daniel sería (0, 1), y así sucesivamente, que es lo mismo que se analizó anteriormente pero ahora en el contexto de las estrategias mixtas.

Suponga ahora una estrategia mixta para Daniel donde juega $1/3$ de las veces D_1 y $2/3$ D_2 , es decir, juega la estrategia mixta (1/3, 2/3), tal como se muestra en la siguiente matriz:

		Luis	
		L1 (q)	L2 (1-q)
Daniel	D1 (1/3)	(1 , -1)	(-1 , 1)
	D2 (2/3)	(-1 , 1)	(1 , -1)

¿Cuál es la mejor respuesta de Luis cuando Daniel juega la estrategia mixta (1/3, 2/3)? En esta situación Luis calcula el pago o valor esperado¹⁴ de jugar L_1 y lo compara con el pago o valor esperado de jugar L_2 , y escoge aquella estrategia con mayor valor esperado, tal como se muestra en la siguiente matriz:

14 El valor esperado de una variable es el valor que toma la variable en un determinado escenario, multiplicado por la probabilidad de ocurrencia de dicho escenario. Por ejemplo, ¿cuál es el valor esperado de lanzar un dado? Como el dado toma el valor de 1 con probabilidad $1/6$, el valor de 2 con probabilidad de $1/6$ y así sucesivamente, su valor esperado será: $1(1/6) + 2(1/6) + 3(1/6) + 4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6) = 3,5$. Para un tratamiento estadístico del concepto de valor esperado consultar Dutta (1999, pp. 421 a 427).

		Luis	
		L1 (q)	L2 (1-q)
Daniel	D1 (1/3)	(1 , -1)	(-1 , 1)
	D2 (2/3)	(-1 , 1)	(1 , -1)

$$\left(\frac{1}{3} * (-1) + \frac{2}{3} * (1) \right) > \left(\frac{1}{3} * (1) + \frac{2}{3} * (-1) \right)$$

$$0,33\bar{3} > -0,33\bar{3}$$

En este caso Luis juega L1 (q , 1-q) = (1,0) ...

Como se observa, cuando Daniel decide jugar la estrategia mixta (1/3, 2/3) tampoco se genera un equilibrio ya que como el pago esperado por Luis de jugar L₁ es mayor que el de jugar L₂ (0, 333 > -0, 333) entonces Luis jugará la estrategia mixta (1, 0) y se vuelve a entrar en la situación anterior.

Considere ahora la estrategia de Luis donde juega (1/5, 4/5), como se muestra en la siguiente matriz:

		Luis	
		L1 (1/5)	L2 (4/5)
Daniel	D1 (r)	(1 , -1)	(-1 , 1)
	D2 (1-r)	(-1 , 1)	(1 , -1)

Ahora es Daniel quien calcula los pagos esperados de jugar D_1 y D_2 y escoge aquella estrategia que le brinde el mayor pago esperado, tal como se muestra en la matriz:

		Luis			
		L1 (1/5)	L2 (4/5)		
Daniel	D1 (r)	(1 , -1)	(-1 , 1)	$\left(\frac{1}{5} * (1) + \frac{4}{5} * (-1)\right)$	-0,6
	D2 (1-r)	(-1 , 1)	(1 , -1)	$\left(\frac{1}{5} * (-1) + \frac{4}{5} * (1)\right)$	0,6

En este caso Daniel juega $D2 (r , 1-r) = (0,1) \dots$

En este caso Daniel tendrá incentivos para jugar D_2 , es decir, jugar la estrategia mixta (0, 1), ya que $0,6 > -0,6$, con lo cual volvemos a la situación anterior donde Luis, dada la estrategia de Daniel (0, 1) tiene incentivos para desviarse.

Para que exista un equilibrio, independientemente de si es mixto o puro, es necesario que los pagos esperados sean iguales; es decir, que al jugar sea indiferente entre escoger una estrategia o la otra.

Comencemos con Luis: para que a él le sea indiferente jugar L_1 o L_2 , debe cumplirse que sus pagos esperados sean iguales, es decir, debe cumplirse que:

$$-1r + 1(1-r) = 1r + (-1)(1-r)$$

El lado izquierdo representa el pago esperado de jugar L_1 y el lado derecho representa el pago esperado de jugar L_2 . Si ambos pagos esperados son iguales, entonces para Luis será indiferente la estrategia a adoptar: algunas veces jugará L_1 y otras L_2 , pero sin ningún patrón perceptible.

Solucionando la ecuación tenemos que:

$$r = 1/2$$

Para el caso de Daniel debe cumplirse también que sus pagos esperados sean iguales, es decir, que:

$$1q + (-1)(1-q) = -1q + 1(1-q)$$

Solucionando la ecuación tenemos que:

$$Q = 1/2$$

Note que si se juega la estrategia mixta ($r = 1/2$; $q = 1/2$) ambos jugadores reciben el mismo pago esperado, como se muestra en la siguiente matriz:

		Luis			
		L1 (1/2)	L2 (1/2)		
Daniel	D1 (1/2)	(1 , -1)	(-1 , 1)	$\left(\frac{1}{2} * (1) + \frac{1}{2} * (-1)\right)$	0
	D2 (1/2)	(-1 , 1)	(1 , -1)	$\left(\frac{1}{2} * (-1) + \frac{1}{2} * (1)\right)$	0

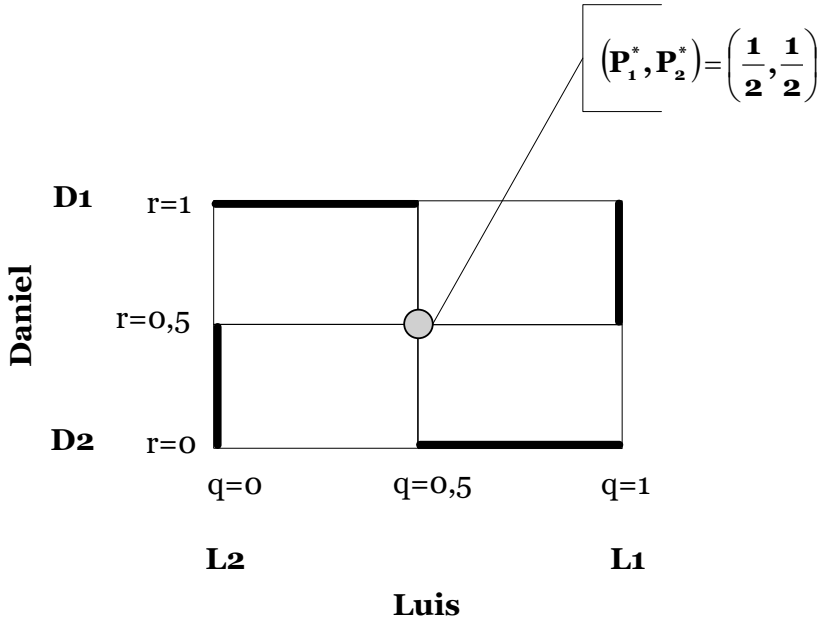
$\left(\frac{1}{2} * (-1) + \frac{1}{2} * (1)\right) = \left(\frac{1}{2} * (1) + \frac{1}{2} * (-1)\right)$

0 = 0

**En este caso Daniel y Luis son indiferentes (r=1/2 ; q=1/2)
es un equilibrio (mixto) de Nash**

Por otro lado, note también que Daniel utiliza la indiferencia entre los pagos esperados que generan sus estrategias para hallar la estrategia mixta de Luis y, por el contrario, Luis usa la indiferencia entre los pagos esperados que generan sus estrategias para hallar la estrategia mixta de Daniel. En otras palabras, como estamos en un ambiente de *common knowledge*, tanto Daniel como Luis pueden calcular las estrategias mixtas de su contrincante.

Si suponemos el conjunto de estrategias de Daniel como un continuo que va de 0 a 1 y lo representamos en el eje de las Y, y suponemos el conjunto de estrategias de Luis como un continuo que va de 0 a 1 y lo representamos en el eje X, podemos representar gráficamente el equilibrio mixto de este juego, como se muestra en el siguiente gráfico:



Note en este gráfico que la estrategia mixta de Daniel (0, 1) es jugar la estrategia “pura” D_2 , punto inferior del eje de las Y, mientras que la estrategia mixta (1, 0) es jugar la estrategia “pura” D_1 , punto superior del eje Y. Por otro lado, la estrategia mixta de Luis (0, 1) es jugar la estrategia “pura” L_2 , punto izquierdo del eje de las X, mientras que la estrategia mixta (1, 0) es jugar la estrategia “pura” L_1 , punto derecho del eje X.

Como tuvimos oportunidad de discutir, si Daniel juega D_1 (es decir, adopta la estrategia mixta $[1, 0]$), Luis jugará L_2 (es decir, adopta la estrategia mixta $[0, 1]$), lo cual se representa por la recta gruesa vertical en $q = 0$. Por otro lado, si Daniel juega D_2 (es decir, adopta la estrategia mixta $[0, 1]$), Luis jugará L_1 (es decir, adopta la estrategia mixta $[1, 0]$), lo cual se presenta por la recta gruesa vertical en $q = 1$.

Analizando el caso de Luis, tenemos que si juega L_1 (es decir, adopta la estrategia mixta $[1, 0]$), Daniel jugará D_1 (es decir, adopta la estrategia mixta $[1, 0]$), lo cual se representa por la recta gruesa horizontal en $r = 1$. Por otro lado, si Luis juega L_2 (es decir, adopta la estrategia mixta $[0, 1]$), Daniel jugará D_2 (es decir, adopta la estrategia mixta $[0, 1]$), lo cual se presenta por la recta gruesa horizontal en $r = 0$.

Superponiendo los dos gráficos, y sabiendo que ambos jugadores son indiferentes cuando $r = 1/2$ y $q = 1/2$, vemos que se interceptan en el punto $(1/2, 1/2)$ que es justamente el equilibrio mixto del juego.

En términos generales, ese equilibrio mixto es el EN del juego, es decir, el equilibrio mixto es lo mismo que el EN en un contexto más amplio. A John Nash le otorgaron el premio Nobel de economía en 1994 básicamente por probar que cualquier juego *siempre* tiene un EN, lo que hace que muchas veces ese equilibrio involucre estrategias mixtas¹⁵.

BATALLA DE LOS SEXOS

Continuemos con un juego que representa una “batalla de los sexos” para practicar la forma como se hallan los equilibrios mixtos. Consideremos el juego representado por la siguiente matriz:

		José	
		Ballet (q)	Boxeo (1-q)
María	Ballet (r)	(2 , 1)	(0 , 0)
	Boxeo (1-r)	(0 , 0)	(1 , 2)

15 Para un tratamiento formal de la existencia del EN consultar Gibbons (1992).

Este juego es similar a la batalla de los sexos que analizamos en el capítulo 1, y es fácil mostrar que existen dos EN en estrategias puras: (Ballet, Ballet) y (Boxeo, Boxeo). Como ya se explicó, esos equilibrios puros están contenidos dentro del conjunto más amplio de las estrategias mixtas; por ejemplo, el equilibrio puro (Ballet, Ballet) representa el equilibrio mixto ($r = 1$, $q = 1$) y el equilibrio puro (Boxeo, Boxeo) representa el equilibrio mixto ($r = 0$, $q = 0$). La pregunta que surge ahora es si existen otros equilibrios mixtos dentro de este juego.

Comencemos con María: para que le sea indiferente entre ir al Ballet o al Boxeo su pago esperado para asistir a ambos eventos debe ser igual a:

$$2q + 0(1-q) = 0q + 1(1-q) \rightarrow q = 1/3$$

Es decir, si José va al Ballet $1/3$ de las veces y al Boxeo $2/3$ de las veces, entonces para María será indiferente cualquiera de los dos eventos. De igual modo, si requerimos que José sea indiferente entre los dos eventos, debe cumplirse que:

$$1r + 0(1-r) = 0r + 2(1-r) \rightarrow r = 2/3.$$

¿La estrategia ($r = 2/3$, $q = 1/3$) es un equilibrio de este juego? La respuesta es afirmativa ya que como vemos en la siguiente matriz, ni María ni José tienen incentivos para moverse (porque ambas estrategias tienen los mismos pagos esperados).

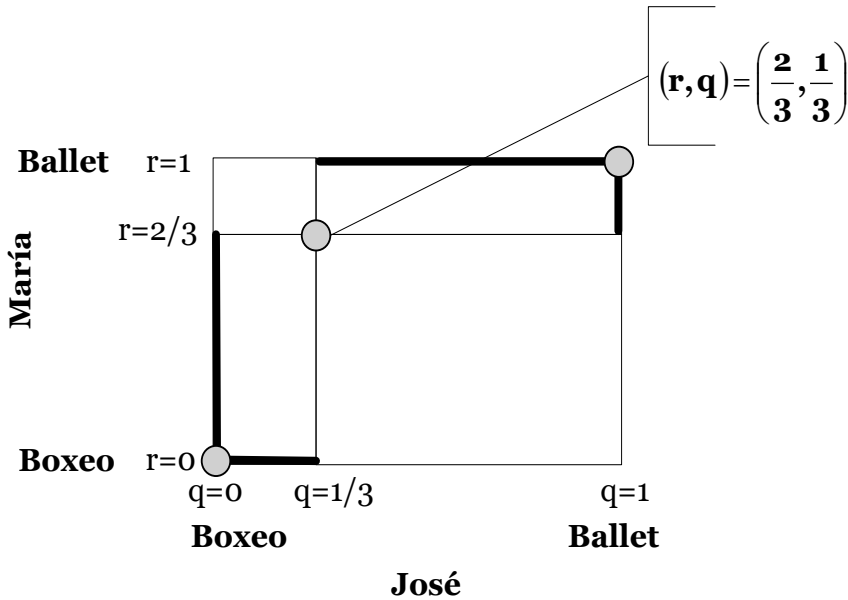
		José			
		Ballet (1/3)	Boxeo (2/3)		
María	Ballet (2/3)	(2 , 1)	(0 , 0)	$\left(\frac{1}{3} * (2) + \frac{2}{3} * (0)\right)$	0,67
	Boxeo (1/3)	(0 , 0)	(1 , 2)	$\left(\frac{1}{3} * (0) + \frac{2}{3} * (1)\right)$	0,67

$$\left(\frac{2}{3} * (1) + \frac{1}{3} * (0)\right) = \left(\frac{2}{3} * (0) + \frac{1}{3} * (2)\right)$$

0,67 = 0,67

En este caso María y José son indiferentes (r=2/3 ; q=1/3)
es un equilibrio (mixto) de Nash

A continuación se muestra la representación gráfica de esta situación:



Note que las rectas se cruzan en tres sitios: ($r = 0$, $q = 0$) que representa el equilibrio puro donde ambos van al boxeo; ($r = 1$, $q = 1$) que representa el equilibrio puro donde ambos van al ballet, y ($r = 2/3$, $q = 1/3$) donde tanto María como José juegan una estrategia mixta: María va al ballet $2/3$ de la veces y al boxeo $1/3$, mientras que José va al ballet $1/3$ de las veces y al boxeo $2/3$.

Interpretación de los equilibrios mixtos

Antes de ver algunas aplicaciones más realistas de los equilibrios mixtos es necesario hacer dos comentarios sobre cómo interpretarlos: primero, la gente realmente no “arroja dados” antes de tomar decisiones. Es decir, es poco probable que, por ejemplo, antes de salir de su casa María lance un dado y si sale 1, 2, 3 o 4 vaya al ballet, o de lo contrario (si sale el 5 o el 6) asista al boxeo; lo importante de este tipo de estrategias es que no se pueden detectar patrones en las decisiones estratégicas que toman los jugadores. El segundo comentario es que otra forma alternativa de interpretar los equilibrios mixtos consiste en que cada jugador representa más bien una observación dentro de un universo mucho más grande de jugadores. En el contexto del juego anterior, es como si José realmente no conoce a María, pero como María representa un universo donde “todas” las mujeres van al ballet $2/3$ de las veces y al boxeo $1/3$, puede suponer que ella se comportará como el resto del universo de mujeres.

Aplicaciones

Veamos ahora tres aplicaciones más realistas que involucran equilibrios mixtos a fin de familiarizarnos con la forma de encontrarlos, pero, más importante, con la manera de afinar la interpretación de los mismos.

APLICACIÓN 1.

EL SEGURO DE DESEMPLEO¹⁶

Suponga que Pedro está desempleado y no tiene grandes aspiraciones en la vida, por lo que seguirá estando desempleado si el gobierno lo ayuda con suficiente dinero. Por otro lado, el gobierno no ayudará a Pedro si este no se esfuerza en conseguir un nuevo trabajo, por lo que la ayuda que le brinde estará condicionada a lo que piensa que Pedro debe hacer en el futuro. Considere la siguiente matriz de pagos:

		Pedro	
		Buscar (α)	Disfrutar ($1-\alpha$)
Gobierno	Ayudar (β)	(5 , 4)	(-3 , 5)
	No ayudar ($1-\beta$)	(-3 , 3)	(0 , 0)

¹⁶ Adaptado de Rasmussen (2007).

Antes de estudiar los potenciales equilibrios de este juego es necesario entender primero los pagos que se generan a partir de la interacción. Suponga que el gobierno ayuda a Pedro y que este debe decidir entre buscar trabajo o disfrutar de esa ayuda gubernamental. Buscar trabajo es costoso para Pedro (preparar hojas de vida, entrevistas, etc.). Imagine que Pedro valora el “disfrutar” del seguro de desempleo en 5, mientras que buscar trabajo lo valora en 4^[17].

Por otro lado, si el gobierno decide no ayudar a Pedro, el disfrutar tendría un valor de 0 ya que no tendría dinero alguno para subsistir, y buscar trabajo lo valoraría en 3 ya que requiere los mismos costos que antes pero sin la ayuda del seguro de desempleo.

Ahora bien, si el gobierno ayuda a Pedro, este preferirá disfrutar del seguro (al menos por un tiempo), pero el gobierno sabe de esa situación (*common knowledge*) y en ese caso no lo ayuda. Para entender esto, note que el pago del gobierno por ayudar a Pedro y este disfrutar es de -3, mientras que el pago del gobierno por no ayudar a Pedro, si este usa el dinero del seguro para disfrutar, es de 0.

Sin embargo, si el gobierno no ayuda a Pedro, este ya no tendrá incentivos para disfrutar y se pondrá a buscar trabajo (3 es mayor que 0). Sabiendo que Pedro está buscando empleo, para el gobierno es mejor ayudarlo pues, de no hacerlo, Pedro puede desesperarse y buscar el dinero de cualquier forma (p. ej., delincuencia) creando costos para el gobierno (-3), mientras que si lo ayuda lo más probable es que Pedro se incorpore

¹⁷ Note que en este caso 5 y 4 son números que solo sirven para organizar las preferencias de Pedro.

nuevamente al mercado laboral generando beneficios para el gobierno (5). Por lo tanto, en ese caso, para el gobierno es mejor ayudar a Pedro (5 mayor que -3).

El problema es que si el gobierno decide comenzar a ayudar a Pedro (punto inicial de este análisis) entonces Pedro tendrá incentivos para desviarse nuevamente hacia el disfrute del seguro... Es claro, entonces, que este juego no tiene equilibrio en estrategias puras ya que los dos jugadores tienen incentivos para desviarse en cualquiera de los cuadrantes en los que se encuentren.

El teorema de Nash nos asegura que todo juego tiene un EN, por lo tanto, en este caso tiene que haber un equilibrio en estrategias mixtas que represente el EN del juego.

Veamos:

Si Pedro decide buscar trabajo su pago esperado será:

$$4\beta + 3(1-\beta)$$

donde β es la probabilidad que el gobierno ayude a Pedro y $1-\beta$ es la probabilidad de que no lo ayude.

Si Pedro decide disfrutar, su pago esperado será:

$$5\beta + 0(1-\beta)$$

Por lo tanto, para que Pedro sea indiferente entre sus dos estrategias debe cumplirse que:

$$4\beta + 3(1-\beta) = 5\beta + 0(1-\beta) \rightarrow \beta = 3/4.$$

¿Cómo interpretamos este resultado? Si, por ejemplo, el gobierno “ayuda” a Pedro el 75% de las veces, entonces Pedro será indiferente entre buscar trabajo o “disfrutar”... Si el gobierno ayuda a Pedro con una probabilidad más alta, por ejemplo entre (0,75, 1) Pedro disfrutará con probabilidad 1... lo cual no sería un equilibrio porque en ese caso el gobierno no lo ayudaría ($\beta = 0$).

Ahora bien, si el gobierno ayuda a Pedro con una probabilidad menor a 0,75, por ejemplo, que esté entre (0, 0,75) entonces Pedro buscará trabajo con probabilidad 1 y, en ese caso, el gobierno estaría dispuesto a ayudarlo ($\beta = 1$). Sólo con la probabilidad ($\beta = 0,75$), Pedro sería indiferente entre buscar trabajo o disfrutar.

Estudiemos el caso del gobierno. El pago esperado de ayudar a Pedro es:

$$5\alpha + (-3)(1 - \alpha)$$

donde α es la probabilidad que asigna el gobierno a que Pedro busque trabajo si se le otorga el seguro y $1 - \alpha$ es la probabilidad de que Pedro disfrute de esos recursos y no busque trabajo.

Mientras que el pago esperado de no ayudarlo es:

$$-3\alpha + 0(1 - \alpha)$$

Así, el gobierno sería indiferente cuando:

$$5\alpha + (-3)(1 - \alpha) = -3\alpha + 0(1 - \alpha) \rightarrow \alpha = 3/11.$$

Entonces, el par de estrategias mixtas:

$$(\alpha = 3/11, \beta = 3/4),$$

representan un EN para este juego.

Siguiendo con los comentarios anteriores, ni Pedro ni el Gobierno “tiran dados” para saber si buscan trabajo o disfrutan en el caso de Pedro, o ayudan o no ayudan en el caso del gobierno. Más bien, Pedro puede verse como una observación aleatoria de una determinada población de personas desempleadas. En ese caso en particular, 3 de cada 11 “Pedros” de esa población buscarán trabajo mientras que 8 de cada 11 disfrutarán del seguro de desempleo. Por otra parte, Pedro puede interpretar el $\beta = 3/4$ del gobierno de la siguiente manera: por cada 4 personas que solicitan el seguro de desempleo, solo a 3 les es otorgado.

Este tipo de juegos sencillos, o *toy games*, no representa todas las complejidades del mundo real, aunque son interesantes para el desarrollo de la lógica necesaria en el análisis de situaciones más complejas como, por ejemplo, el seguro de desempleo en España, que ha generado un gran debate a nivel nacional.

Veamos otra aplicación del concepto de estrategias mixtas para ir afinando más la interpretación de este importante concepto.

APLICACIÓN 2.

EL JUEGO DE LA AUDITORÍA¹⁸

La firma auditora puede hacer una auditoría profunda y detectar cualquier irregularidad que ocurra en una empresa, lo cual significa asumir un mayor costo; pero también puede hacer una auditoría más superficial y más barata, pero corre el riesgo de que la empresa auditada cometa fraude en sus informes financieros.

Supongamos que una empresa debe reportar una importante pérdida a sus accionistas. El gerente sabe que el mercado castigará duramente un informe contable que muestre resultados negativos, sin embargo, puede tratar de “esconder” dichas pérdidas (fraude) esperando que la firma auditora no las note. Si la auditoría es profunda estará en problemas, porque la firma anunciará que la empresa intentó cometer fraude; pero si es superficial, la firma auditora no podrá detectar dicho intento de fraude.

Sea c el costo incremental de aplicar una auditoría profunda. Es claro que las decisiones de la firma auditora sobre qué tipo de auditoría aplicar tienen que ver con el costo que dicha auditoría genera (traer expertos internacionales, aumentar el número de cuentas a investigar, recurrir a equipos de trabajo más grandes y experimentados, etc.). La matriz de pagos para esta aplicación se muestra abajo:

18 Adaptado de Rasmussen (2007).

		Empresa	
		Esconde (δ)	Reporta ($1-\delta$)
Auditor	Profunda (γ)	($5-c$, -4)	($5-c$, -2)
	Superficial ($1-\gamma$)	(-1 , 0)	(5 , -2)

Si la firma auditora sabe con certeza que la empresa va a tratar de esconder las pérdidas, estará en mejor posición haciendo una auditoría profunda siempre que $c < 6$. Por el contrario, si la firma auditora sabe que la empresa reportará todas las pérdidas sin intención de cometer fraude, entonces estará en mejor posición haciendo una auditoría superficial ya que para cualquier valor positivo de c , se cumple que $5 > 5-c$.

Ahora bien, si la empresa sabe que la firma auditora hará una auditoría superficial, la empresa estará en mejor posición si esconde sus pérdidas y evita ser penalizada por el mercado (0 es mayor que -2). Por otro lado, si la empresa sabe que la firma hará una auditoría profunda, le irá mejor reportando las pérdidas directamente y asumiendo un costo de -2, que tratando de ocultarlas y ser castigada doblemente por el mercado con un pago de -4.

Como en el caso anterior, es fácil probar que este juego no tiene EN en estrategias puras ya que en cualquier cuadrante alguno de los jugadores tendrá incentivos para moverse. En

este juego es el EN en estrategias mixtas ($\gamma = 1/2$; $\delta = c/6$), donde c es el costo de hacer una auditoría profunda. Hallemos el $\delta = c/6$ y dejemos el $\gamma = 1/2$ como ejercicio para el lector.

Suponga que la empresa esconde las pérdidas tratando de hacer fraude, ¿cuál es el pago esperado de la firma auditora? Si la firma auditora hace una auditoría profunda su pago esperado será:

$$(5 - c) \delta + (5 - c)(1 - \delta) = 5 - c$$

Por otro lado, si la firma auditora decide hacer una auditoría superficial, su pago esperado será:

$$- 1\delta + 5(1 - \delta) = 5 - 6\delta$$

Para que la firma auditora sea indiferente entre el tipo de auditoría que aplica a la empresa en cuestión, debe cumplirse que:

$$5 - c = 5 - 6\delta \rightarrow \delta = c/6.$$

¿Cómo interpretamos este resultado? Para garantizar el EN en estrategias mixtas la firma auditora debe hacer auditorías profundas la mitad de las veces. Sabemos que $0 < c < 6$; pero si c es relativamente bajo, al cometer fraude la empresa auditada estaría incurriendo en un costo esperado muy alto (ya que estamos suponiendo que siempre la descubrirían luego de una auditoría profunda); todo lo contrario ocurre si el costo de hacer auditorías profundas es más bien alto: se incrementa la probabilidad de que la empresa intente esconder las pérdidas.

¿Tiene algo que ver esto con la realidad? En muchos casos cuando las empresas cotizan en bolsa es obligatorio que sus balances sean auditados por alguna de las firmas más prestigiosas y grandes. ¿Por qué? Claramente para este tipo de firmas es menos costoso hacer auditorías profundas dadas sus economías de escala y de alcance. ¡Pero noten que esto es justamente lo que predice nuestro análisis en este sencillo modelo!

Salgamos de los negocios y analicemos el siguiente caso de Fútbol; llamémoslo el juego de los penaltis.

APLICACIÓN 3.
EL JUEGO DE LOS PENALTIS¹⁹

En un estudio realizado en Brown University se recolectaron seis años de datos sobre penaltis en distintas ligas de fútbol profesional. Los resultados se muestran a continuación:

		Exitos (goles)		
		Portero		
		Izquierda	Derecha	Total
Jugador	Izquierda	132	323	455
	Derecha	347	333	680
	Total	479	656	1.135

¹⁹ Palacios-Huertas (2002).

		Intentos		
		Portero		
		Izquierda	Derecha	Total
Jugador	Izquierda	226	340	566
	Derecha	373	477	850
	Total	599	817	1.416

Para entender estos datos, considere los 226 intentos donde se chutó hacia la izquierda y el portero se lanzó hacia ese lado. En ese caso, de los 226 intentos se produjeron 132 goles (58%); por otra parte, de los 340 intentos donde el chute fue hacia la izquierda y el portero se lanzó hacia la derecha, se produjeron 323 goles (95%). Al tener la tabla de intentos y la tabla de éxitos es posible estimar los pagos esperados tanto para el portero como para el jugador que chuta el penal. Supongamos que el gol da un pago de 1 para el jugador y un pago de -1 para el portero. Entonces se puede construir una tabla de pagos esperados tanto para el jugador como para el portero.

Por ejemplo, si el jugador chuta a la izquierda y el portero se lanza a la izquierda, el jugador tiene una probabilidad de éxito (es decir, de meter gol) de 58%; por lo tanto, si el pago del gol es de 1 para el jugador, su pago “esperado” de chutar a la izquierda cuando el portero se lanza hacia ese mismo lado, es de $1 \times 58\% = 0,58$ para el jugador y de $-1 \times 58\% = -0,58$

para el portero. Con esta idea se construye la siguiente matriz de pagos para este juego:

		Probabilidades	
		Portero	
		Izquierda	Derecha
Jugador	Izquierda	(0.58 , -0.58)	(0.95 , -0.95)
	Derecha	(0.93 , -0.93)	(0.70 , -0.70)

Supongamos que usted es el portero y asignemos una probabilidad r de que el tiro viene por la izquierda y una probabilidad $1 - r$ de que el tiro viene por la derecha. Si el portero decide lanzarse a la izquierda su pago esperado será:

$$-0,58r + (-0,93)(1 - r)$$

Por otro lado, si el portero decide lanzarse a la derecha su pago esperado será:

$$-0,95r + (-0,70)(1 - r)$$

El portero será indiferente si se cumple:

$$-0,58r + (-0,93)(1 - r) = -0,95r + (-0,70)(1 - r) \rightarrow r = 0,38.$$

Es decir, para el portero será indiferente lanzarse hacia cualquiera de los lados si el jugador chuta hacia la izquierda el 38% de las veces y hacia la derecha el 62% de las veces.

Ahora bien, si uno es el jugador que está cobrando el penalti, y supone que el portero se lanzará hacia la izquierda con probabilidad q y hacia la derecha con probabilidad $(1 - q)$, entonces el pago esperado de chutar hacia la izquierda será:

$$0,58q + 0,95(1 - q)$$

Y el pago esperado de chutar hacia la derecha será:

$$0,93q + 0,70(1 - q)$$

Por lo tanto, para el jugador será indiferente hacia donde chutar si:

$$0,58q + 0,95(1 - q) = 0,93q + 0,70(1 - q) \rightarrow q = 0,42.$$

Es decir, para el jugador será indiferente si el portero se lanza hacia la izquierda el 42% de las veces, y hacia la derecha el 58% de las ocasiones.

Según este estudio (las predicciones de la teoría de juegos con respecto a la elección de los jugadores), los porteros generalmente se lanzan hacia la izquierda en el 42% de las ocasiones y los jugadores chutan hacia la izquierda el 38% de las veces, lo cual se asemeja considerablemente a las estadísticas reales. Usando los datos del mismo estudio es posible observar que, efectivamente, de los 1.416 chutes analizados, los porteros se lanzaron a la izquierda en 599 oportuni-

dades (42, 30%), y los jugadores chutaron a la izquierda en 566 oportunidades (39, 97%), como se muestra en la siguiente tabla:

		Portero			Probabilidad
		Izquierda	Derecha	Total	
Jugador	Izquierda	226	340	566	39.97%
	Derecha	373	477	850	60.03%
	Total	599	817	1.416	
	Probabilidad	42.30%	57.70%		100%

Jugadores chutarán por la izquierda el 39% de los casos ($r = 0,39$)

Predicción de la teoría de juegos

Porteros se lanzarán por la izquierda el 42% de los casos ($q = 0,42$)

Veamos por último otra aplicación, quizá menos deportiva y más dramática, que llamaremos el juego del asesinato en el parque.

APLICACIÓN 4.
EL JUEGO DEL ASESINATO EN EL PARQUE²⁰

Suponga que Daniel y Luis presencian un intento de asesinato. Los dos quieren que el otro llame a la policía ya que al hacerlo impiden el crimen y, además, evitan asumir los costos que se derivan de ese tipo de acciones (e.g. ir a la estación de policía, ser interrogados, acudir como testigos en el juicio del presunto criminal, etc.).

20 Adaptado de Osborne (2004).

Suponga la siguiente matriz de pago para Daniel y Luis.

		Luis	
		Ignorar (q)	Llamar (1-q)
Daniel	Ignorar (q)	(0 , 0)	(10 , 7)
	Llamar (1-q)	(7 , 10)	(7 , 7)

Note que este es un juego del tipo “*chicken*” (*chicken game*), donde cada uno de los jugadores desea justamente lo contrario que su contrincante. De hecho, este juego tiene dos EN en estrategias puras: Daniel llama y Luis ignora, o Daniel ignora y Luis llama.

Para calcular el EN en estrategias mixtas hacemos que el pago esperado de Daniel sea igual entre llamar o ignorar:

Si Daniel ignora, su pago esperado es: $0q + 10(1 - q)$

Si Daniel llama, su pago esperado es: $7q + 7(1 - q)$

Por lo tanto, será indiferente si:

$$0q + 10(1 - q) = 7q + 7(1 - q) \rightarrow q = 3/10$$

Note que cada uno ignorará el intento de asesinato en el 30% de los casos. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno llame? $3/10 * 3/10 = 9/100 = 9\%$... es decir, en el 91% de los casos se llamará a la policía.

En 1964 se cometió en Nueva York el asesinato de una señora y el hecho (que tardó media hora en consumarse) fue observado por 38 personas... ninguna de ellas llamó a la policía lo cual generó un intenso debate en relación con la deshumanización de la sociedad norteamericana²¹. Sin embargo, con base en la aplicación anterior, tratemos de entender mejor (usando las herramientas de la teoría de juegos) qué ocurrió verdaderamente ese día.

Considere el juego anterior pero jugado por N personas. Cada una de esas N personas tiene una probabilidad q de ignorar el hecho. La probabilidad de que los $N-1$ ignoren el hecho (es decir, todos excepto nosotros) es $q^{(N-1)}$. Por lo tanto, la probabilidad de que por lo menos una persona llame (excepto nosotros) es $1 - q^{(N-1)}$.

Supongamos que estamos decidiendo entre llamar o no a la policía. Si llamamos, nuestro pago esperado será:

$$7(q^{(N-1)}) + 7(1 - q^{(N-1)}) = 7$$

Si, por el contrario, no llamamos el pago esperado será:

$$0(q^{(N-1)}) + 10(1 - q^{(N-1)})$$

Por lo tanto, para encontrar la estrategia mixta de este juego igualamos los pagos esperados y resolvemos para q .

$$10(1 - q^{(N-1)}) = 7 \rightarrow q = (0,3)^{1/N-1}$$

21 Ver reseña en Osborne (2004), p. 133.

Note que esto es consistente con el resultado para el juego entre Daniel y Luis, ya que si $N = 2$, entonces:

$$q = (0,3)^{1/2-1} = 0,3$$

Ahora bien, si $N = 38$, como en el caso de la vida real, note que la probabilidad individual de ignorar el hecho y no llamar a la policía sube a:

$$q = (0,3)^{1/38-1} = 0,97$$

Es decir, ¡cada persona ignorará el asesinato con una probabilidad de 97%! Por lo tanto, lo que ocurrió en el parque no es un resultado distinto a un desafortunado equilibrio mixto de Nash.

Terminemos este segundo capítulo con el siguiente problema resuelto:

PROBLEMA RESUELTO 1

Suponga que Carlos y Diana trabajan en una firma encargada de evaluar financieramente posibilidades de adquisición; cada uno de ellos debe elegir entre tres niveles de esfuerzo: 1, 2 y 3. El mayor nivel de esfuerzo viene acompañado con un mayor costo, pero al mismo tiempo asegura una mayor ganancia (e.g. bonificaciones por desempeño, ascensos, reconocimientos, etc.).

A continuación se muestra la tabla que relaciona los costos y beneficios de la colaboración para cada uno de ellos según su nivel de esfuerzo:

		Diana		
		Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Carlos	Nivel 1	(0 , 0)	(0 , 400)	(0 , 200)
	Nivel 2	(800 , 0)	(200 , 100)	(60 , 60)
	Nivel 3	(400 , 0)	(120 , 30)	(80 , 40)

Indique cuáles son todos los equilibrios (puros y mixtos) de este juego.

Solución:

Luego de eliminar las estrategias estrictamente dominadas tenemos:

		Diana	
		Nivel 2	Nivel 3
Carlos	Nivel 2	(200 , 100)	(60 , 60)
	Nivel 3	(120 , 30)	(80 , 40)

Note que (N_2, N_2) y (N_3, N_3) son dos equilibrios de Nash en estrategias puras; el primero es obviamente más eficiente que el segundo; sin embargo, note además que el segundo equilibrio le “garantiza” un pago de 80 a Carlos y de 40 a Diana. Por ejemplo, si Carlos hace un esfuerzo de nivel 2 y resulta que Diana hace un esfuerzo de nivel 3, el pago de Carlos será 60, mientras que si hace un esfuerzo de nivel 3 su pago será de 120 en caso de que Diana siga el esfuerzo de nivel 2, o de 80 si Diana también lleva a cabo el esfuerzo de nivel 3; es decir, haciendo un esfuerzo de nivel 3 Carlos “asegura” un pago de 80.

Siguiendo el procedimiento para encontrar estrategias mixtas observamos que $(r=0,2; q=0,2)$ también son equilibrios mixtos.

**Problemas con solución
para practicar y afianzar conceptos**

PROBLEMA 1

Encuentre todos los equilibrios mixtos del siguiente juego (recuerde que los equilibrios puros también se pueden considerar dentro del conjunto de equilibrios mixtos):

		B	
		A	B
A	A	(-4 , -4)	(10 , -2)
	B	(2 , 6)	(2 , -2)

Solución:

Este juego tiene dos equilibrio puros: (B, A) y (A, B). Para los equilibrios mixtos: (p,q): (1, 0); (0, 1) y (4/5, 4/7).

PROBLEMA 2

Encuentre los Equilibrios Mixtos de Nash en el siguiente Dilema del Prisionero:

		Prisionero 2	
		A	B
Prisionero 1	A	$(-1, -1)$	$(-15, 0)$
	B	$(0, -15)$	$(-9, -9)$

Solución:

No tiene equilibrio mixto de Nash (solamente un equilibrio puro).

PROBLEMA 3

Considere el juego entre los jugadores 1 y 2 que se muestra abajo. Defina formalmente este juego e indique, si existen, todos los equilibrios de Nash (puros y mixtos).

		Jugador 2		
		H	M	S
Jugador 1	H	(-3 , -3)	(-1 , 0)	(4 , 0)
	M	(0 , 0)	(2 , 2)	(3 , 1)
	S	(0 , 0)	(2 , 4)	(3 , 3)

Solución:

El Equilibrio Mixto de Nash sería: [(1, 0, 0); (0.25, 0.75)]

PROBLEMA 4

Encuentre todos los equilibrios (mixtos y puros) del siguiente juego:

		$I(\gamma)$	$M(\delta)$	$D(1-\gamma-\delta)$
$\triangleleft$	$U(\alpha)$	(10 , 10)	(7 ,12)	(5 , 3)
	$M(\beta)$	(15 , -1)	(12 , 0)	(-1 , 2)
	$D(1-\alpha-\beta)$	(-5 , 6)	(13 , 0)	(0 , 1)

Solución:

$$\alpha = 1/6, \quad \beta = 2/3, \quad \gamma = 1/21, \quad \delta = 115/231.$$

PROBLEMA 5

En el juego de auditoría visto anteriormente, cuya matriz de pagos era:

		Empresa	
		Esconde (δ)	Reporta ($1-\delta$)
Auditor	Profunda (γ)	($5-c$, -4)	($5-c$, -2)
	Superficial ($1-\gamma$)	(-1 , 0)	(5 , -2)

La estrategia mixta de la auditora sobre sus dos estrategias puras (Profunda o Superficial) era $(\gamma, 1-\gamma)$, y la estrategia mixta de la empresa sobre sus dos estrategias puras (Esconder o Reportar) era $(\delta, 1-\delta)$. Del análisis del juego sabemos que existe un equilibrio de Nash en estrategias mixtas (EMN): $(\gamma^* = \frac{1}{2}, \delta^* = c/6)$. Si suponemos que $c = 3$, el equilibrio mixto será $(\gamma^* = \frac{1}{2}, \delta^* = \frac{1}{2})$. Demuestre que $(\gamma^* = \frac{1}{2}, \delta^* = \frac{3}{4})$ no es un equilibrio mixto mostrando que los jugadores, en ese caso, tendrán incentivos en moverse.

PROBLEMA 6

Dos empresas que participan en un monopolio natural (solo hay mercado para una de ellas), tienen los siguientes pagos:

		Empresa	
		Salir	Permanecer
Auditor	Salir	(0 , 0)	(0 , 5)
	Permanecer	(7 , 0)	(-1 , -2)

Cada una de las firmas tiene la opción de Salir (S) o Permanecer (P) en el mercado.

- Determine los Equilibrios Puros de Nash

Solución: $EN(S, P)$ y $EN(P, S)$

- Determine las ecuaciones de optimización para calcular los Equilibrios Mixtos de Nash

Solución:

Para el Jugador 1: $q = 1/8$

Para el Jugador 2: $p = 1/3$

- c. Calcule el beneficio de cada firma y diga cuál será el desenlace del juego.

Solución:

Beneficio (*Jugador 1*) = 0

Beneficio (*Jugador 2*) = 0

PROBLEMA 7

Halle los equilibrios mixtos de Nash de los siguientes tres juegos:

		Jugador 2	
		C	S
Jugador 1	C	$(-4, 4)$	$(4, -4)$
	S	$(4, -4)$	$(-4, 4)$

		Jugador 2		
		Piedra	Papel	Tijera
Jugador 1	Piedra	$(0, 0)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
	Papel	$(1, -1)$	$(0, 0)$	$(-1, 1)$
	Tijera	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(0, 0)$

Solución:

- Juego 1: *Jugador 1*(C, S);
 Jugador 2 (C, S) = (0.5, 0.5); (0.5, 0.5).
- Juego 2: Para el *Jugador 1*: $q = 2/3$.
 Para el *Jugador 2*: $p = 3 > 1$ entonces no existe equilibrio mixto.
- Juego 3: Para el *Jugador 1* (1/3,1/3,1/3) y
 para el *Jugador 2* (1/3,1/3,1/3).

CAPÍTULO 3.

JUEGOS DINÁMICOS

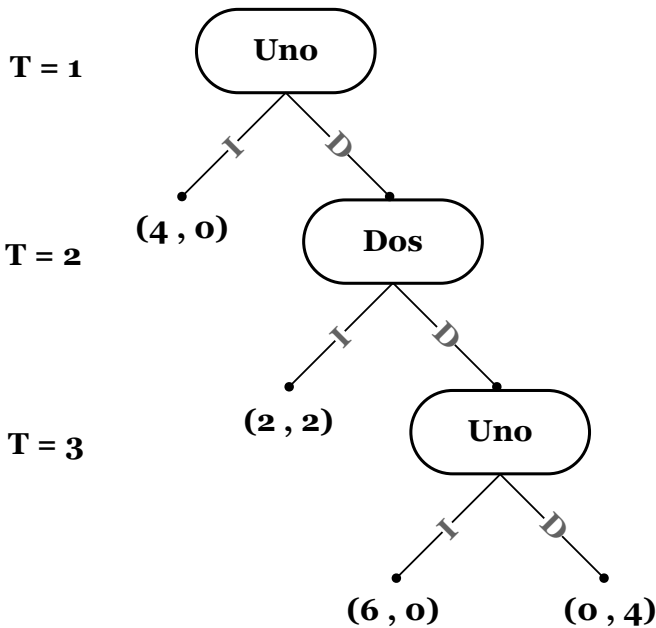
Hasta ahora los juegos analizados han sido estáticos, en el sentido de que cada jugador juega simultáneamente o juega sin saber qué jugó su contrincante. Como veremos, estos juegos son “imperfectos” en términos de la información que manejan los jugadores puesto que no saben dónde se encuentran dentro del juego.

En este capítulo introduciremos los juegos dinámicos donde cada jugador juega de manera secuencial. Como suponemos que la información de los pagos es *common knowledge* y que el juego completo puede dividirse en distintos sub-juegos, al equilibrio que buscamos lo denominaremos *Equilibrio Perfecto de Nash en Sub-juegos (EPNS)*. La palabra “perfecto” surge del hecho de que la información para los jugadores es completa, en el sentido de que cada uno sabe exactamente dónde está ubicado en la dinámica del juego.

Antes de presentar algunos ejemplos de este tipo de juegos es preciso resaltar la importancia de distinguir entre acciones y estrategias. Como ya se dijo, las acciones son movimientos “físicos” que realizan los jugadores, mientras que las estrategias son planes de acción “mentales” que cada jugador tiene dentro de una determinada interacción.

La confusión surge generalmente del hecho de que (en los juegos estáticos estudiados anteriormente) el conjunto de acciones es exactamente igual al conjunto de estrategias.

Analicemos con más detalle estas diferencias usando el juego abstracto 1 que se presenta a continuación:



Este juego se puede dividir en tres períodos, cada uno de los cuales representa un sub-juego. En el momento $t = 1$ (primer sub-juego) el *Jugador Uno* decide entre jugar a la izquierda (I) o a la derecha (D),

las cuales representan sus dos posibles acciones. Si juega D, el Jugador Dos en $t = 2$ (segundo sub-juego) debe decidir también si juega a I o D. Finalmente, si el *Jugador Dos* decide jugar D, entonces en $t = 3$ (tercer y último sub-juego) el *Jugador Uno* tiene otra vez la alternativa de jugar I o D y acabar el juego.

Note aquí que tanto el *Jugador Uno* como el *Jugador Dos* tienen el mismo conjunto de acciones: I, D. Sin embargo, el *Jugador Uno* tiene cuatro potenciales estrategias: (D, D), siempre jugar D; (D, I), jugar D en su primer turno (en $t = 1$) y jugar I, en su segundo turno (en $t = 3$); (I, D) jugar I en su primer turno y D en su segundo; o, finalmente (I, I), que es jugar I siempre que le toque jugar. Formalmente el conjunto de estrategias del *Jugador Uno* es:

$$S_{\text{UNO}} = \{(D,D), (D,I), (I,D), (I,I)\}$$

Donde cada estrategia indica la acción específica que llevará a cabo el jugador cada vez que tenga que jugar. Note que ese conjunto indica el “plan” de acciones del *Jugador Uno*.

Por otro lado, como el *Jugador Dos* solo juega una vez (en), su conjunto de acciones (I, D) es también su conjunto de estrategias:

$$S_{\text{DOS}} = \{ I, D \}$$

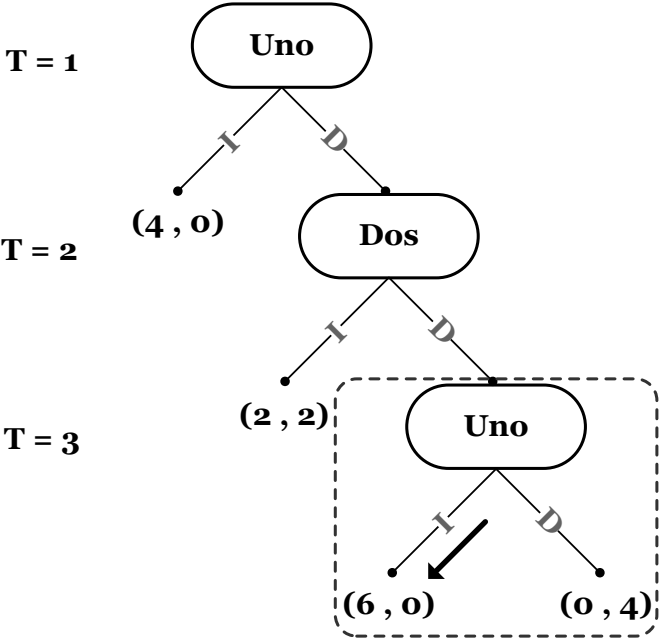
Equilibrio Perfecto de Nash en Sub-juegos (EPNS)

Una vez entendida la diferencia entre acciones y estrategias en los juegos dinámicos, es preciso comprender cómo se encuentran los equilibrios de este tipo de interacciones, los cuales se interpretan exactamente como los equilibrios estáticos: estrategias que, una vez alcanzadas, desincentivan a los jugadores para moverse.

Estos EPNS se encuentran utilizando una técnica denominada *backward induction* o “inducción hacia atrás”. Como su nombre sugiere, lo que se busca con esta técnica es ubicarnos al final del juego e ir del final al principio escogiendo las mejores estrategias para cada jugador en cada sub-juego hasta llegar al inicio.

¿Cómo se soluciona cada sub-juego? Cada sub-juego se puede analizar independientemente, por lo cual debemos encontrar su EN. Una vez hallados todos los EN para cada sub-juego, ese será el EPNS.

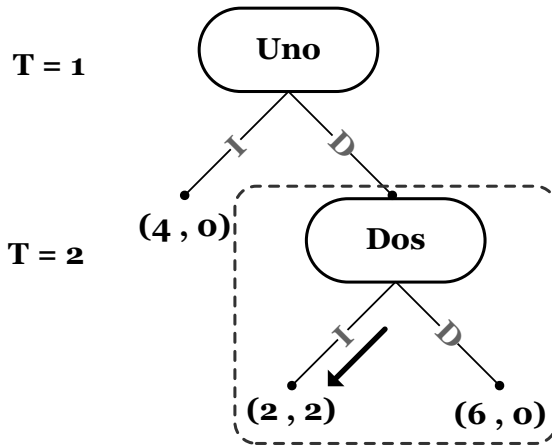
Sigamos con el ejemplo del juego abstracto 1 para mostrar el procedimiento.



El último sub-juego ocurre en el momento $t = 3$. En esta situación el *Jugador Uno* debe elegir entre jugar **I** y obtener un pago de 6 (estamos suponiendo que el primer número es el pago del *Jugador*

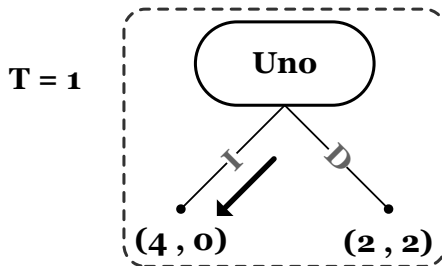
Uno y el segundo número es el pago del *Jugador Dos*), o jugar D y recibir 0. Evidentemente, el *Jugador Uno* preferirá jugar I.

Como el *Jugador Dos* sabe que el *Jugador Uno* jugará I en $t = 3$ (si el juego llega hasta ese punto), entonces los pagos del segundo sub-juego se modifican indicando que si el *Jugador Dos* juega D, ya sabe que el conjunto de pagos será (6, 0).



En este segundo sub-juego el *Jugador Dos* compara sus pagos y elige aquella acción que le genere el mayor. Así, si juega I obtiene 2 y si juega D obtiene 0. El *Jugador Dos* en ese momento escoge jugar I y acabar el juego.

Resuelto el segundo sub-juego, el *Jugador Uno* (sabiendo que si juega D el *Jugador Dos* acaba el juego ya que jugará I) se enfrenta al siguiente sub-juego:



Evidentemente, el *Jugador Uno* jugará I ya que $4 > 2$ y terminará el juego en $t = 1$.

Algo interesante de este juego es que el *Jugador Dos*, en equilibrio, ¡no juega! Pero, ¿cómo sabemos eso? Justamente lo sabemos gracias al procedimiento de inducción hacia atrás. En otras palabras, a pesar que el *Jugador Dos* no juega, debemos saber qué decisiones tomaría en caso de que jugara.

La forma de escribir este EPNS no es estándar, sin embargo, lo importante es que quede claro para el lector cuál es la estrategia (plan de acción) de cada jugador en cada sub-juego. En este caso podríamos escribir el EPNS de la siguiente manera:

$$\text{EPNS} = \{(I, I), I\}$$

Donde es claro que el primer elemento del conjunto (I,I) representa la estrategia óptima del *Jugador Uno* y el segundo elemento, I, representa la estrategia óptima del *Jugador Dos*. Como el *Jugador Uno* participa en dos sub-juegos, indica que en el primer sub-juego el *Jugador Uno* tomará la acción I y en el segundo sub-juego, el *Jugador Uno* tomará la acción I. Por otro lado, como el *Jugador Dos* solo participa en un sub-juego, la estrategia I, indica que en ese sub-juego el *Jugador Dos* llevará a cabo la estrategia I.

¿Cómo transformar un juego dinámico en un juego estático?

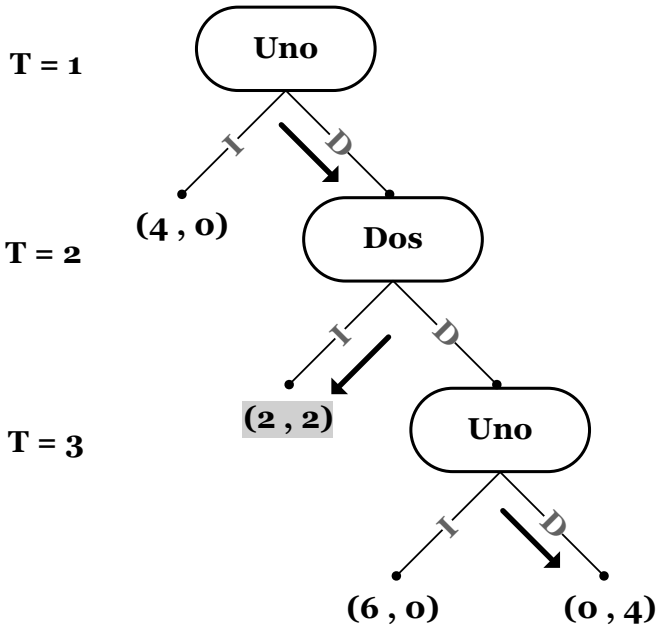
Algunas veces los juegos dinámicos pueden ser bastantes intrincados, presentando un problema: quizá haya equilibrios que no son tan evidentes cuando se analiza el gráfico que genera el juego. Una ma-

nera fácil de encontrar el o los EPNS es transformar el juego dinámico en un juego estático, encontrar el o los EN, y luego incorporar en el análisis el hecho de que algún jugador juega primero.

Para mostrar cómo se puede hacer esa transformación considere otra vez el juego abstracto 1 presentado al inicio del capítulo. El primer paso es identificar las estrategias de cada jugador y colocarlas en una matriz. Como se observa en el análisis de ese juego, el *Jugador Uno* tiene cuatro estrategias: (D, D), (D, I), (I, D) y (I, I) ya que juega dos veces, mientras que el *Jugador Dos* cuenta con solo dos estrategias: I y D. Si colocamos al *Jugador Uno* en la parte izquierda de la matriz y al *Jugador Dos* en la parte de arriba, generamos la siguiente matriz de pagos:

Jugadores Uno/ Dos	I	D
(D , D)	(2 , 2)	(0 , 4)
(D , I)	(2 , 2)	(6 , 0)
(I , D)	(4 , 0)	(4 , 0)
(I , I)	(4 , 0)	(4 , 0)

Como siempre, el primer pago corresponde al *Jugador Uno* y el segundo pago corresponde al *Jugador Dos*. Considere la estrategia (D, D) para el *Jugador Uno* y la estrategia I para el *Jugador Dos*:



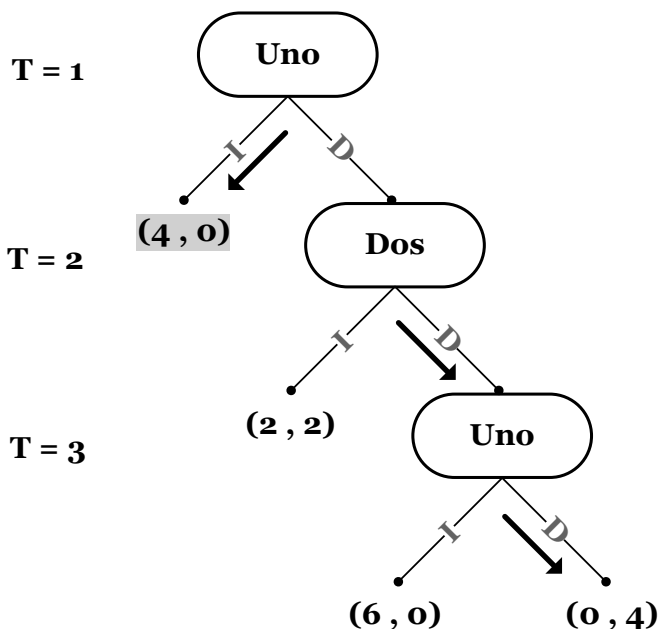
Jugadores Uno/ Dos	Jugadores	
	I	D
(D , D)	(2 , 2)	(0 , 4)
(D , I)	(2 , 2)	(6 , 0)
(I , D)	(4 , 0)	(4 , 0)
(I , I)	(4 , 0)	(4 , 0)

Note que la estrategia (D, D) indica que la primera vez ($t = 1$) jugará D y la segunda vez ($t = 3$) también jugará D. Eso se representa

arriba con las dos flechas que salen del *Jugador Uno*. Por otro lado, el *Jugador Dos* jugará I en el caso que sea llamado a jugar ($t = 2$), lo cual se presenta también con la flecha que sale del *Jugador Dos*.

Ahora bien, si seguimos las flechas (el *Jugador Uno* juega D en $t = 1$; luego el *Jugador Dos* juega I en $t = 2$; y finalmente, el *Jugador Uno* juega D en $t = 3$) quedamos en que el juego termina en $t = 2$ y cada jugador recibe un pago de 2. Entonces, $(2, 2)$ representa el pago de jugar la estrategia $[(D, D), I]$.

Como práctica considere ahora los pagos que genera el conjunto de estrategias $[(I, D), D]$. Si observamos las flechas que representan cada acción del *Jugador Uno* y del *Jugador Dos* concluimos que el juego termina al comenzar (cuando el *Jugador Uno* decide jugar I en $t = 1$) y, en consecuencia, el juego genera 4 como pago a cada jugador, como se muestra abajo:



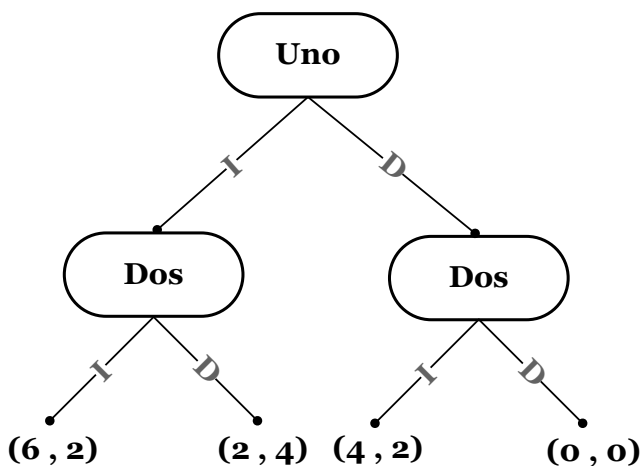
Jugadores Uno/ Dos	I D	
	I	D
(D , D)	(2 , 2)	(0 , 4)
(D , I)	(2 , 2)	(6 , 0)
(I , D)	(4 , 0)	(4 , 0)
(I , I)	(4 , 0)	(4 , 0)

Si realizamos ese mismo procedimiento para cada uno de los pares posibles: [(D, D), I]; [(D, I), I]; [(I, D), I]; [(I, I), I]; [(D, D), D]; [(D, I), D]; [(I, D), D]; [(I, I), D], generamos la matriz anterior. Con la matriz construida, hallamos el o los EN como si estuviéramos frente a un juego estático (subrayando los pagos más altos para cada jugador en cada una de las posibles combinaciones de estrategias), como se muestra a continuación:

Jugadores Uno/ Dos	I D	
	I	D
(D , D)	(2 , 2)	(0 , 4)
(D , I)	(2 , 2)	(6 , 0)
(I , D)	<u>(4 , 0)</u>	(4 , 0)
(I , I)	<u>(4 , 0)</u>	(4 , 0)

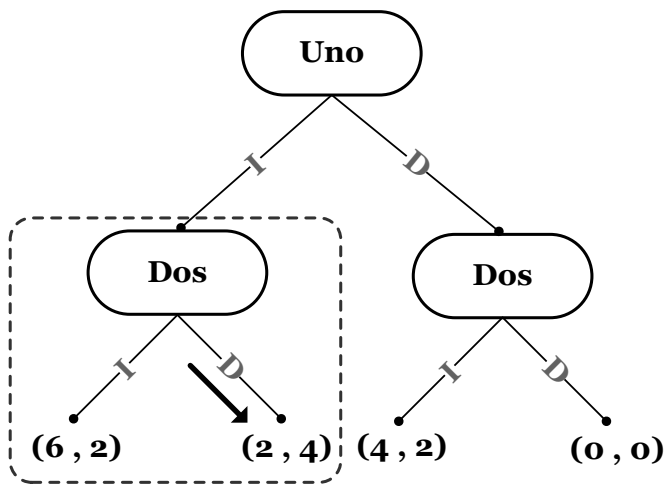
Note que este juego (estático) tiene dos equilibrios de Nash: $[(I, D), I]$; $(I, I), I]$. Ahora bien, como el juego es dinámico y el *Jugador Uno* juega primero, tiene prioridad en cuanto a cuál de los EN adoptar, siempre y cuando sea EPNS (no pueden existir amenazas o promesas vacías). En este caso, y dado que los pagos son iguales, tanto $[(I, D), I]$ como $[(I, I), D]$ son EPNS del juego. Este no siempre se da así ya que en ocasiones veremos juegos que a pesar que los sub-juegos tienen EN, y no son necesariamente EPNS.

Veamos otro ejemplo que llamaremos juego abstracto 2:

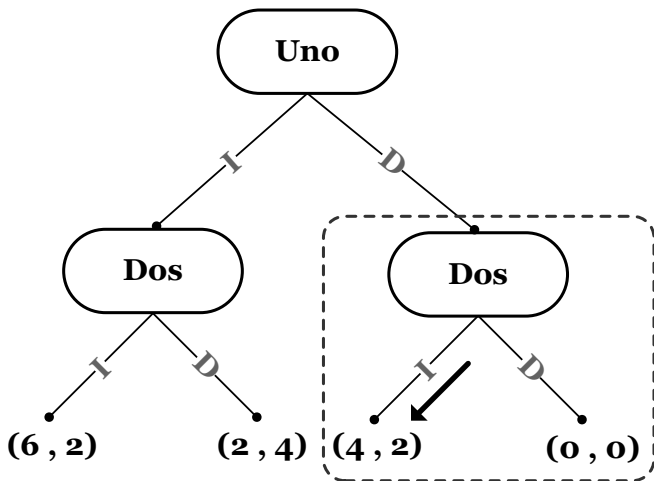


En este caso el *Jugador Uno* tiene dos estrategias (jugar **I** o jugar **D**) y el *Jugador Dos* tiene cuatro estrategias: (I, I) , (I, D) , (D, I) y (D, D) , donde la primera acción representa la jugada en el sub-juego de la izquierda y la segunda representa la jugada en el sub-juego de la derecha. Es decir, el conjunto de estrategias del *Jugador Uno* es igual a su conjunto de acciones, pero para el *Jugador Dos*, a pesar de que ambos tienen las mismas dos acciones, tiene cuatro estrategias.

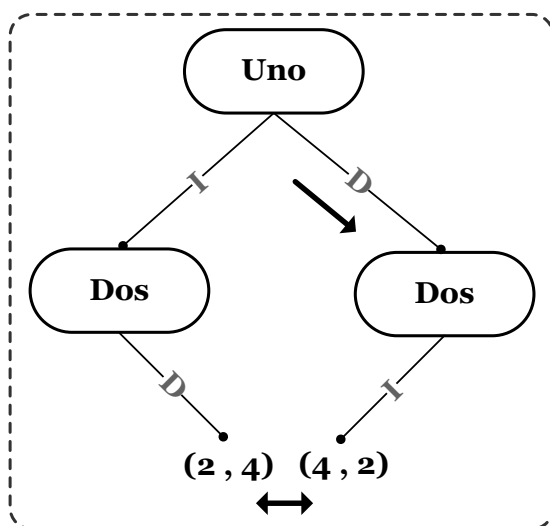
Si utilizamos el procedimiento de inducción hacia atrás, comenzamos con el sub-juego de la izquierda, como se muestra en el siguiente gráfico:



En este caso, el *Jugador Dos* jugará D ya que $4 > 2$. Cuando analizamos el sub-juego de la derecha, observamos que el *Jugador Dos* jugará I ya que $2 > 0$, como se muestra abajo:



Cuando al *Jugador Uno* le corresponde jugar, sabe (*common knowledge*) que si juega I el *Jugador Dos* jugará D; si, por el contrario, decide jugar D, el *Jugador Dos* jugará I. Por lo tanto, el *Jugador Uno* analiza el siguiente sub-juego:



Es claro que el *Jugador Uno* jugará D ya que $4 > 2$. Ahora bien, ¿el equilibrio encontrado $[D, (D, I)]$ es el único EPNS? En principio, para responder esta pregunta tendríamos que probar en el gráfico todas las posibles “rutas” a través del juego (es decir, combinaciones de estrategias) y demostrar que solo en $[D, (D, I)]$ ninguno de los dos jugadores tiene incentivos para desviarse.

Otra forma de hacerlo es transformando el juego dinámico en un juego estático siguiendo el procedimiento enunciado anteriormente (describir cada una de las estrategias para cada uno de los jugadores y colocar los pagos resultantes en una matriz), de donde se generaría la siguiente matriz:

Jugadores Uno/ Dos	(I , I)	(I , D)	(D , I)	(D , D)
I	(<u>6</u> , 2)	(<u>6</u> , 2)	(2 , <u>4</u>)	(<u>2</u> , <u>4</u>)
D	(4 , <u>2</u>)	(0 , 0)	(<u>4</u> , <u>2</u>)	(0 , 0)

Note que luego de hacer el análisis de los pagos para cada una de las combinaciones posibles de estrategias obtenemos dos EN, pero un solo EPNS; como el *Jugador Uno* juega primero, puede decidir el EN que más le convenga: en este caso jugará D, porque al comparar los dos equilibrios $4 > 2$, entonces el EPNS= [D, (D, I)] es el único EPNS en este ejemplo.

Importancia de los juegos dinámicos

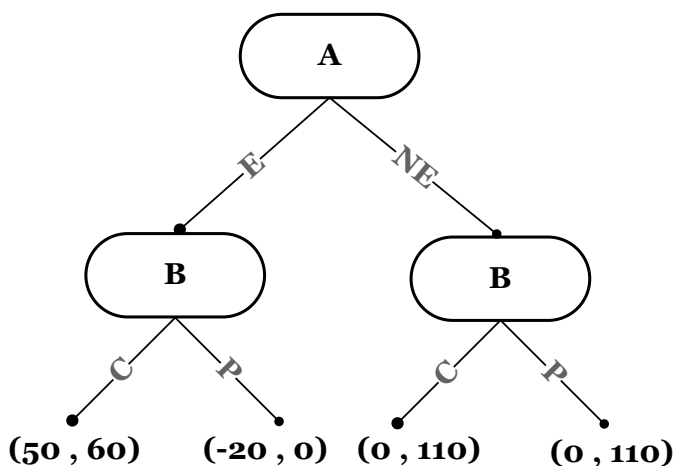
Antes de desarrollar otras aplicaciones vale la pena hacer algunos comentarios acerca de la importancia de este tipo de juegos.

Uno tiende a pensar que en los juegos dinámicos el que juega primero tiene ventaja (p. ej., en la batalla de los sexos); sin embargo, ése no siempre es el caso (p. ej., dilema del prisionero). En este tipo de interacciones existen estrategias subyacentes que se pueden englobar en tres categorías: amenazas, promesas y compromisos.

La diferencia entre los compromisos y las promesas, es que las últimas son condicionales a ciertos cursos de acción (p. ej., yo me “comprometo” a jugar siempre X versus yo “prometo” jugar X si usted juega Y). Por otro lado, la diferencia entre las amenazas y las promesas (ambas son condicionales), es que con estas últimas al otro jugador le irá mejor si cumple con lo pactado, mientras que con las amenazas le irá peor.

Ya sean promesas, compromisos o amenazas, existen dos condiciones necesarias para que puedan generar equilibrio en un juego determinado: primero, deben ser observables, y segundo, deben ser creíbles.

Al respecto veamos el juego de las amenazas vacías que se muestra a continuación.



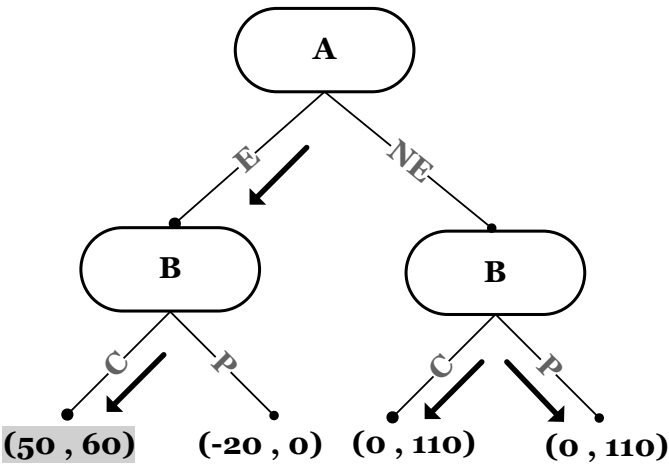
Imagine que la empresa A está estudiando la posibilidad de entrar en un mercado (E) actualmente dominado por la empresa B, o no entrar (NE). La empresa B puede coludir con la empresa A y compartir las rentas que se generan en ese mercado (C), o amenazar con iniciar una guerra de precios si la empresa A decide entrar (P). El conjunto de estrategias de A es E o NE, mientras que el conjunto de estrategias de B es (C, C), (C, P), (P, C) y (P, P).

Note que debido a la estructura del juego existen algunos pares de estrategias que no tienen sentido como, por ejemplo, [NE, (P, P)]; significa que en una primera instancia del juego ($t = 1$) la empresa

A decide no entrar a competir, pero como con la estrategia (P, P) la empresa B siempre hace una guerra de precios, [NE, (P, P)] significa que a pesar de que A no entra, B hace una guerra de precios; en todo caso, se deben analizar “todas” las estrategias para hallar el EPNS del juego.

Al hacer un análisis del sub-juego de la izquierda podemos ver que B (en caso de que A entre al mercado) está mejor coludiendo (jugando C) que haciendo una guerra de precios (jugando P) ya que $60 > 0$. Por otro lado, si analizamos el sub-juego de la derecha, vemos que B (suponiendo que A no entre al mercado) es indiferente entre coludir y hacer una guerra de precios (en ambos casos obtiene un pago de 110).

Finalmente, y analizando el primer sub-juego, si A entra al mercado genera un pago de 50 (sabe del supuesto del *common knowledge*) mientras que si B decide entrar colude, y si no entra B recibe un pago de 0. Si A entra al mercado obtiene [E, (C, C)] como EPNS del juego²². En el siguiente gráfico se puede ver el análisis de los sub-juegos:



22 Comprobar que [E,(C,C)] y [E,(C,P)] son ambos EPNS. Ayuda: construya la matriz de pagos.

Si la empresa B “amenaza” con iniciar una guerra de precios podría o no desviar el equilibrio, a menos que la amenaza sea creíble. Eso lo conoce la empresa A y, en consecuencia, no debería preocuparse con una potencial situación de guerra de precios.

En el mundo real de los negocios se pueden encontrar múltiples ejemplos donde las promesas, compromisos y amenazas no son creíbles. El caso de Boeing/Airbus en cuanto a la construcción de los súper aviones (con capacidad para más de 500 pasajeros) es un buen ejemplo de esa situación. Era claro que a finales de la década de los sesenta, cuando se comenzó hablar de la posibilidad de construir ese tipo de aeronaves, el mercado podía soportar, cuando mucho, una sola empresa productora dadas las enormes economías de escala requeridas para que un proyecto de esa envergadura fuera rentable.

En ese momento Boeing anunció que construiría dicho avión a fin de que Airbus no comenzara su propio proyecto... Sin embargo, dado que Boeing era el productor más importante de aviones medianos (lo cual Airbus sabía), y dado que ese nicho de mercado se vería seriamente afectado si llegaran a tener éxito los súper aviones, ¿es creíble que Boeing construiría ese tipo de aviones?

Airbus comenzó a construir el avión independientemente de la “amenaza” de Boeing de que ya había comenzado su proyecto; sin embargo, a pesar de que la amenaza de Boeing no era creíble, Airbus retrasó el comienzo de la construcción de los súper aviones tres años²³.

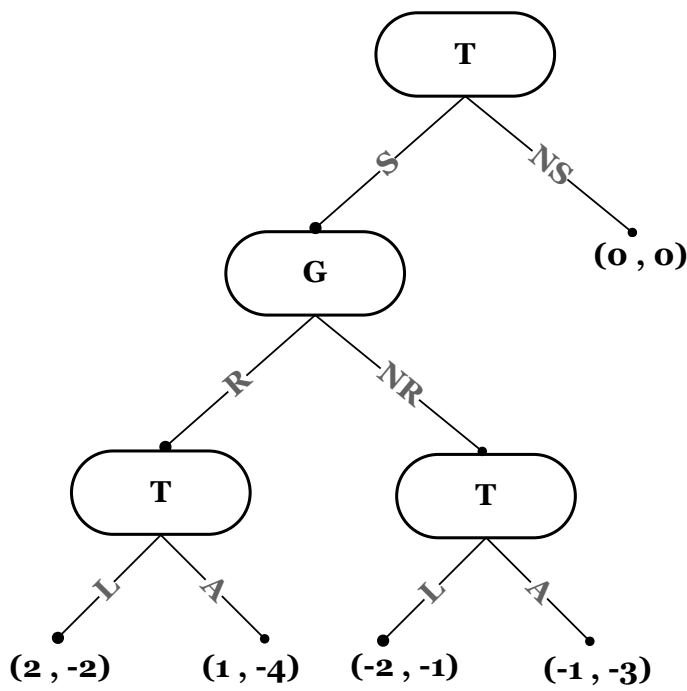
Salgamos por un momento del marco referencial de negocios, y analicemos las amenazas terroristas en el contexto de juegos dinámicos.

23 Bodily (2009).

Aplicaciones

APLICACIÓN 1

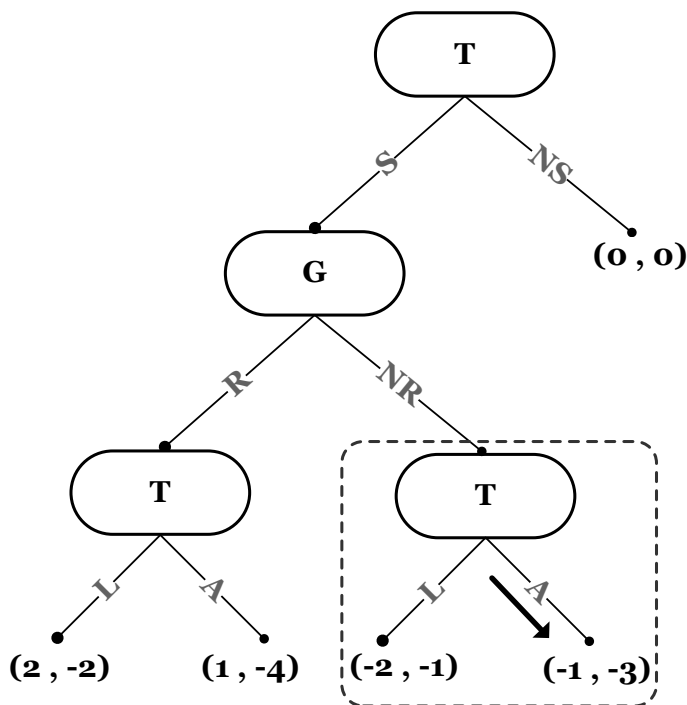
Muchos países tienen como política de Estado no negociar con terroristas que secuestran a sus víctimas buscando alguna recompensa (e.g., dinero, concesiones políticas, etc.). Suponga el siguiente juego de amenazas terroristas:



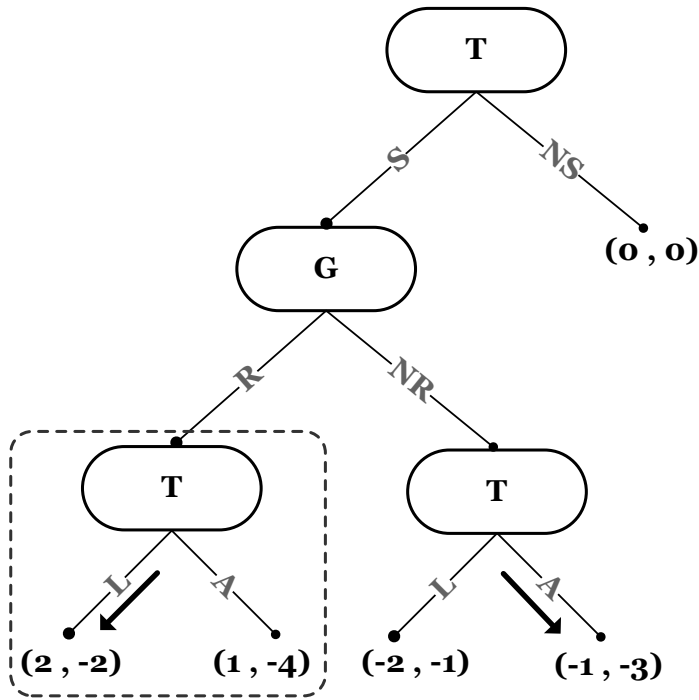
El juego lo inicia el terrorista (T) que tiene dos posibles acciones: secuestrar (S) o no secuestrar (NS). Si ocurre S entonces el gobierno (G) tiene dos posibilidades, pagar el rescate (R) o no hacerlo (NR).

Independientemente de si el gobierno juega R o NR, los terroristas tiene dos alternativas: liberar a los secuestrados (L) o asesinarlos (A).

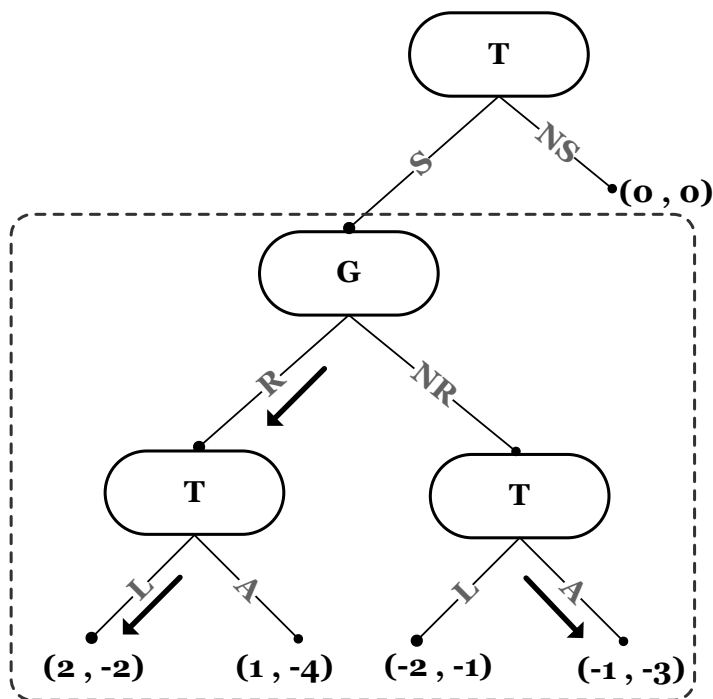
Analicemos los sub-juegos. Si el gobierno juega NR, los terroristas están mejor asesinando a los secuestrados ($-1 > -2$), lo cual puede explicarse como una señal de crueldad que puede ser utilizada a su favor en el futuro; mientras que si liberan a los secuestrados sin haber recibido alguna recompensa, enviarían una señal de debilidad, como se muestra abajo:



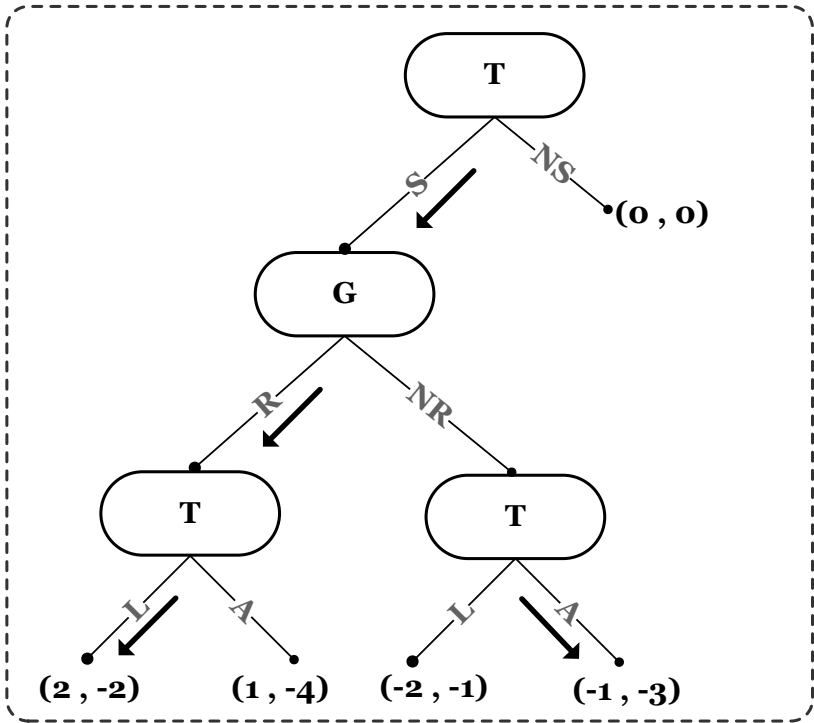
Por otro lado, si el gobierno paga el rescate (juega R), los terroristas estarían mejor liberando a los secuestrados ($2 > 1$), lo cual se representa un triunfo para ellos. Ver abajo:



El gobierno ahora sabe que si juega R liberan a los secuestrados y obtiene un pago de -2 (o un castigo de la sociedad, pero por lo menos se salvaron los secuestrados), mientras que si no paga (juega NR) obtiene un pago de -3 (un castigo social mayor porque los secuestrados murieron): el gobierno está mejor jugando R, tal como se muestra abajo:



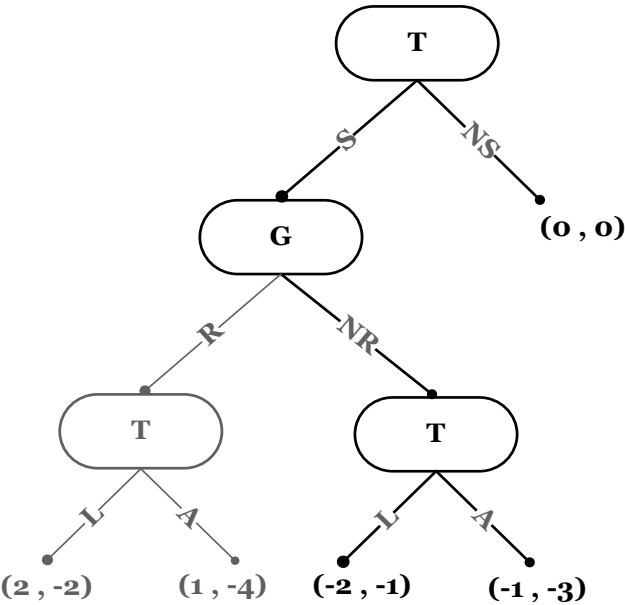
Sabiendo esta dinámica, los terroristas están mejor secuestrando y el EPNS es $[S, (L, A); R]$, es decir, en $t = 1$ los terroristas juegan S, en $t = 3$ si el gobierno juega R ellos juegan L y si el gobierno juega NR ellos juegan A, y en $t = 2$ (momento en el que juega el gobierno) el gobierno juega R. Ver abajo:



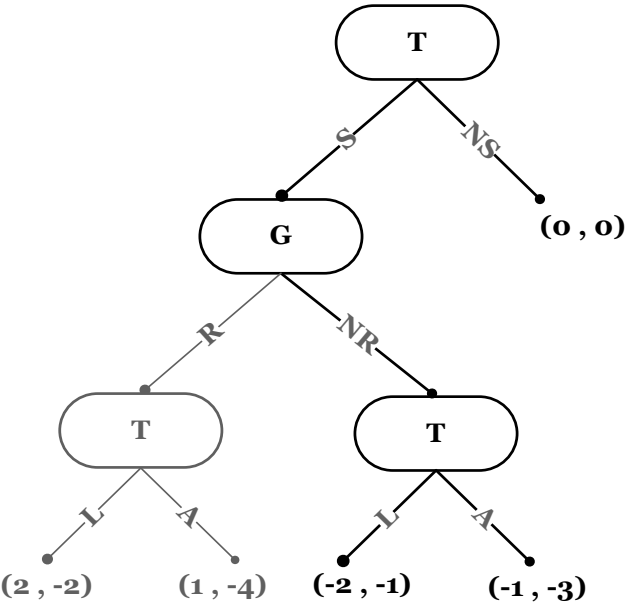
En la siguiente matriz el juego se representa de forma estática y se muestran todos los EN y el único EPNS:

T/G	R	NR	
S, (L, L)	(<u>2</u> , -2)	(-2, <u>-1</u>)	
S, (L, A)	(<u>2</u> , <u>-2</u>)	(-1, -3)	→ EPNS
S, (A, L)	(1, -4)	(-2, <u>-1</u>)	
S, (A, A)	(1, -4)	(-1, <u>-3</u>)	
NS, (L, L)	(0, <u>0</u>)	(<u>0</u> , <u>0</u>)	→ EN pero no EPNS
NS, (L, A)	(0, <u>0</u>)	(<u>0</u> , <u>0</u>)	
NS, (A, L)	(0, <u>0</u>)	(<u>0</u> , <u>0</u>)	
NS, (A, A)	(0, <u>0</u>)	(<u>0</u> , <u>0</u>)	

¿Cómo puede el gobierno “salirse” de este equilibrio? Claramente haciendo la promesa de que en caso de secuestro no negociará...; note que si la promesa es creíble el juego se transforma en el que se muestra aquí:



Haciendo el análisis de ese juego modificado, nos encontramos con la siguiente situación:



En este caso los terroristas están mejor no secuestrando.

El problema aquí consiste en cómo hacer para que la promesa sea creíble. La reputación, por ejemplo, es un factor importante para lograr ese objetivo. El Estado de Israel tiene la reputación de nunca negociar con terroristas, por lo tanto, un terrorista sabe *ex ante* que no podrá llegar a una solución negociada con ese país.

Además de la reputación, las señales también juegan un papel importante en ese tipo de juegos. En 1983 Jaime Betancur, hermano del presidente de Colombia, Belisario Betancur, fue secuestrado por un grupo guerrillero. Días después el presidente declaró por televisión que ya tenía listo el discurso para el entierro de su hermano²⁴.

Acerca de esos y otros factores que hacen que las promesas, compromisos y amenazas sean creíbles en una interacción estratégica seguiremos hablando a lo largo del libro. Veamos otra aplicación:

Analicemos un caso financiero que llamaremos el juego de las pastillas envenenadas (*poisson pills*) relacionado con las tácticas que utilizan las empresas para evitar ser adquiridas hostilmente.

APLICACIÓN 2^[25]

En este caso la empresa C está decidiendo si aplica o no una estrategia estilo Poisson Pills (PP) para evitar ser adquirida hostilmente. Entre muchas de las posibles estrategias que buscan disminuir el valor de mercado de la empresa que está siendo amenazada están: 1. Vender activos valiosos; 2. Aumentar el endeudamiento; 3. Establecer cláusulas de súper mayorías, o 4. Brindar compensaciones adicionales a los empleados en caso de ser adquiridos.

24 Para más detalles, ver [<http://www.semana.com/nacion/articulo/el-secuestro-del-ao/4517-3>], consultada el 5 de mayo de 2013.

25 Adaptado de Dutta (1999).

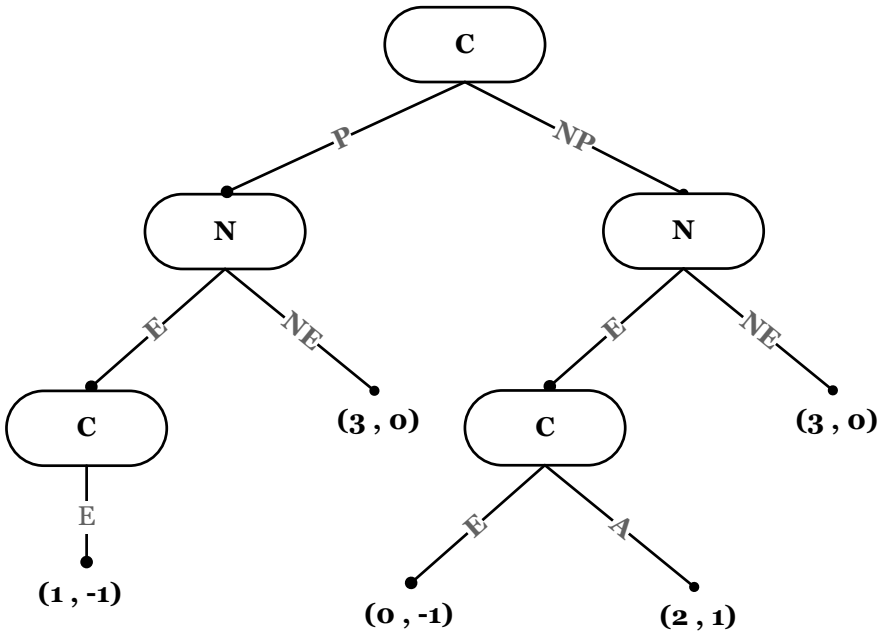
Considere que la empresa C está decidiendo entre adoptar alguna medida de protección ante tomas hostiles de control (*Poisson Pills*), que llamaremos P, o no hacerlo, que llamaremos NP.

Considere la empresa N que está estudiando la posibilidad de hacer una oferta hostil por las acciones de la empresa C, que llamaremos la estrategia E, o no hacerlo, que llamaremos NE.

Como se muestra en la figura abajo, si C adopta la estrategia P y aun así N decide tratar de tomar el control, entonces los pagos serán 1 para la empresa C y -1 para la empresa N. Ahora bien, si la empresa N, viendo que C ha tomado la acción P, decide no entrar, su pago será de 0, mientras que el pago de C subirá a 3.

Por otro lado, si C decide jugar NP, la empresa N, observando la acción de C, puede jugar E donde la empresa C debe decidir si lucha por el control (jugar E) o más bien llega a un acuerdo (jugar A). En el primer caso, el pago de C se reduce a 0 y el pago de N cae a -1; ahora bien, si ambas llegan a un acuerdo, sus pagos serán de 2 y 1, para C y N respectivamente.

Si C decide jugar NP, pero la empresa N decide no entrar a luchar por el control (jugar NE), los pagos serán 3 y 0, para la empresa C y N, respectivamente.



Es importante tener claro el conjunto de estrategias para cada jugador: note que la empresa C juega primero, por lo que sus acciones en ese momento son P y NP.

En un tercer momento, la empresa C vuelve a jugar (luego de saber qué hizo la empresa N) y debe decidir entre también pelear por el control (jugar E) o llegar a un acuerdo (jugar A).

Ahora bien, si la empresa C juega P, la única posibilidad de C es pelear por el control (siempre jugar E), pero, si la empresa C juega NE, puede hacer dos cosas: pelear (E) o llegar a un acuerdo (A). Como el conjunto de estrategias indica qué harán los jugadores en cada momento de su juego, podemos escribir ese conjunto como:

$$(P,(E,E); P,(E,A); NP,(E,E); NP,(E,A))$$

Por ejemplo, la estrategia se interpreta como: la empresa C en un primer momento juega P y, en un segundo momento juega E, independientemente de dónde se encuentre en el juego. Si está en el sub-juego de la izquierda del gráfico de arriba, jugará E y si está en el sub-juego del gráfico de la derecha, también jugará E²⁶.

El conjunto de estrategias de N es más sencillo de analizar. Esa empresa tiene solo dos alternativas E (entrar a pelear por el control de C) o NE (no hacerlo). Sus estrategias dependen de lo que haga C, por lo tanto, el conjunto completo de estrategias será:

$$((E,E),(E,NE),(N,E),(NE,NE))$$

Por ejemplo, una interpretación de esas estrategias sería: es siempre ir por el control de C, es nunca ir por el control de C, es solo pelear por el control si C juega NP y, por último, es solo pelear por el control si C adopta P, de lo contrario no hacerlo²⁷.

En el desarrollo del juego tenemos que un equilibrio es que la empresa tome una de esas medidas de protección (verificar haciendo un análisis de equilibrios para cada uno de los sub-juegos).

Esta aplicación nos lleva a preguntarnos si el equilibrio de adoptar una *poisson pill* y, en consecuencia, proteger a la empresa de una toma hostil de control representa un “buen” equilibrio para los accionistas. Por supuesto, la respuesta dependerá, por un lado, de la adopción del tipo de protecciones que pueden enviar una señal de subvaluación de la empresa; pero, por otro, ese tipo de medidas pue-

26 Se podría decir que es inútil indicar qué hará la empresa C cuando está en el juego de la derecha, dado que jugando P ya orientó el juego hacia el sub-juego de la izquierda. No es inútil indicar qué hacer en el sub-juego de la derecha, ya que es necesario que el conjunto de estrategias nos diga qué “haría” la empresa cada vez que deba jugar. Es decir, el conjunto de estrategias debe ser un plan completo de acciones en cada sección del juego, independientemente de que se llegue allí o no.

27 Esta última acción del conjunto de estrategias tampoco parece muy lógica, pero como se dijo anteriormente, debe describirse completamente cada una de las posibles acciones en el recorrido del juego.

de bajar la presión de la gerencia al presentar resultados de corto plazo, sacrificando proyectos de inversión de largo plazo.

Un estudio realizado en Pensilvania²⁸, donde las empresas podían decidir si adoptaban o no medidas de protección contra *takeovers*, mostró que aquellas que no tomaron esa opción fueron “premiadas” con un incremento en el precio de sus acciones.

APLICACIÓN 3^[29]

Una forma de extorsión que se presenta algunas veces en el ambiente corporativo es cuando una empresa pequeña amenaza con demandar a otra grande con el objetivo de ser compensada mediante un acuerdo extrajudicial. Sea A la empresa pequeña y B la empresa grande. Si A le ofrece una oferta (O) a B para llegar a un acuerdo extrajudicial debe incurrir en un costo, llamémoslo c . Supongamos que el monto de la oferta es s .

Por su parte, B puede pagar esa cantidad aceptando el acuerdo propuesto (A) o rechazar la oferta (R). En caso de que rechace la oferta, la empresa A debe decidir si va a juicio entablando formalmente una demanda contra A (J), o no hacerlo (NJ). Ir a juicio es costoso para ambas empresas, la empresa A debe incurrir en un costo d si va a juicio, mientras que A paga p .

El resultado del juicio es incierto, pero es *common knowledge* que la empresa A ganará el pleito legal con una probabilidad, donde recibe una compensación monetaria igual a x de la empresa B,

28 Szewczyk y Tsetsekos (1992).

29 Adaptado de Rasmussen (2007).

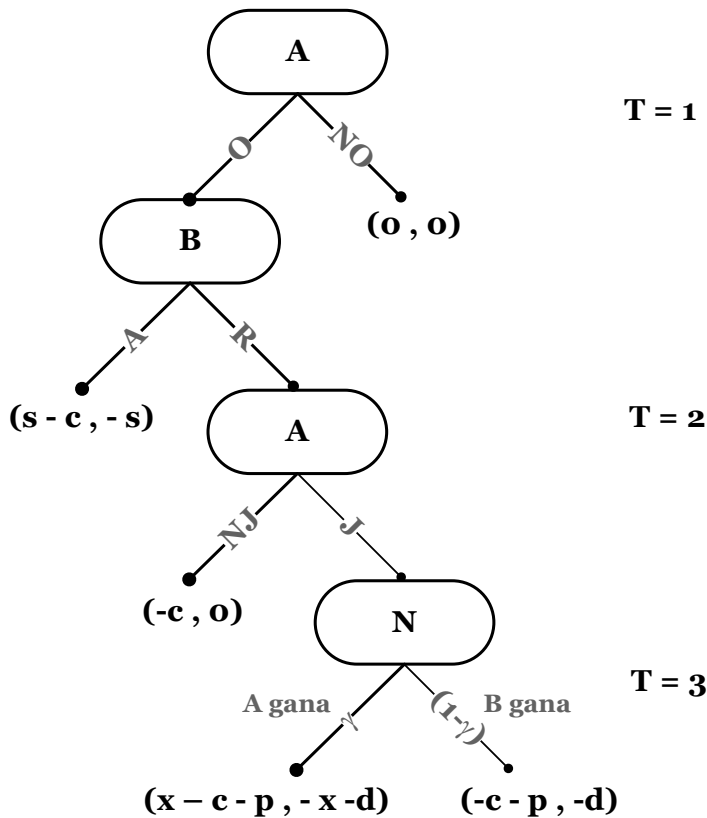
y lo perderá con una probabilidad de, en cuyo caso no recibe ninguna compensación.

Note que la naturaleza entra en este juego como un supra-jugador decidiendo quién gana la demanda.

Suponemos que

$$\gamma x < p$$

Es decir, el valor esperado de perder el juicio para B (y de ganarlo para A) es menor que el costo del proceso legal (p). El juego se presenta en forma gráfica abajo:



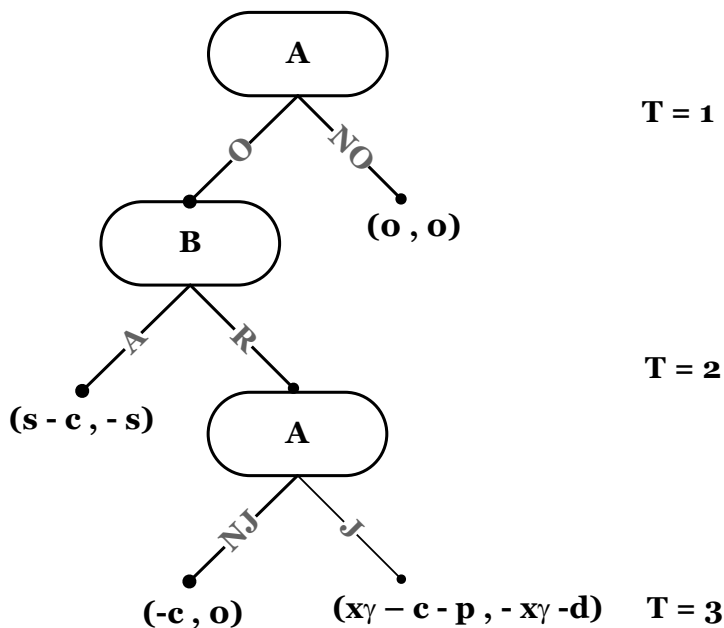
Aplicando el procedimiento de inducción hacia atrás tenemos lo siguiente: en $T=3$ es claro que el valor esperado para A de ir al juicio es:

$$\frac{(x - c - p) \gamma + (-c - p)(1 - \gamma)}{x\gamma - c - p}$$

Y para B es:

$$\frac{(-x - d) \gamma + (-d)(1 - \gamma)}{-x\gamma - d}$$

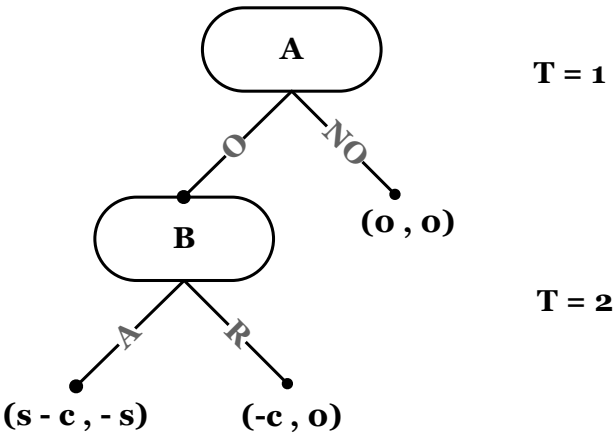
Luego de calculados los pagos esperados el juego se puede representar de la siguiente forma:



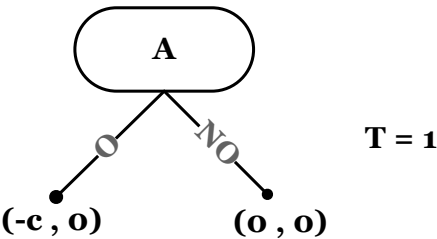
¿Cuál es la mejor respuesta que puede hacer A si B rechaza el acuerdo propuesto? Si no va a juicio A recibe $-c$, y si va a juicio recibe un pago esperado de $xy - c - p$. Por lo tanto irá a juicio solo si:

$$\begin{aligned} -c &< xy - c - p \\ p &< xy \end{aligned}$$

Lo cual contradice el supuesto de partida; en consecuencia, si B rechaza la oferta A no irá a juicio. El juego se puede representar de la siguiente manera:



¿Cuál es la mejor respuesta de B cuando recibe la oferta de hacer un acuerdo extrajudicial? Si acepta obtiene $-s$ como pago, y si rechaza obtiene 0, por lo tanto B rechaza la oferta de A, y el juego se reduce a:



En este momento A debe decidir si hace la oferta y obtiene un pago de $-c$, o no la hace y obtiene un pago de 0; evidentemente, A no hace la oferta. El EPNS se escribe como $[(NO, NJ), R]$.

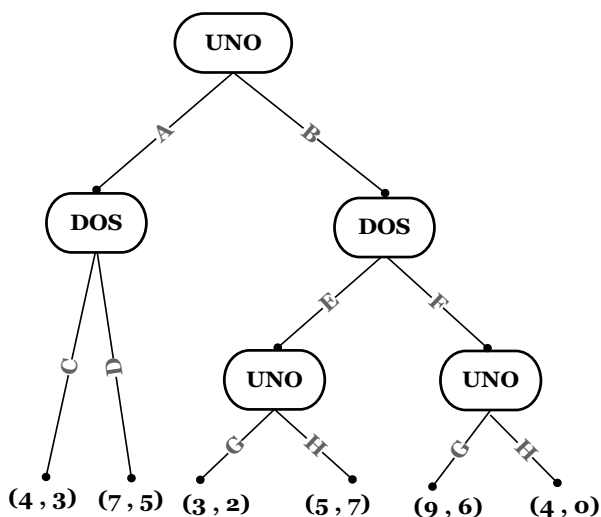
Note que este juego ;termina antes de comenzar! Por lo tanto, si las amenazas no son creíbles (en este caso B sabía *ex ante* que A no iría a juicio) no alteran el equilibrio.

Otro aspecto interesante de este juego es que si el sistema legal es “demasiado” eficiente, en el sentido de que no sea muy costoso llevar a juicio a una empresa, entonces el equilibrio anterior se rompe y la empresa A demanda a la empresa B (si $p < xy$).

Terminemos este tercer capítulo con el siguiente problema resuelto:

PROBLEMA RESUELTO 1

Considere el siguiente juego entre UNO y DOS:



- a. ¿Cuál es el conjunto de acciones y estrategias de cada jugador?
- b. Represente el juego en su forma estratégica.
- c. Encuentre todos los EN y diga para cada uno de ellos el pago que recibe cada jugador, y de estos, indique cuales son EPNS.
- d. Usted es el jugador UNO. ¿Qué estrategia escoge y por qué?

Solución:

- a) Las acciones y estrategias de los jugadores serían:

	UNO	DOS
Acciones	[A, B, G, H]	[C, D, E, F]
Estrategias	[A, (G, G); A, (G, H) A, (H, G); A, (H, H); B, (G, G); B, (G, H) B, (H, G); B, (H, H)]	[(C, E); (C, F); (D, E); (D, F)]

- a) La representación matricial del juego sería:

UNO/DOS	C, E	C, F	D, E	D, F
A, (G, G)	4, 3	4, 3	7, 5	7, 5
A, (G, H)	4, 3	4, 3	7, 5	7, 5
A, (H, G)	4, 3	4, 3	7, 5	7, 5
A, (H, H)	4, 3	4, 3	7, 5	7, 5
B, (G, G)	3, 2	9, 6	3, 2	9, 6
B, (G, H)	3, 2	4, 0	3, 2	4, 0
B, (H, G)	5, 7	9, 6	5, 7	9, 6
B, (H, H)	5, 7	4, 0	5, 7	4, 0

b) Los EN son:

1. $[A, (G, G); (D, E)]$. Pago: (7, 5)
2. $[A, (G, H); (D, E)]$. Pago: (7, 5)
3. $[A, (H, G); (D, E)]$. Pago: (7, 5)
4. $[A, (H, H); (D, E)]$. Pago: (7, 5)

Note que los cuatro primeros EN se pueden resumir como: $[A, (X, X); (D, E)]$, donde $X = [G, H]$.

5. $[B, (G, G); (C, F)]$. Pago: (9, 6)
6. $[B, (G, G); (D, F)]$. Pago: (9, 6)

Note que los dos EN se pueden resumir como: $[B, (G, G); (Y, F)]$, donde $Y = [C, D]$.

7. $[B, (H, G); (C, E)]$. Pago: (5, 7)
8. $[B, (H, H); (C, E)]$. Pago: (5, 7)

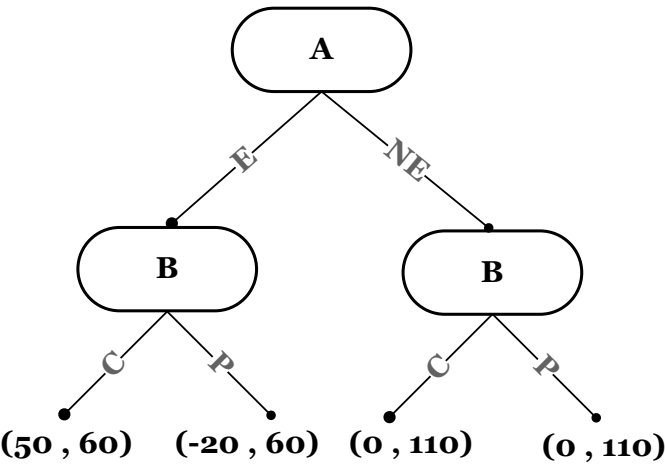
Note que esos dos EN se pueden resumir como: $[B, (H, Z); (C, E)]$, donde $Z = [G, H]$.

- c) Es claro que el jugador UNO jugará $A, (X, X)$ ya que eso le asegura un pago de 7, por lo que $[A, (X, X); (D, E)]$, donde $X = [G, H]$, son EPNS. Si UNO juega B en el primer turno, el jugador DOS tendrá incentivos para jugar la estrategia (C, E), que le asegura un pago de 7, pero en ese caso el jugador UNO juega óptimamente $B, (H, Z)$ donde $Z = [G, H]$ obteniendo un pago de 5. Como $7 > 5$, el jugador UNO comienza el juego jugando A.

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos

PROBLEMA 1

Considere nuevamente el juego de las amenazas creíbles cuya secuencia se muestra a continuación:



Suponga que B encuentra una manera creíble de amenazar a A con iniciar una guerra de precios si A entra al mercado: ¿cómo deberían modificarse los pagos para que dicha amenaza genere el equilibrio $[NE, (P, C)]$ o $[NE, (P, P)]$?, ¿qué tipo de “amenazas” de guerra de precios pueden ser “creíbles” en ese contexto para que se modifique el equilibrio del juego?

Solución:

Por ejemplo, si B tiene capacidad ociosa (y A lo sabe) puede amenazar con disminuir los precios aumentando el volumen y, gracias a su capacidad ociosa, reducir costos. De esa forma B se hace más eficiente en términos de rentabilidad, cambiando su pago, por ejemplo, de 60 a 61.

PROBLEMA 2

Considere el juego entre los *Jugadores 1, 2 y 3* que se muestra abajo. Haga una representación extensiva de este juego donde el *Jugador 3* juega primero, el *Jugador 2* juega segundo y el *Jugador 1* juega de último. Luego indique (si existen) el o los Equilibrios Perfectos de Nash en Sub-juegos:

		Jugador 3 escoge A	
		Jugador 2	
		L	R
Jugador 1	U	(0 , 5 , 7)	(9 , 8 , 12)
	D	(9 , 2 , 5)	(14 , 6 , 7)

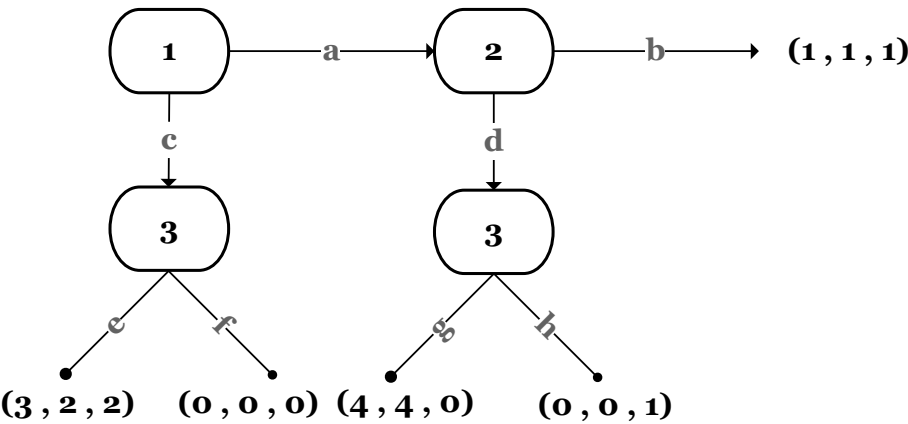
		Jugador 3 escoge B	
		Jugador 2	
		L	R
Jugador 1	U	(8 , 7 , 6)	(5 , 8 , 15)
	D	(0 , 5 , 0)	(6 , 7 , 11)

Solución:

Este juego tiene varios EPNS pero todos resultan en el mismo vector de pagos. El primer grupo es: $[B, (X, R), (X, X, D, D)]$ y el segundo $[B, (X, R), (X, X, U, D)]$ donde X puede ser R o L para 2, y U o D para 1 en el primer sub-juego.

PROBLEMA 3

Considere el juego que se presenta a continuación. ¿Cuáles son los Equilibrios Perfectos de Nash en Sub-juegos? Represente este juego en forma estratégica (en forma de matriz) y compruebe todos los EN y, de ellos, diga cuáles son EPNS. Como siempre, el vector (x, y, z) representa los pagos de los *Jugadores 1, 2 y 3* respectivamente (¡ojo no confundirse!). Nota: los EPNS deben estar escritos de la forma $[X, Y, (Z, Z)]$ donde X es la estrategia óptima del *Jugador 1*, el cual tiene dos estrategias (jugar c o jugar a); Y es la estrategia óptima del *Jugador 2* el cual también tiene dos estrategias (jugar b o jugar d), y, (Z, Z) es la estrategia óptima del *Jugador 3* [jugar (e, g), (e, h), (f, g) y (f, h)]. Verifique que en los EPNS encontrados ningún jugador tiene incentivos para moverse.



Solución:

EPNS: $[c, b, (e, g)], [c, b, (e, h)]$ y $[c, d, (e, h)]$.

PROBLEMA 4

Usted decidió que sería banquero luego de graduarse. Todavía le faltan dos años, pero de todas formas quiere comenzar a “practicar” el negocio. Le pide a su novia(o) y a su mejor amigo(a) 10 millones a cada uno con la promesa de que dentro de dos años, cuando todos se hayan graduado, les devolverá 14,4 millones a cada uno (rendimiento de 20% anual efectivo).

Con los 20 millones usted piensa comprar un lote de terreno que están comenzando a urbanizar en las afueras de la ciudad. En dos años usted estima que puede vender ese lote en 36,45 millones (rendimiento de 35% anual efectivo). Su novia(o) y amigo(a) a pesar de que lo quieren mucho, establecieron una cláusula donde luego de un año pueden, si así lo desean, retirar su dinero más los intereses causados en ese año, es decir, pueden retirar 12 millones (10 millones de capital más 2 millones de intereses). Sin embargo, si usted se ve en la necesidad de vender el lote un año después de comprado, solo podrá recuperar los 20 millones invertidos inicialmente.

- a. Es claro que si uno de los jugadores (novia(o) o amigo(a)) decide ejercer la cláusula, podrá recuperar el dinero invertido (20 millones > 12 millones), pero el otro solo obtendrá 8 millones (8 millones < 10 millones < 12 millones). Por otro lado, si ninguno ejerce la cláusula, ambos reciben el capital más los intereses en $T = 2$ y todos salen ganando..., claro, siempre y cuando usted logre obtener los 36,45 millones al final del segundo año. Dicho esto, represente esta interacción como un juego dinámico entre la novia(o) y el amigo(o) y encuentre el o los EPNS.

Solución:

Existen dos equilibrios puros de Nash $EN(R, R)$ y $EN(E, E)$. Y $EN(R, R)$ es un equilibrio no deseable, pues ninguno obtiene los intereses y no se llevaría a cabo el negocio.

- b. ¿Cómo puede forzar el equilibrio bueno? (cuidado con las promesas vacías)

Solución:

Si el iniciador del juego dispone de los recursos para cubrir los intereses en el primer periodo, la matriz de pago de $T = 1$ sería la siguiente:

		Novia	
		R	E
Amigo	R	(10 , 10)	(12 , 12)
	E	(12 , 12)	(14.4 , 14.4)

Entonces ya el $EN(R, R)$ no sería más un EN de este juego. Entonces, usted debería conseguir 4 millones prestados para cubrir los intereses y prometer pagarlos en caso de que ellos decidan retirarse del negocio. De esta manera los jugadores decidirán esperar en $T = 1$ ya que les genera una utilidad esperada mayor.

CAPÍTULO 4.

JUEGOS REPETIDOS E INFORMACIÓN IMPERFECTA

En la primera parte de este capítulo nos concentraremos en otro tipo de juegos dinámicos conocidos como juegos repetidos. Como su nombre lo sugiere, hay un juego base que se repite un número finito o infinito de veces. Luego haremos una introducción a los juegos de información imperfecta, que representan situaciones donde alguno de los jugadores no conoce exactamente dónde se encuentra dentro de la historia del juego.

Juegos repetidos finitos

Considere el juego abstracto 1 que muestra un dilema del prisionero entre los jugadores 1 y 2:

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	I	(2 , 2)	(6 , 1)
	D	(1 , 6)	(5 , 5)

Es claro que ambos jugadores estarían mejor jugando la estrategia D y obteniendo el Equilibrio de Nash (EN): (D, D). Sin embargo, ese no es un equilibrio ya que ambos jugadores tendrían incentivos para moverse ($6 > 5$). Un análisis rápido muestra que el EN de esta interacción es (I, I).

Supongamos que ese mismo juego se repite una vez más. Los pagos acumulados de la segunda ronda se presentan en la siguiente matriz:

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	I	(4 , 4)	(8 , 3)
	D	(3 , 8)	(7 , 7)

Donde a cada valor se le suma 2, que fue el pago obtenido en la interacción anterior. ¿Cambia el equilibrio para este juego si se juega dos veces? Lamentablemente no y el Equilibrio Perfecto de Nash en Sub-juegos (EPNS) será en este caso $[(I, I), (I, I)]$, es decir, cada uno jugará I en la primera ronda e I en la segunda. Note que cada ronda es un sub-juego.

¿Qué pasa si se repite el juego tres veces? ¿Cuatro? Es claro que no importa cuantas veces se repita el juego, el EPNS será jugar el EN cada vez³⁰.

Considere ahora el juego abstracto 2:

		Jugador 2		
		I	M	D
Jugador 1	I	(1 , 1)	(5 , 0)	(0, 0)
	M	(0 , 5)	(4 , 4)	(0 , 0)
	D	(0 , 0)	(0 , 0)	(3 , 3)

Es fácil ver que ese juego tiene dos EN, a saber (I, I) y (D, D). Sin embargo, (D, D) es un mejor EN que (I, I) porque $3 > 1$. Ahora bien, los dos jugadores estarían mejor si jugaran (M, M) ya que obtendrían un pago de 4 cada uno, pero ese par de estrategias no es un EN, ya que si uno de los jugadores juega M el otro tendrá incentivos para desviarse a I ($5 > 4$).

30 Para una demostración formal de esta afirmación consultar Fudenberg (1991).

Suponga que los dos jugadores convienen en jugar este mismo juego dos veces, y cada uno se compromete a jugar M la primera vez y D la segunda; es decir, se propone el siguiente par de estrategias: [(M, D), (M, D)]. Si se cumple el acuerdo, cada jugador obtendría un pago de 7 (4 por el primer juego y 3 por el segundo), que es mayor que el pago de 6 que se generaría si se juega el EN, (D, D), en cada ronda. ¿Representa entonces [(M, D), (M, D)] un EPNS?

Para responder la pregunta primero tenemos que verificar que ninguno de los jugadores tiene incentivos para desviarse del equilibrio propuesto. Supongamos que en la primera movida el primer jugador se desvía, es decir, se juega [(I, D), (M, D)] en ese caso su beneficio es $5 + 3 = 8$, que es mayor que el beneficio que obtendría si jugara lo pactado, [(M, D), (M, D)], donde obtendría $4 + 3 = 7$. Por lo tanto [(M, D), (M, D)] no es un EPNS porque al menos un jugador tiene incentivos para desviarse.

Ahora bien, el segundo jugador sabe (*common knowledge*) que el primero tiene incentivos para desviarse y, en consecuencia, en la primera iteración no jugará M sino D. Esto también lo sabe el primer jugador, y en consecuencia no jugará I sino D ($3 > 1$). Por lo que llegamos al siguiente equilibrio: [(D, D), (D, D)]. Es fácil verificar que una vez allí ninguno de los jugadores tendrá incentivos para moverse y, en consecuencia, el EPNS es jugar el EN (D, D) cada vez.

¿Qué pasa si se aplica una amenaza donde el jugador que cumple la promesa juega I (y no D) en la segunda ronda si en la primera el otro jugador juega I (y no M), es decir, si el otro jugador se desvía? En ese caso el jugador que se desvía obtiene $5 + 1 = 6$, que es menor que lo que podría obtener si no se desvía $4 + 3 = 7$. Pero habrá que preguntarse si esa “amenaza” de jugar I (y no D) en la segunda ronda es creíble.

Si el jugador que no se desvió en la primera ronda cumple la amenaza y obtiene $0 + 1 = 1$ (por haber jugado M en la primera ronda e I en la segunda), mientras que si en vez de jugar I en la

segunda ronda (como había amenazado), juega D, entonces obtiene $0 + 3 = 3$; en consecuencia, la amenaza no es creíble y el único EPNS es $[(D, D), (D, D)]$ donde el pago de cada uno es $3 + 3 = 6$.

Podemos concluir, entonces, que el EPNS siempre será jugar el EN en cada repetición o sub-juego, cuando este es finito. Cuando el juego es infinito se abren nuevas posibilidades.

Juegos repetidos infinitos

Considere de nuevo el juego abstracto 1 que reproducimos nuevamente abajo, pero suponga que se juega un número infinito de veces (o suficientemente grande):

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	I	(2 , 2)	(6 , 1)
	D	(1 , 6)	(5 , 5)

La estrategia de equilibrio en este caso (el EPNS) es jugar siempre D, y si alguno se desvía regresar a la estrategia de equilibrio I por el resto del juego. Para verificar este equilibrio calculamos los pagos de cada jugador siguiendo la estrategia de equilibrio y la comparamos con los pagos si se desvía.

Considerando una tasa de interés r , que representa la tasa de descuento de los pagos recibidos en el futuro, el valor presente de los

pagos para el *Jugador 1*, siguiendo la estrategia de equilibrio (D, D, D, ...), es³¹:

$$5 + 5/(1 + r) + 5/(1 + r)^2 + 5/(1+r)^3 + \dots = 5 + 5/r$$

Por otro lado, si el jugador se desvía obtiene:

$$6 + 2/(1 + r) + 2/(1 + r)^2 + 2/(1 + r)^3 + \dots = 6 + 2/r$$

Así, si se cumple que $6 + 2/r < 5 + 5/r \rightarrow r < 3$ no habrá incentivos para desviarse.

Si r es una tasa de interés se requiere que no sea mayor a 300% de forma que no haya incentivos para desviarse. Esa tasa de interés puede ser entendida como el costo de esperar los pagos futuros.

Note, entonces, que en este juego sí existe un EPNS, a saber, [(D, D, D, ...), (D, D, D, ...)], distinto (y mejor) que jugar el EN en cada uno de los sub-juegos, como en el caso de los juegos finitos vistos anteriormente. La intuición es la siguiente: en el juego finito siempre existen incentivos para desviarse antes del último sub-juego, pero en el caso de los juegos infinitos nunca se tendrá un último sub-juego, por lo tanto no existirán incentivos para desviarse.

Igualmente, no hace falta ninguna amenaza o promesa, simplemente es una situación donde los dos jugadores cuentan con incentivos para no desviarse.

Considere ahora el dilema del prisionero pero en su versión repetida infinitas veces. Abajo se presenta la misma matriz de pago ya estudiada, donde Daniel y Luis están decidiendo entre confesar (C) o no hacerlo (NC).

31 Note que este valor presente se puede calcular como una serie geométrica que converge. Para más detalles técnicos consultar Osborne (2004, p. 499).

		Luis	
		NC	C
Daniel	NC	$(-2, -2)$	$(-15, -1)$
	C	$(-1, -15)$	$(-9, -9)$

Es claro que si este juego se juega una sola vez, o un número finito de veces el EN, o el EPNS, siempre será ambos jugadores confesando. Ahora bien, si suponemos que este es un juego infinito y somos, digamos, Daniel y hacemos un pacto con Luis de nunca confesar nuestro pago será:

$$-2 - 2/(1+r) - 2/(1+r)^2 - 2/(1+r)^3 - \dots = -2 - 2/r$$

Si decidimos desviarnos el pago será:

$$-1 - 9/(1+r) - 9/(1+r)^2 - 9/(1+r)^3 - \dots = -1 - 9/r$$

Así, si se cumple que $-1 - 9/r < -2 - 2/r \rightarrow r < 7$ no habrá incentivos para desviarse. Como el juego es simétrico, este mismo razonamiento aplica también para Luis, por lo tanto, [(NC, NC, NC, ...), (NC, NC, NC, ...)] es un EPNS para este juego.

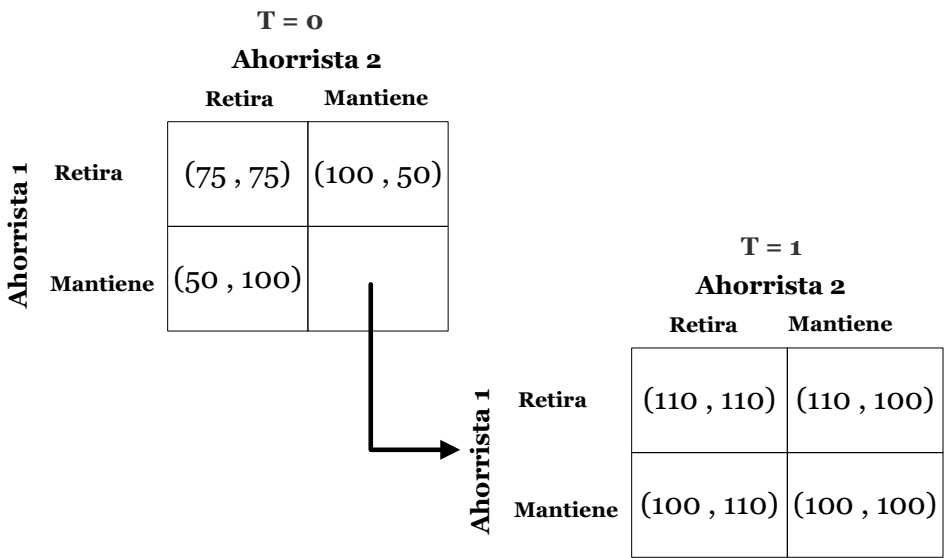
Veamos ahora una aplicación de esta idea de los juegos repetidos.

Aplicaciones

APLICACIÓN 1^[32]

Considere dos ahorristas que depositan cada uno 100 en un banco. El banco toma los 200 e invierte en $t = 0$ en un proyecto que termina en el período $t = 1$. Cuando el proyecto termine el banco le pagará a cada ahorrista 110 (cada ahorrista recibe una tasa efectiva de 10% por sus ahorros). Sin embargo, si el banco se ve en la necesidad de liquidar el proyecto anticipadamente, solo obtendrá 150 para distribuir entre sus dos ahorristas. Cada ahorrista sabe que en caso de que el banco liquide el proyecto el que retire su dinero primero obtiene 100 (lo que invirtió), y el segundo solo 50.

La representación de esta situación en un juego de dos etapas se muestra abajo:



32 Basado en Gibbons (1992).

En $t = 1$ los dos ahorristas deciden entre retirar el dinero (R) o mantenerlo en el banco (M). Si ambos deciden retirar, los dos reciben 110 (el rendimiento prometido por el banco) y si los dos deciden dejar el dinero en el banco, tendrán 100 en sus cuentas (los beneficios del proyecto se entregan solo cuando se retira el dinero del banco). En caso de que uno de ellos retire y el otro mantenga su dinero, el que retira recibe 110 y el que mantiene tendría 100 en su cuenta. Es claro que los dos jugadores tienen incentivos para retirar el dinero en $t = 1$ ($110 > 100$), por lo tanto el EN del sub-juego en $t = 1$ es (R, R).

Sabiendo lo que ocurrirá en $t = 1$, los jugadores se enfrentan al siguiente juego en $t = 0$:

		T = 0	
		Ahorrista 2	
		Retira	Mantiene
Ahorrista 1	Retira	(75 , 75)	(100 , 50)
	Mantiene	(50 , 100)	(110 , 110)

Si los dos mantienen su dinero en el banco el proyecto se termina y ambos pueden retirar el capital invertido más los intereses en $t = 1$ ^[33], pero si uno de ellos decide retirar su dinero primero que el otro en $t = 0$, entonces el que retira primero recupera su capital (100) y el que mantiene se queda solo con 50. En caso de que los dos decidan retirar, se reparte equitativamente lo que tiene el banco y cada jugador pierde solo 25 de su capital invertido inicialmente.

33 Aquí estamos ignorando el valor del dinero en el tiempo, por lo que no suponemos que el pago a mantener hoy es 110 para cada uno. Si consideramos una tasa de interés, debería descontarse un período de dicho pago.

Es claro que este juego tiene dos EPNS: uno “bueno”, $[(M, R), (M, R)]$, donde los dos ahorristas esperan a $t = 1$ para cobrar el capital más los intereses, pero al mismo tiempo existe un equilibrio malo, $[(R, R), (R, R)]$, que es lo que comúnmente se conoce como una corrida.

¿Por qué ese equilibrio “malo” está latente dentro de este juego? Es claro que si no existe ningún tipo de información negativa en cuanto al banco, ninguno de los dos jugadores tendría incentivos para pasar del equilibrio “bueno” al equilibrio “malo” (juego de coordinación). Pero en caso de que surja un rumor, o exista alguna probabilidad de que el otro jugador retire anticipadamente su dinero, lo óptimo es también retirar, generando lo que se conoce como una corrida bancaria.

Por ello los bancos son tan sensibles a informaciones negativas acerca de su solvencia. El capital de esas instituciones sirve muchas veces como “señal” de compromiso para honrar su promesa de devolver el capital más los intereses a sus ahorristas. Incluso este análisis explica por qué muchos bancos tienen un capital mayor al requerido por la ley, ya que así pueden reducir la probabilidad de una corrida bancaria, que es algo que los bancos saben puede ocurrir (en definitiva, es un equilibrio del juego).

APLICACIÓN 2

Los “seguros” no necesariamente son contratos financieros formales. En ciertas circunstancias los beneficios de los seguros pueden obtenerse mediante una red de solidaridad³⁴. En el caso de los campesinos existe un acuerdo tácito de ayuda recíproca cuando hay dificultades.

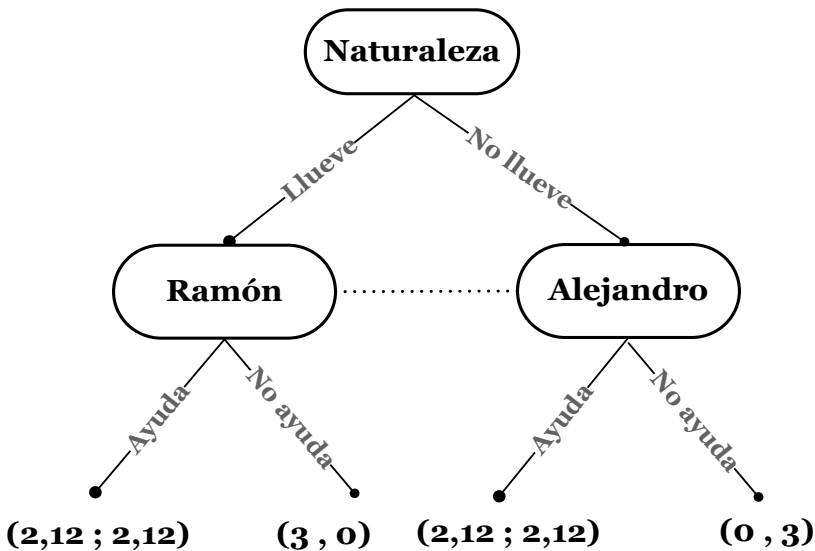
34 Adaptado de B. Wydick (2010).

Considere a Ramón que cultiva arroz y se beneficia con la lluvia, y a Alejandro que es un artesano que trabaja el barro y necesita el sol para el secado de sus piezas. Para simplificar suponga que llueve o hace sol con igual probabilidad.

Tanto Ramón como Alejandro tienen una estructura de ingresos similares donde en caso de que la naturaleza les favorezca reciben un ingreso de 9, pero en caso de que no les favorezca su ingreso se reduce a 0.

Si el campesino afortunado comparte la mitad de su ingreso, 4, 5, con el menos afortunado, suponga que su beneficio será $\sqrt{(4,5)} = 2,12$. En caso de no hacerlo, su beneficio será $\sqrt{9} = 3$. Como $3 > 2,12$ y el juego es simétrico no hay incentivos para ninguno de ser solidario...

Esta situación se puede representar como un juego dinámico entre la naturaleza, Ramón y Alejandro de la siguiente manera:



Es claro que el EN es que ninguno ayuda en caso de que la naturaleza le favorezca. Pero, ¿el equilibrio de Nash puede cambiar si el juego se repite un número infinito de veces? La respuesta es sí, y la razón es la siguiente: si cada campesino se pone de acuerdo en ayudar, cada uno recibirá un pago esperado de 2, 12 para el resto de los períodos; ahora bien, si alguno incumple el acuerdo, su pago será de 3 para el período en que incumplió, y 1, 5 para el resto ya que: $(0,5) * \sqrt{0} + (0,5) \sqrt{9} = 1,5$. Así, el valor presente de no cooperar es:

$$3 + (1,5)/r$$

Y el valor presente de cooperar es:

$$2,12 + (2,12)/r$$

De esta manera, para que existan incentivos de cooperación debe ser cierto que:

$$2,12 + (2,12)/r > 3 + (1,5)/r \rightarrow r < 0,704.$$

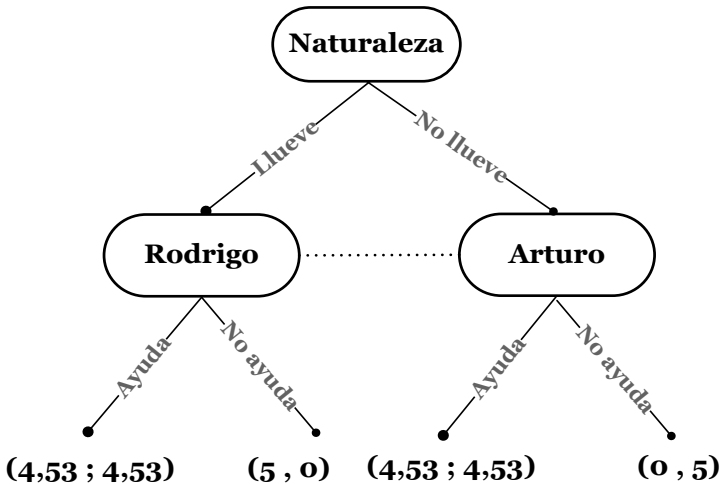
Por lo que si los campesinos son suficientemente “pacientes” se puede encontrar un EPNS para el juego repetido.

Suponga ahora que hay otros dos campesinos llamados Rodrigo y Arturo. La diferencia con respecto a Ramón y a Alejandro es que ellos han acumulado más riqueza y están en un “estrato” más alto dentro de la sociedad campesina. En caso de que la lluvia favorezca a alguno de los dos su beneficio será $\sqrt{25} = 5$ pero en el caso contrario, y gracias a la riqueza acumulada, el beneficio de ambos será $\sqrt{16} = 4$.

Suponga que Rodrigo y Arturo quieren establecer una red de solidaridad, al igual que hicieron Ramón y Alejandro, donde reparten los beneficios. Así, cada uno comparte la mitad de su ingreso, obte-

niendo para él un beneficio de $\sqrt{(25 * (0,5) + 16 * (0,5))} = 4,53$. Es claro que si la interacción ocurre una sola vez, ninguno de los dos tendrá incentivos para ayudar al otro dado que $5 > 4,53$

En este caso, la representación de esta interacción como un juego dinámico entre la naturaleza, Rodrigo y Arturo, sería la siguiente:



Es claro que el EN es que ninguno ayuda en caso de que la naturaleza le favorezca. ¿El equilibrio de Nash puede cambiar si el juego se repite un número infinito de veces? En este caso la respuesta es no, y la razón es la siguiente: si cada campesino se pone de acuerdo en ayudar, cada uno recibirá un pago esperado de 4,53 para el resto de los períodos; ahora bien, si alguno incumple el acuerdo, su pago será de 5 para el período en que incumplió, y 4,5 para el resto de los períodos ya que: $(0,5) * \sqrt{16} + (0,5) \sqrt{25} = 4,5$.

Justamente, el valor presente de no cooperar es:

$$5 + (4,5)/r$$

Y el valor presente de cooperar es:

$$4,53 + (4,53)/r,$$

Así, para que haya incentivos de cooperación debe ser cierto que:

$$4,53 + (4,53)/r > 5 + (4,5)/r \rightarrow r < 0,06$$

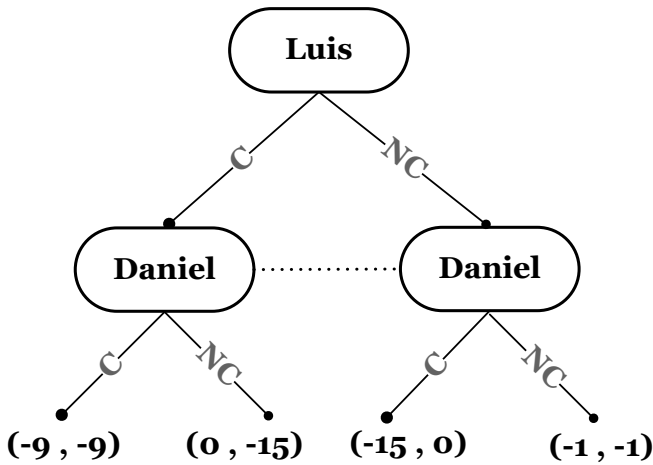
Como r es relativamente baja, lo más probable es que los campesinos no cooperen.

¿Qué conclusiones se pueden sacar de estos dos resultados? Note que en el caso de los dos campesinos “pobres” el requerimiento para la cooperación es que $r < 0,704$ mientras que para los dos campesinos “ricos” el requerimiento para la cooperación es $r < 0,06$, por lo que es mucho más difícil la cooperación. Note también que si bien la pobreza induce la interdependencia, la riqueza induce la independencia...

Juegos de información imperfecta

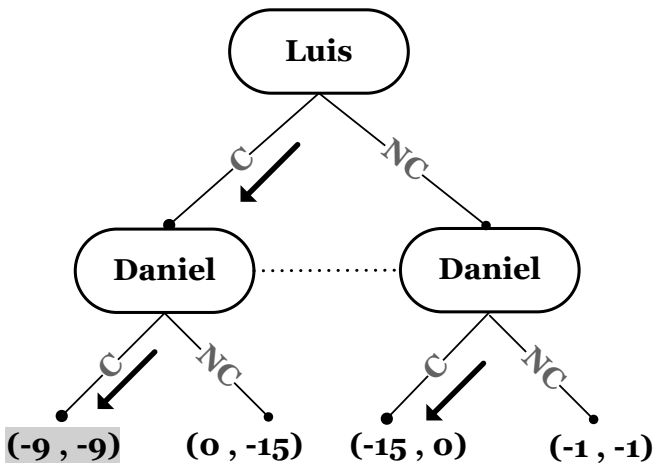
En los juegos de información imperfecta alguno de los jugadores no conoce exactamente dónde se encuentra dentro de la historia del juego, lo cual es lo mismo que decir que dentro de un juego dinámico se contempla la posibilidad de un sub-juego simultáneo. Para modelar esas situaciones usaremos un conjunto de informaciones donde se encuentran, por lo menos, dos posibles decisiones.

Considere la versión dinámica del dilema del prisionero:



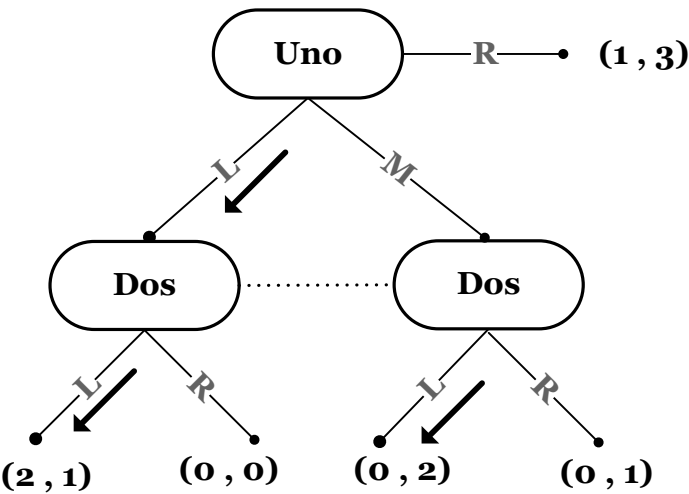
En este caso, Luis juega primero C o NC. Daniel juega luego pero no sabe exactamente si se encuentra en el sub-juego de la izquierda o en el sub-juego de la derecha. Esa imperfección en la información se presenta por la línea punteada entre los dos sub-juegos a los que se enfrenta Daniel.

Analizando cada sub-juego por separado, y sabiendo que Luis puede “resolver” el juego al que se enfrenta Daniel, obtenemos el EPNS $[C, (C, C)]$, como se muestra abajo:



Como se puede observar, el EPNS $[C, (C, C)]$ del juego dinámico coincide con el EN (C, C) en el juego estático, lo cual es entendible porque los dos son juegos de información imperfecta (algún jugador no sabe exactamente dónde se encuentra dentro del juego). En el caso estático el juego es simultáneo, por lo que ninguno de los dos jugadores sabe exactamente donde se encuentra dentro del juego al no poder observar qué jugó el contrincante. En el caso dinámico, a pesar de que un participante juega primero y el otro después, el que juega de segundo tampoco sabe en qué sub-juego se encuentra. Es decir, los dos casos son formas distintas de incorporar la “imperfección” dentro del juego.

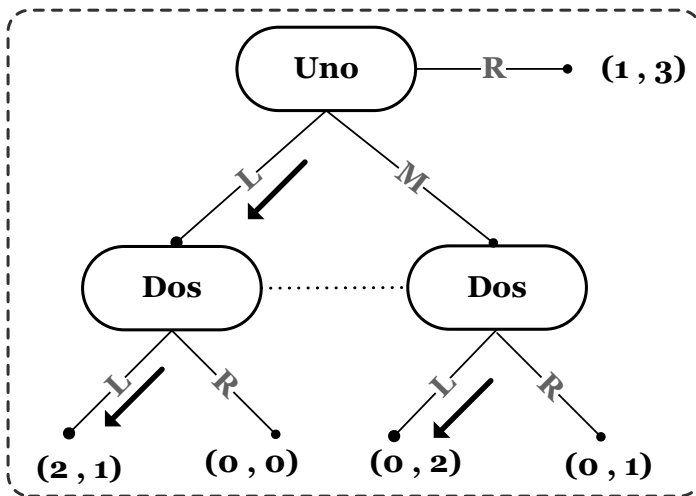
Considere ahora el juego abstracto 2:



En este caso tenemos al *Jugador UNO* que tiene tres estrategias: (L, M, R) y al *Jugador DOS* que tiene cuatro estrategias: $[(L, L), (L, R), (R, L), (R, R)]$. La línea punteada que se observa en el gráfico representa la incertidumbre que tiene el *Jugador DOS* acerca de en cuál de los sub-juegos se encuentra.

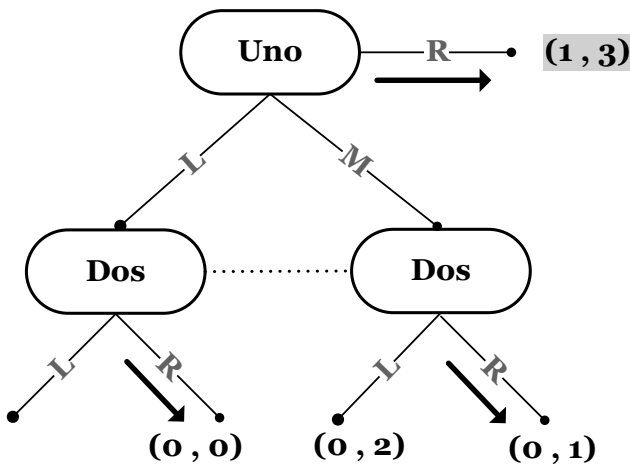
Si el *Jugador DOS* sabe que se encuentra en el sub-juego de la izquierda, lo mejor que puede hacer es jugar L ya que $1 > 0$; en caso de que se encuentre en el sub-juego de la derecha lo mejor para él es jugar L porque $2 > 1$. Note entonces que si al *Jugador 2* le toca jugar, siempre jugará L.

Como el *Jugador UNO* sabe que el *Jugador DOS* siempre jugará L, él jugará L también ya que $2 > 0$, como se muestra en el siguiente gráfico:



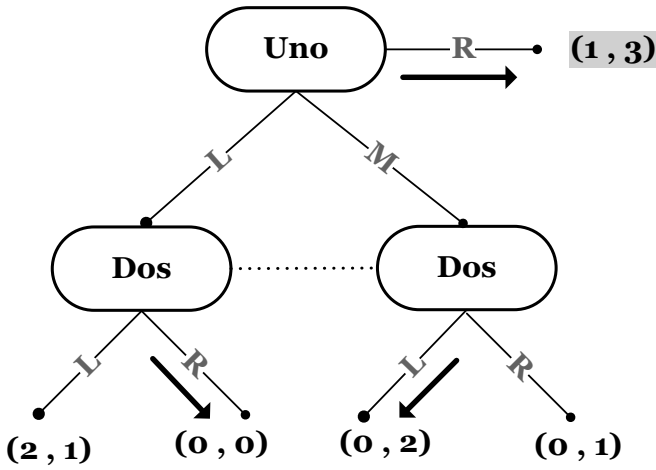
El análisis de este juego nos lleva a concluir que $[L, (L, L)]$ es un EPNS. Sin embargo, no sabemos si es el único; considere el siguiente candidato a equilibrio: $[R, (R, R)]$. ¿Es ese un EPNS?

Ver el siguiente gráfico:

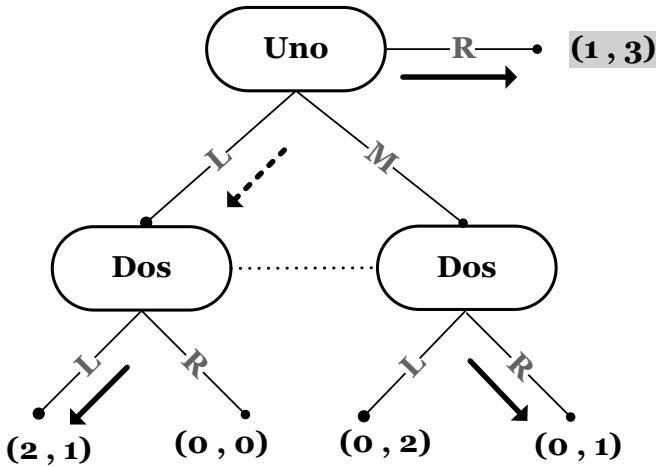


Note que el *Jugador UNO* no tiene incentivos para desviarse ya que de hacerlo su pago pasaría de 1 a 0; por otro lado, a pesar de que el *Jugador DOS* no juega, él tampoco tendría incentivos para cambiar de estrategia ya que 3 es mayor que cualquiera de los posibles pagos que obtendría en cualquier parte del juego. Por lo tanto, $[R, (R, R)]$ es un EPNS porque ninguno de los jugadores tiene incentivos para desviarse.

Considere otro candidato a EPNS: $[R, (R, L)]$. Como puede observar en el gráfico, ninguno de los jugadores tendría incentivos para cambiar de estrategia ya que de hacerlo desmejorarían sus pagos, por lo tanto $[R, (R, L)]$ es un EN, pero no EPNS:



Considere ahora otro candidato a EPNS: $[R, (L, R)]$: Tal y como se muestra en el gráfico, el *Jugador UNO* tiene incentivos para desviarse porque $2 > 1$, en consecuencia, $[R, (L, R)]$ no es un EPNS:



¿Cómo saber cuáles son todos los EPNS? Una forma de responder esta pregunta es construir una matriz con todas las posibles combinaciones de estrategias como lo hicimos anteriormente. Es decir, transformar el juego dinámico en un juego estático, encontrar todos los EN, y luego incorporar el hecho de que el *Jugador UNO* juega primero.

En la siguiente tabla se muestra la transformación del juego dinámico en un juego estático:

		Jugador DOS			
		L , L	L , R	R , L	R , R
Jugador UNO	L	(2 , 1)	(2 , 1)	(0, 0)	(0, 0)
	M	(0 , 2)	(0 , 1)	(0 , 2)	(0 , 1)
	R	(1 , 3)	(1 , 3)	(1 , 3)	(1 , 3)

De allí se toman todos los EN y de ellos se determinan los EPNS, como se muestra a continuación:

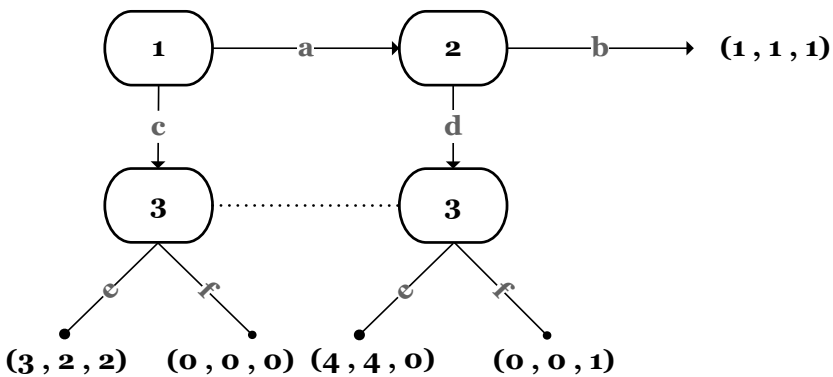
		Jugador DOS			
		L, L	L, R	R, L	R, R
Jugador UNO	L	(2, 1)	(2, 1)	(0, 0)	(0, 0)
	M	(0, 2)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 1)
	R	(1, 3)	(1, 3)	(1, 3)	(1, 3)

EN: {L, (L, L)} ; {L, (L, R)} ; {R, (R, L)} ; {R, (R, R)}

EPNS: {L, (L, L)} ; {L, (L, R)}

La transformación de un juego dinámico en un equivalente estático es muy útil para encontrar equilibrios, sobretodo cuando los juegos son complejos.

Considere ahora el juego abstracto 3 que se presenta a continuación:

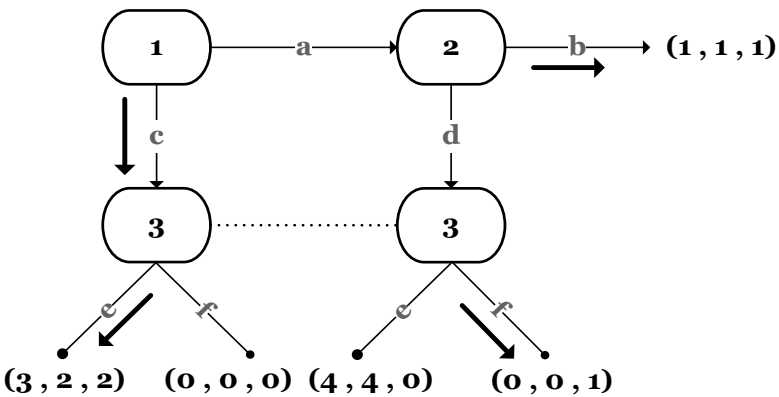


Para resolver este juego es necesario tener claro cuál es el conjunto de estrategias de cada uno de los tres jugadores. Como existe una línea punteada en el conjunto de decisión del *Jugador 3*, quiere decir que estamos ante un juego de información imperfecta, donde el jugador 3, si es llamado a jugar, no sabe exactamente en cual de los sub-juegos se encuentra.

Las estrategias de este juego son las siguientes:

- Para el *Jugador 1*: (a, c)
- Para el *Jugador 2*: (b, d)
- Para el *Jugador 3*: (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)

El análisis de los sub-juegos arroja que el conjunto de estrategias [c, b, (e, f)] como un EPNS (ver gráfico abajo).



Sin embargo, como es usual en este tipo de casos, no sabemos si ese equilibrio propuesto es único. Para ello mostramos el juego en su versión estática, identificamos los EN y luego, suponiendo que el *Jugador 1* juega primero, el *Jugador 2* juega segundo y, finalmente, el *Jugador 3* juega tercero, identificamos todos los EPNS, como se muestra en la siguiente matriz de pagos:

Jugador 2

b d

(e, e)

(3, 2, 2) (3, 2, 2)

↑

EPNS

(e, f)

(3, 2, 2) (3, 2, 2)

↑

(f, e)

(0, 0, 0) (0, 0, 0)

(f, f)

(0, 0, 0) (0, 0, 0)

Jugador 1 a

c

Jugador 3

Jugador 2

b d

(e, e)

(1, 1, 1) (4, 4, 0)

(e, f)

(1, 1, 1) (0, 0, 1)

(f, e)

(1, 1, 1) (4, 4, 0)

(f, f)

(1, 1, 1) (0, 0, 1)

EN pero no EPNS

Jugador 3

Considere la siguiente aplicación de este tipo de juegos dinámicos con información imperfecta:

APLICACIÓN 3:

En el mercado de telefonía internacional son muy importantes las economías de alcance que realizan las empresas al interconectarse con redes de otras compañías que sirven de puente. Igualmente, la rapidez y calidad de las comunicaciones dependen fundamentalmente del tipo de tecnologías que cada empresa maneja. Por esa razón, antes de escoger la tecnología que va a utilizar, cada empresa debe considerar la tecnología de aquellas empresas con las que piensa usar servicios de interconexión.

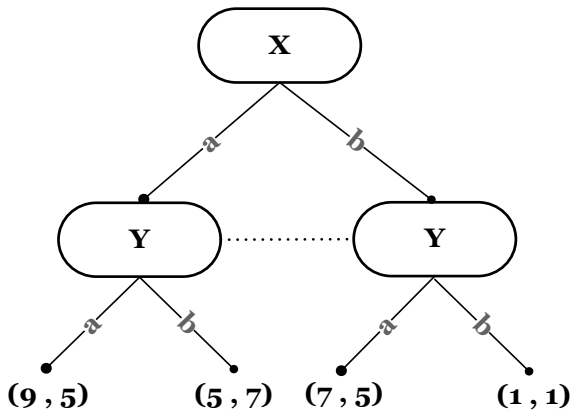
Para ilustrar la idea, considere que existen dos empresas X y Y que están analizando la tecnología que deben adoptar para sus servicios de llamadas internacionales. Considere que existen solo dos posibles tecnologías: a y b. Suponga, además, que X escoge primero, pero dicha escogencia no es observada por la empresa Y antes de tomar su propia decisión.

Si X escoge la tecnología a y Y también escoge dicha tecnología, entonces las utilidades incrementales por prestar el servicio de llamadas será de 9 y 5 millones para X y Y respectivamente; ahora bien, si Y decide adoptar tecnología b (observando que X adoptó la tecnología a), las ganancias incrementales para X y Y serán de 5 y 7 millones respectivamente. En este sentido, a la empresa X le interesa que Y adopte la tecnología a, pero Y obtiene mayores utilidades adoptando la tecnología b.

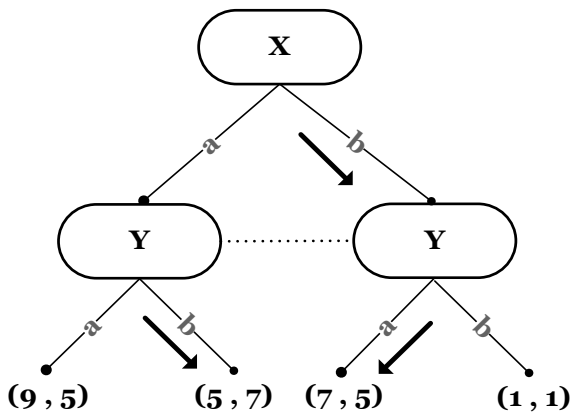
Si X escoge la tecnología b y Y escoge la tecnología a, entonces la empresa X y la empresa Y reciben como ganancias incrementales 7 y 5 millones respectivamente; ahora bien, si Y escoge la tecnología b, las ganancias incrementales para ambas empresas serán solo de 1 millón.

Con esta información es claro que la empresa X obtiene sus mayores ganancias (9 millones) si adopta la tecnología a, y la empresa Y también adopta dicha tecnología. Por el contrario, las mayores ganancias para la empresa Y (7 millones) se generan cuando X adopta la tecnología a y Y la tecnología b.

Esta interacción sugiere que en un juego secuencial no siempre jugar primero representa una ventaja estratégica. Para ver esto se puede hacer la siguiente representación extensiva de la situación planteada entre X y Y:



Al analizar cada uno de los sub-juegos hay un candidato claro a EPNS: $[b, (b, a)]$, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

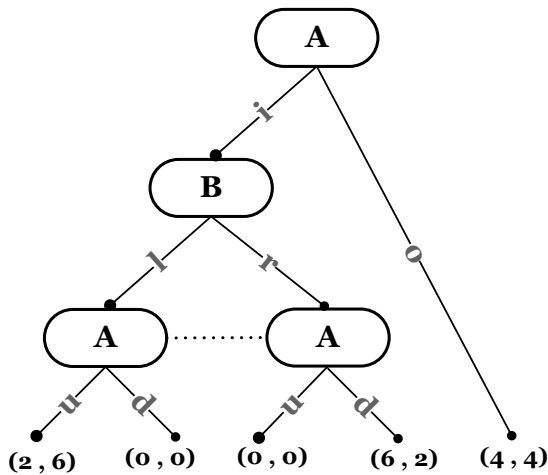


En este caso, es claro que jugar primero no es una ventaja, ya que los mayores pagos se los lleva la empresa Y que juega segunda, sin saber exactamente qué jugó la empresa X.

Para terminar considere el siguiente problema resuelto:

PROBLEMA RESUELTO 1

Halle el o los EPNS para esta interacción entre los jugadores A y B.



Solución:

Para encontrar el o los EPNS primero debemos clarificar cuáles son las estrategias de cada uno de los jugadores. Para el Jugador A, su conjunto de estrategias es:

$$\{ i,(u,u); i,(u,d); i,(d,u); i,(d,d); o,(u,u); o,(u,d); o,(d,u); o,(d,d) \}$$

Para el caso del Jugador B, su conjunto de estrategias es simplemente (l, r).

Para analizar los equilibrios de este juego transformamos el juego dinámico en un juego estático, y encontramos todos los EN:

	l	r
i, (u , u)	(2 , 6)	(0 , 0)
i, (u , d)	(2 , 6)	(6 , 2)
i, (d , u)	(0 , 0)	(0 , 0)
i, (d , d)	(0 , 0)	(6 , 2)
o, (u , u)	(4 , 4)	(4 , 4)
o, (u , d)	(4 , 4)	(4 , 4)
o, (d , u)	(4 , 4)	(4 , 4)
o, (d , d)	(4 , 4)	(4 , 4)

Entonces, en el juego existen cinco EN: [o, (u, u); l], [o, (u, d); l], [o, (d, u); l], [o, (d, d); l], [o, (d, d); r] y [i, (d, d); r]; de estos, los cuatro primeros son también EPNS, pero el último, [i, (d, d); r], a pesar de que es EN para el juego estático, no es un EPNS para el juego dinámico ya que si A juega i, B jugará l, generando un pago para A de 2, mientras que si A juega o, garantiza un pago de 4.

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos

PROBLEMA 1

Encuentre las condiciones para la existencia de un EPNS si se repite el siguiente “dilema del prisionero” infinitas veces. Los jugadores son Daniel y Luis, las acciones son No Acusar (NA) y Acusar (A), y considere una tasa de descuento r .

		Luis	
		NA	A
Daniel	NA	(-1 , -1)	(-15 , 0)
	A	(0 , -15)	(-9 , -9)

Solución:

Existe un EPNS donde los dos jugadores “colaboran” no acusándose mutuamente si la tasa de descuento es menor a 800%.

PROBLEMA 2

Considere el siguiente juego entre el *Jugador 1* y el *Jugador 2*, y suponga una tasa de descuento r para cada periodo:

		Jugador 2		
		L	M	R
Jugador 1	t	(10 , 10)	(0 , 15)	(0, 0)
	m	(15 , 0)	(0, 0)	(6 , 3)
	b	(0 , 0)	(3 , 6)	(4 , 4)

- ¿Cuál es el equilibrio de Nash del juego base?
- ¿Cuál debe ser el valor de r y la amenaza para que jugar (t, L) sea un Equilibrio Perfecto de Nash en Sub-juegos?

Solución:

Existe un equilibrio con $r < 140 \%$

PROBLEMA 3

En las proximidades de la universidad existen únicamente dos restaurantes, “La gallina feliz” y “El cocodrilo hambriento”, los cuales se encuentran enfrascados en una guerra de precios. El mercado objetivo tiene un potencial de 1.000 almuerzos diarios, que pueden ser totalmente atendidos por cualquiera de los dos restaurantes, siendo un mercado muy elástico al precio. Actualmente el precio del almuerzo se encuentra en un punto bajo (los dos lo ofrecen a \$15.000), pero es sabido que los estudiantes están dispuestos a pagar hasta

\$25.000 si no tienen más alternativa. Adicionalmente, sabemos que si los precios están iguales en los dos restaurantes, el mercado se dividirá por partes iguales y, por el contrario, si los precios son diferentes, el mercado será atendido en su totalidad por quien tenga el precio más bajo. El costo de operar para cada uno de los restaurantes se resume en la siguiente tabla:

	La Gallina feliz	El Cocodrilo hambriento
Costo fijo (\$/día de operación)	\$ 1.000.000	\$ 3.000.000
Costo variable (\$/almuerzo)	\$ 4.000	\$ 2.000

- a. Halle la matriz de pagos (utilidades) y describa la tensión del juego.
- b. ¿El juego se encuentra actualmente en un EN?

Solución:

(PB, PB)

- c. Para salir de esta guerra de precios, qué amenazas deben hacer los diferentes jugadores, teniendo en cuenta que se trata de un juego repetido infinitamente.

Solución:

- Los jugadores deben acordar subir los precios a \$25.000 (PA).
- d. ¿Cuál debe ser el rendimiento, r , para salir del equilibrio de precios bajos?

Solución:

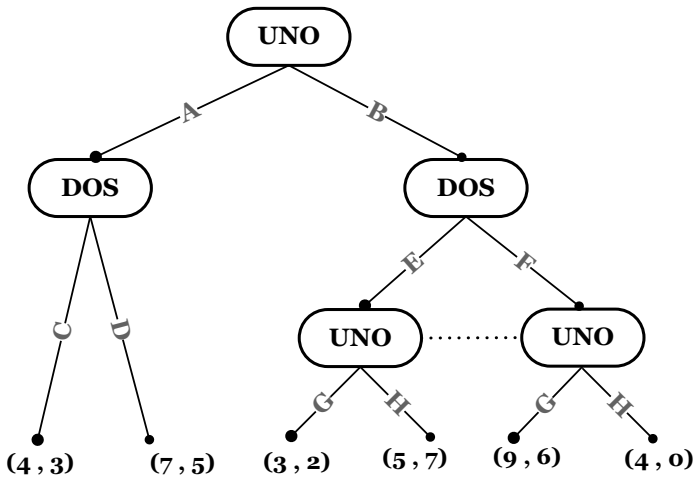
Para la Gallina Feliz, $r < 1000\%$
 Para el Cocodrilo Hambriento, $r < 333,33\%$

PROBLEMA 4

Estudie si en la aplicación 2 (empresa de telecomunicaciones) existe otro EPNS. Para ello, convierta el juego dinámico en un juego estático.

PROBLEMA 5

Considere el siguiente juego entre UNO y DOS y responda las preguntas:



a. ¿Cuál es el conjunto de acciones y estrategias de cada jugador?

Solución:

$A_{\text{UNO}} = [A, B, G, H];$

$$S_{\text{UNO}} = [(A, (G, G)); [A, (G, H)]; [A, (H, G)]; [A, (H, H)]; \\ [B, (G, G)]; [B, (G, H)]; [B, (H, G)]; [B, (H, H)];$$

$$A_{\text{DOS}} = [C, D, E, F];$$

$$S_{\text{DOS}} = [(C, E); (C, F); (D, E); (D, F)]$$

- b. Represente el juego en su forma estratégica matricial
- c. Encuentre todos los EPNS y diga para cada uno de ellos el pago que recibe cada jugador.

Solución:

EN:

1. [A,(G,G), (D,E)]: Pago: (7,5)
 2. [A,(G,H), (D,E)]: Pago: (7,5)
 3. [A,(H,G), (D,E)]: Pago: (7,5)
 4. [A,(H,H), (D,E)]: Pago: (7,5)
 5. [B,(G,G), (C,F)]: Pago: (9,6)
 6. [B,(G,G), (D,F)]: Pago: (9,6)
 7. [B,(H,G), (C,E)]: Pago: (5,7)
 8. [B,(H,H), (C,E)]: Pago: (5,7)
- d. Usted es el *jugador UNO*, ¿qué estrategia escoge y por qué?

Solución

Cualquiera de estos cuatro equilibrios

1. [A,(G,G), (D,E)]: Pago: (7,5)
2. [A,(G,H), (D,E)]: Pago: (7,5)
3. [A,(H,G), (D,E)]: Pago: (7,5)
4. [A,(H,H), (D,E)]: Pago: (7,5)

CAPÍTULO 5

JUEGOS DE INFORMACIÓN INCOMPLETA

En este capítulo estudiaremos los juegos de información incompleta. En este caso alguno de los jugadores no conoce exactamente cuál es la estructura de pagos de su contrincante. El equilibrio que buscamos para este tipo de situaciones se llama Equilibrio Bayesiano de Nash (EBN) para el caso de los juegos estáticos (*one shot games*) y Equilibrio Perfecto Bayesiano de Nash (EPBN) para el caso de los juegos dinámicos, los cuales llamaremos equilibrio de señales.

En estas situaciones los jugadores, o algunos de ellos, pueden ser de distinto tipo donde cada tipo se relaciona con pagos diferentes. Por ejemplo, una empresa puede ser del tipo “costos altos” o del tipo “costos bajos”. Pero el tipo no es conocido por el contrincante.

Si bien el tipo no es conocido por todos o algunos de los jugadores, debe ser cierto que el o los jugadores con esa incertidumbre tienen creencias sobre dichos tipos. Por último, tales creencias se pueden ajustar usando el teorema de Bayes, por lo que estos juegos de información incompleta se conocen también como juegos bayesianos.

En ellos cada tipo corresponde a una función de pagos distinta, y supondremos que cada jugador conoce su propio tipo. Como regla de notación escribiremos $p(t_{-i} | t_i)$ para denotar la creencia que tiene un *Jugador i*, dado su tipo, sobre los tipos de sus contrincantes, $-i$.

Antes de ver algunos ejemplos es necesario hablar sobre la transformación de Harsanyi a través de la cual un juego de información incompleta se transforma en un juego de información imperfecta, introducidos en el capítulo anterior. Esto es importante pues, como veremos, facilita el análisis de este tipo de juegos.

Sin entrar en detalles matemáticos, el procedimiento de Harsanyi es fundamentalmente el siguiente: en un primer momento la “naturaleza” genera un vector de tipos donde a cada jugador se le asocia con uno determinado. Luego, la “naturaleza” comunica a cada jugador su tipo. En un tercer momento cada jugador, en conocimiento de su tipo y con las creencias que tiene sobre el tipo del resto de los participantes del juego, escoge una acción. Por último, cada jugador recibe un pago de acuerdo con la acción tomada.

Como ya se dijo, estos juegos se llaman bayesianos porque es a través del Teorema de Bayes que se actualizan las creencias de cada jugador sobre los tipos de sus contrincantes.

Actualización de creencias

Considere el siguiente ejemplo de cómo se utiliza el Teorema de Bayes para actualizar las creencias sobre los tipos.

En este juego un auditor entra a una empresa a sabiendas de que la misma puede ser *tipo A*, en el cual el 70% de los errores contables son intentos de fraude, y el 30% son errores normales sin ninguna mala intención. Por otro lado, las empresas tipo B son aquellas donde el 70% de los errores son normales mientras que el 30% son intentos de fraude. Formalmente, se podría resumir esta información, que es *common knowledge* para todos los participantes de la interacción, utilizando la notación de probabilidades condicionales de la siguiente manera:

$$P(F|A) = 0,7 \quad \text{y} \quad P(F|B) = 0,3$$

Donde F son errores graves o intentos de fraude, y $P(F|A)$ y $P(F|B)$ se lee como la probabilidad de que el error detectado sea un intento de fraude dado que la empresa es *tipo A* o *tipo B*, respectivamente.

Note que una empresa tipo A puede cometer errores “normales” o “leves” (E), es decir, , e igualmente, una empresa tipo B puede cometer errores normales o leves con una probabilidad de 0, 7, es decir $P(E|B)=0,7$. Es claro que

$$\begin{aligned} P(F|A) + P(E|A) &= 1 \\ P(F|B) + P(E|B) &= 1 \end{aligned}$$

El auditor no sabe *ex ante* el tipo de empresa que está auditando, pero tiene la creencia de que en el mercado el 60% son empresas *tipo A*, mientras que el resto, 40%, son *tipo B*. Es decir, $P(A) = 0,6$ y $P(B) = 0,4$. Estas creencias son *common knowledge* para todos los jugadores.

En el contexto del ejemplo, dichas creencias provienen de la experiencia que tienen las empresas auditoras en el análisis de los errores contables que han encontrado en el pasado.

Suponga que en la primera cuenta que revisa el auditor encuentra un error *tipo F*, es decir, un error que puede considerarse como un intento de fraude. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa sea *tipo A*? Es decir, el auditor entra en la empresa con la creencia de que es *tipo A* con una probabilidad de 0,6, pero al detectar un error grave, debe ajustar esa creencia inicial dada la nueva información.

Aplicando el teorema de Bayes tenemos³⁵:

$$P(A|F) = (P(F|A) P(A)) / (P(F|A) P(A) + P(F|B) P(B))$$

$$P(A|F) = (0,7)(0,6) / ((0,7)(0,6) + (0,3)(0,4)) = 0,78$$

Note que ahora la creencia del auditor sobre el tipo de empresa que está auditando se actualizó. Lo anterior implica que para los auditores, luego de haber encontrado un error *tipo F*, la empresa es *tipo A* con una probabilidad de 0,78.

¿Qué pasa si en la segunda cuenta que revisa la empresa se encuentra otro error grave o error *tipo F*? En este caso, aplicando de nuevo el Teorema de Bayes se obtiene:

35 Para una exposición completa del teorema de Bayes consultar Osborne (2004).

$$P(A|F,F) = (P(F,F|A)P(A)) / (P(F,F|A)P(A) + P(F,F|B)P(B))$$

$$P(A|F,F) = (0,7)(0,7)(0,6) / ((0,7)(0,7)(0,6) + (0,3)(0,3)(0,4)) = 0,89$$

De nuevo, la creencia del auditor se actualiza y ahora le asigna una probabilidad de 0,89 a que la empresa es *tipo A*.

Conociendo el proceso de actualización de las creencias, debemos explicar el significado de *estrategia* en este tipo de juegos.

Concepto de estrategia y equilibrio en los juegos bayesianos

La estrategia en este caso es una función del tipo. Es decir, una estrategia genera acciones que dependen del tipo del jugador. Según la transformación de Harsanyi, las estrategias de los juegos de información incompleta (juegos bayesianos) siguen siendo “planes de acción”, como lo hemos estudiado en los otros tipos de juegos, pero la diferencia se sustenta en que cada “tipo” de jugador tendrá distintos planes de acción o estrategias.

En los juegos bayesianos es importante resaltar dos grupos generales de estrategias³⁶: las integradoras (*pooling strategies*) y las separadoras (*separating strategies*). Las primeras indican que cada *tipo* juega la misma estrategia, mientras que en las segundas cada *tipo* juega una estrategia distinta.

Para entender estos grupos generales de estrategias considere una nueva versión de la batalla de los sexos: en este caso un esposo, H, está inseguro si su esposa, E, lo quiere o no; la esposa tiene dos

36 A pesar de que no lo expondremos en este texto, también es posible tener estrategias que para una parte del juego son integradoras y para otra son separadoras. Para estudiar este tipo de estrategias el lector interesado puede remitirse a Gibbons (1992).

tipos posibles: lo quiere, *L*, o lo detesta, *D*. El esposo tiene como creencias que la esposa es tipo, *L*, con una probabilidad λ (λ) y tipo *D*, con probabilidad, $1-\lambda$ ($1-\lambda$).

El esposo sabe que si la esposa es *tipo L* siempre querrá estar con él independientemente del sitio donde vayan (juego básico de la batalla de los sexos); por otro lado, si es *tipo D*, nunca querrá estar con él (juego básico tipo *chicken game*). Note entonces que el esposo no tiene certeza de qué juego está jugando ya que tiene información incompleta sobre el *tipo* de la esposa.

El esposo, *H*, planea el siguiente juego: existen dos restaurantes, R_1 y R_2 , donde *H* tiene preferencias por R_1 , mientras que sabe que *E* tiene preferencias por R_2 . La estructura de pagos se presenta a continuación:

		Esposa				Esposa	
		R1	R2			R1	R2
Esposo	R1	(4 , 2)	(0 , 0)	Esposo	R1	(4 , 0)	(0 , 2)
	R2	(0 , 0)	(2 , 4)		R2	(0 , 4)	(1 , 0)

$\Pr (t_E = L) = \lambda$

$\Pr (t_E = D) = 1 - \lambda$

Considere la siguiente estrategia de *H*: ir a R_1 con probabilidad 1. En este caso es claro que la esposa tipo *L* irá también a R_1 con probabilidad 1 y la esposa tipo *D* irá a R_2 con probabilidad 1 (o lo que es lo mismo irá a R_1 con probabilidad 0), como se muestra a continuación:

		Esposa	
		R1	R2
Esposo	R1	(4 , 2)	(0 , 0)
	R2	(0 , 0)	(2 , 4)

$$\Pr(t_E = L) = \lambda$$

		Esposa	
		R1	R2
Esposo	R1	(4 , 0)	(0 , 2)
	R2	(0 , 4)	(1 , 0)

$$\Pr(t_E = D) = 1 - \lambda$$

¿Es ese conjunto de estrategias un Equilibrio Bayesiano de Nash (EBN)? La respuesta es que si llega a ser un EBN, al igual que los otros equilibrios que hemos estudiado, ninguno de los jugadores tendrá incentivos para desviarse del equilibrio propuesto. Es claro que cada tipo de esposa, E, no tendrá incentivos para desviarse; veamos, entonces, si H, tiene incentivos para desviarse:

Si H juega R_1 :

$$4\lambda + 0(1-\lambda) = 4\lambda$$

Si H juega R_2 (se desvía):

$$0\lambda + 1(1-\lambda) = 1-\lambda$$

Para que H no tenga incentivos para desviarse debe ser cierto que:

$$4\lambda > 1 - \lambda \Rightarrow \lambda > 1/5$$

Por lo tanto, si se cumple la condición de equilibrio propuesta, es decir, que H tenga la creencia *a priori* respecto de que la esposa es *tipo L* con una probabilidad mayor a 0,20, entonces la estrategia

propuesta sería un EBN, y se escribiría de la siguiente forma:

$$[R_1, (R_1, R_2); 1, (0.20, 0.80)]$$

La segunda parte del corchete está relacionada con las creencias que tienen los jugadores con respecto a los tipos de sus contrincantes. En este caso, como no hay dudas sobre el tipo de H, entonces se coloca 1; en el caso de E, se lee que con una probabilidad de 0,20 la esposa es *tipo L* y con una probabilidad de 0,8 es *tipo D*.

Considere ahora la estrategia de H donde va a R_2 con probabilidad 1. En ese caso, es claro que la esposa *tipo L* también irá a R_2 con probabilidad 1 y la esposa *tipo D* irá a R_1 con probabilidad 1 (o irá a R_2 con probabilidad cero), como se muestra a continuación:

		Esposa	
		R1	R2
Esposo	R1	(4 , 2)	(0 , 0)
	R2	(0 , 0)	(2 , 4)

$$\Pr (t_E = L) = \lambda$$

		Esposa	
		R1	R2
Esposo	R1	(4 , 0)	(0 , 2)
	R2	(0 , 4)	(1 , 0)

$$\Pr (t_E = D) = 1 - \lambda$$

¿Es ese conjunto de estrategias un EBN? Es claro que las esposas, E, dados sus tipos no tendrían incentivos para desviarse; veamos si H, tiene incentivos para desviarse:

Si H juega R_2 :

$$2\lambda + 0(1-\lambda) = 2\lambda$$

Si H juega R_1 (se desvía):

$$0\lambda + 4(1-\lambda) = 4(1-\lambda)$$

Para que H no tenga incentivos para desviarse debe ser cierto que:

$$2\lambda > 4(1-\lambda) \Rightarrow \lambda > 2/3$$

Por lo tanto, si se cumple la condición de equilibrio propuesta, es decir, que H tenga la creencia *a priori* de que la esposa es *tipo L* con una probabilidad mayor a 0,67, entonces la estrategia propuesta sería un EBN y se escribiría de la siguiente forma:

$$[R_2, (R_2, R_1); 1, (0.67, 0.33)]$$

Por lo tanto,

Si $\lambda > 2/3$ existen entonces dos EBN; si $1/5 < \lambda < 2/3$ existe solo un EBN, y si $\lambda < 1/5$ no existen EBN.

En ambos casos los EBN son del grupo de estrategias separadoras ya que cada tipo tiene una estrategia distinta. Note que H también podría jugar una estrategia mixta, donde con una cierta probabilidad asiste a R_1 o a R_2 ; sin embargo, el análisis de este tipo de situaciones está fuera del alcance de este texto y por lo tanto nos concentraremos en los EBN en estrategias puras³⁷.

Veamos ahora algunas aplicaciones de los juegos bayesianos.

37 El lector interesado puede consultar Fudenberg (1991).

Aplicaciones

APLICACIÓN 1.

JUEGO DE LOS LIMONES³⁸

Suponga que un mercado de automóviles usados tiene la misma proporción de autos tipo “buenos” (50%) y tipo “malos” o limones (50%), es decir, es “common knowledge” dado que en un auto tomado al azar se cumple que:

$$\Pr(t = t_b) = 0,5$$

$$\Pr(t = t_l) = 0,5$$

Suponga que Marta quiere vender su automóvil a Juan. Pero Juan no puede diferenciar a priori el tipo del auto. Las valoraciones que tanto Marta como Juan hacen del vehículo dependen del tipo del mismo, que es información completa para el caso de Marta (ella sabe cuál es el verdadero tipo del automóvil que está vendiendo), pero incompleta para el caso de Juan.

Marta valora en 9 su auto si es tipo limón y en 22 si es un auto bueno; por otro lado, Juan estaría dispuesto a pagar hasta 12 por un auto tipo limón y un máximo de 28 por un auto tipo bueno. Estas valoraciones contingentes de los tipos son *common knowledge* en el juego.

38 En este contexto un “limón” se refiere a un automóvil usado de mala calidad. Akerlof en 2001 ganó el premio Nobel de Economía por desarrollar la idea de cómo la información incompleta impacta el funcionamiento de los mercados.

Considere la estrategia separadora donde Marta evalúa un precio de 12 si su auto es un limón y de 28 si es un buen auto. Note que si no existe información incompleta, no hay problema en ponerse de acuerdo debido a que si el auto es un limón Juan pagaría hasta 12 y Marta esperaría recibir como mínimo 9, por lo tanto, en ese caso, el precio finalmente obtenido estaría en un rango entre 9 y 12; por otro lado, si el auto es de tipo bueno, Juan estaría dispuesto a pagar hasta 28 y Marta esperaría recibir como mínimo como mínimo 22, por lo que en el proceso de negociación el precio final estaría en un rango entre 22 y 28.

Ahora bien, como Juan no conoce el tipo del auto, cuando Marta ofrece el precio (12 si es un limón y 22 si es bueno), Juan estima tanto su ganancia esperada dado el precio, p , ofrecido por Marta, como sus creencias sobre el verdadero tipo del auto, haciendo que dicha ganancia esperada sea al menos mayor que cero:

$$(12-p)(0,5) + (28-p)(0,5) \geq 0$$

Resolviendo para p se tiene que $p \leq 20$. Es decir, para el caso de la estrategia separadora de Marta, Juan solo aceptaría si el precio es menor o igual a 20 (máximo precio que ofrecería Juan). Pero es claro que dado que el precio de reserva de Marta para el auto bueno es de 22, nunca aceptaría venderlo por 20; por otro lado, como el precio de reserva de Marta para un auto tipo limón es de 9 ella sí aceptaría si Juan le ofrece 20, pero el simple hecho de aceptar la oferta de 20 revelaría inmediatamente que el tipo del auto es limón; es decir, las creencias se actualizarían (usando el teorema de Bayes) donde:

$$\Pr(t = L | \text{acepta}) = 1$$

Y Juan recalcula sus ganancias esperadas bajo estas creencias actualizadas:

$$(12-p)(1) + (28-p)(0) \geq 0$$

donde, resolviendo para p , se tiene que $p \leq 12$. En este caso, la información ahora es completa (ya Juan sabe que está negociando un limón) y el precio final del negocio estará en el rango entre 9 y 12.

Si el vehículo es tipo limón no existe inconveniente debido a que finalmente Marta y Juan llegarán a un acuerdo y harán el negocio a un precio entre 9 y 12, pero ¿qué pasa si el auto que está vendiendo Marta es tipo bueno? En este caso el problema es más serio porque, dada la estructura del juego, ¡Marta no podría vender su auto si es bueno!

Esta aplicación muestra cómo la información incompleta³⁹ puede llegar a colapsar un mercado (en este caso, el mercado de vehículos usados de buena calidad). Sin embargo, en el mundo real se venden constantemente autos usados de buena calidad, entonces, cabe la pregunta de *¿cómo puede hacer Martha para salirse de este EBN y vender su carro si este es bueno?* Una forma es ofrecerle a Juan una garantía creíble de que su carro es bueno.

Para simplificar el análisis suponga que la garantía que ofrece Marta es una suma de dinero g que le pagará a Juan si luego de comprado resulta que el auto es tipo limón. *¿Cuál debe ser la cantidad g para que dicha garantía sea creíble y realmente*

39 Note que este juego no es solo de información incompleta sino también asimétrica, ya que una de las partes tiene información que puede ser utilizada a su favor.

disipe la información incompleta del juego? (ver problema 1 al final del capítulo). Se puede demostrar que dicha garantía debe estar entre 13 y 16 de forma que ninguno de los dos jugadores tenga incentivos para desviarse. Note que la garantía nunca se activa, ya que, si es creíble, Juan estaría comprando un auto bueno. En otras palabras, la garantía disipa la información incompleta de este juego.

APLICACIÓN 2.

DISEÑO DE CONTRATOS ÓPTIMOS⁴⁰

Considere una empresa que contrata a un gerente profesional para que lidere un proceso de expansión en otro país. Las múltiples dimensiones del trabajo hacen difícil vincular la remuneración del gerente con el desempeño de la empresa. ¿Cómo podría diseñarse un contrato tal que sin necesidad de incurrir en altos costos de vigilancia, el gerente se esfuerce por maximizar la riqueza de los accionistas?

Suponga que el nivel de esfuerzo del gerente, e , puede simplificarse en dos: un esfuerzo alto, al que llamaremos e_a y un esfuerzo bajo al que llamaremos e_b . Es decir, el conjunto de esfuerzos tiene dos elementos:

$$e = \{e_a, e_b\}$$

Es claro que esforzarse tiene un costo para el gerente, por lo tanto, supondremos que un nivel de esfuerzo alto tendrá un costo de 100, $c(e_a) = 100$, mientras que un nivel de esfuerzo bajo no tendrá ningún costo, $c(e_b) = 0$.

40 Esta sección se basa en Rasmussen (2007).

Los accionistas saben que existe una alta correlación entre el nivel de esfuerzo del gerente y los resultados, r , de la expansión del negocio que él está liderando, pero dicha correlación no es perfecta. Es decir, se puede dar el caso de que los resultados sean buenos sin que el gerente se haya esforzado (por suerte) o, por el contrario, se puede dar el caso de malos resultados a pesar de un gran esfuerzo por parte del gerente (por mala suerte).

Suponga que las creencias *a priori* de los accionistas son que la probabilidad de que el gerente sea del tipo “esfuerzo alto” es 0,6, y que sea del tipo “esfuerzo bajo” de 0,4.

Es decir, los accionistas saben *a priori* que:

$$\Pr(e = e_a) = 0,6$$

$$\Pr(e = e_b) = 0,4$$

Para simplificar el problema, supongamos que los resultados pueden ser buenos, cuando $r = 1000$ o malos cuando $r = 0$. Adicionalmente, supongamos que *a priori* los accionistas saben que la probabilidad de buenos resultados dado un nivel alto de esfuerzo es 0,8, es decir:

$$\Pr(r = 1000 | e = e_a) = 0,8$$

Pero, por complemento, también es posible que los resultados sean malos, $r = 0$, a pesar de haber ejercido un nivel de esfuerzo alto, es decir:

$$\Pr(r = 0 | e = e_a) = 0,2$$

Por otro lado, supongamos también que si el gerente no se esfuerza es igualmente probable que los resultados sean buenos o malos:

$$\Pr(r = 1000 | e = e_b) = \Pr(r = 0 | e = e_b) = 0,5$$

Como en este juego el nivel de esfuerzo es desconocido para los accionistas (no es observable) entonces estos deben inferir el esfuerzo realizado por el gerente dados los resultados obtenidos. Es decir, observando los resultados actualizan (usando el Teorema de Bayes) sus creencias sobre el esfuerzo del gerente.

Por ejemplo, los accionistas se hacen la siguiente pregunta: ¿cuál es la probabilidad de que el nivel de esfuerzo del gerente haya sido alto dado que los resultados fueron buenos? Es decir, los gerentes no quieren premiar la suerte del gerente sino su esfuerzo. A priori saben que existe la probabilidad 0,6 de que el gerente se haya esforzado, pero dado que los resultados fueron buenos, ¿cómo actualizan sus creencias sobre el nivel de esfuerzo del gerente?

Aplicando el Teorema de Bayes es fácil responder esa pregunta:

$$\Pr(e = e_a | r = 1000) =$$

$$\frac{\Pr(r=1000 | e=e_a) \Pr(e=e_a)}{\Pr(r = 1000 | e = e_a) \Pr(e=e_a) + \Pr(r = 1000 | e = e_b) \Pr(e=e_b)}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} & \Pr(e=e_a | r = 1000) \\ &= (0,8)(0,6) / ((0,8)(0,6) + (0,5)(0,4)) = 0,706 \end{aligned}$$

Es decir, los accionistas actualizan sus creencias sobre el nivel de esfuerzo cuando observan un buen resultado, pasando de 0,6 (creencia *a priori*) a 0,706 (creencia *a posteriori*). El complemento de dicho resultado, 0,294, indica la probabilidad de que el esfuerzo haya sido bajo, pero aun así con un buen resultado (¡suerte!).

Por otro lado, si los accionistas observan un mal resultado, $r = 0$, entonces ¿cómo se actualizan sus creencias sobre el nivel de esfuerzo del gerente? ¿Cuál es la probabilidad de que el nivel de esfuerzo haya sido alto ante resultados malos? es decir, deben calcular $\Pr(e = e_a | r = 0)$. Aplicando el Teorema de Bayes obtenemos:

$$\Pr(e=e_a | r=0) = \frac{(0,2)(0,6)}{((0,2)(0,6) + (0,5)(0,4))} = 0,375$$

Esta es la probabilidad de que el gerente haya tenido mala suerte, es decir, se esforzó, pero las cosas no le salieron bien, lo cual es importante porque los accionistas no quieren “castigar” al gerente por la mala suerte del negocio. Por otro lado, el complemento 0,625 representa la actualización bayesiana de que el gerente no se esforzó y por ello las cosas salieron mal. Los accionistas sabían, con una probabilidad de 0,4, que el gerente no se iba a esforzar (creencia *a priori*), y luego de observar un mal resultado dicha probabilidad se incrementó a 0,626 (creencia *a posteriori*).

Las actualizaciones bayesianas de las creencias de los accionistas se resumen en la siguiente tabla:

Resultado

		$r = 1000$	$r = 0$
Esfuerzo	$e = ea$	0.706	0.375
	$e = eb$	0.294	0.625

Un contrato óptimo tiene que ver con un nivel salarial que dependa de los resultados observados y que incentive al gerente a ejercer un nivel de esfuerzo alto, sin necesidad de ser supervisado. Sea $s(r)$ el sueldo del gerente como función del resultado observable, r , del negocio. Es claro que $s(r) > 0$. Suponga que el gerente tiene un costo de oportunidad de 50 millones y es neutral al riesgo⁴¹.

Para que el gerente participe en el juego debe ser cierto que su compensación, dado un nivel de esfuerzo alto, sea suficiente para retribuir su costo de oportunidad. Esa condición se conoce como la condición de participación o *participation constraint*. Se trata de una condición necesaria pero no suficiente para que exista un EBN, ya que una vez aceptado el contrato puede no tener suficientes incentivos para esforzarse.

Si el gerente acepta el contrato el accionista quiere que se esfuerce sin necesidad de supervisararlo directamente. Esa condición se conoce como compatibilidad de incentivos o *incentives compatibility constraint*, y es una condición suficiente para la existencia de un EBN.

41 Los 50 millones se pueden entender como el nivel de ingreso actual de un gerente en cualquier otra actividad. Que sea neutral al riesgo significa que cualquier contrato que en valor esperado genere más de 50 millones será preferido por el gerente.

Para que el gerente juegue, debe ser cierto que:

$$\begin{aligned} &Pr(e = e_a | r = 1000) [s(r = 1000) - c(e_a)] \\ &+ Pr(e = e_a | r = 0) [s(r = 0) - c(e_a)] \geq 50 \end{aligned}$$

Donde $[s(r = 1000) - c(e_a)]$ es el beneficio que recibe cuando realiza un esfuerzo alto y los resultados del negocio son buenos, y $[s(r = 0) - c(e_a)]$ es el beneficio que recibe cuando el esfuerzo fue alto pero los resultados malos. Cada uno ajustado por las actualizaciones bayesianas que hacen los accionistas cuando observan los resultados del negocio. Ese beneficio esperado que recibe el gerente debe ser igual o mayor a su costo de oportunidad de 50 millones.

Sustituyendo y reordenando, la condición de participación de este contrato se puede expresar de la siguiente manera:

$$(0,706) s(r = 1000) + (0,375) s(r = 0) \geq 158,1$$

Por otro lado, el contrato debe estimular al gerente a esforzarse. Es decir, su pago esperado de esforzarse debe ser mayor que el pago esperado de no esforzarse, y confiar en que la suerte hará que los resultados sean buenos. La condición de compatibilidad de incentivos debe ser tal que:

$$\begin{aligned} &Pr(r = 1000 | e = e_a) [s(r = 1000) - c(e = e_a)] \\ &+ Pr(r = 0 | e = e_a) [s(r = 0) - c(e = e_a)] \\ &\geq Pr(r = 1000 | e = e_b) [s(r = 1000) - c(e = e_b)] \\ &+ Pr(r = 0 | e = e_b) [s(r = 0) - c(e = e_b)] \end{aligned}$$

Donde el lado izquierdo de la inecuación es el cálculo que el gerente hace del beneficio esperado de esforzarse, y el lado derecho es el beneficio esperado de no hacerlo. Sustituyendo y reordenando, esta expresión se puede reescribir como:

$$(0,8)s(r=1000)+(0,2)s(r=0)-100 \\ \geq (0,5)s(r=1000)+(0,5)s(r=0)-0$$

Un contrato óptimo, $(s(r = 1000), s(r = 0))$, será un EBN si cumple simultáneamente la condición de participación y la condición de compatibilidad de incentivos. Es decir, ni el gerente ni los accionistas tendrán incentivos para desviarse del contrato. Como se puede ver, existen infinitos EBN para este juego⁴².

Por ejemplo, $s(r=1000) = 334$ y $s(r=0)=0$ cumplen con las dos condiciones.

La condición de participación es:

$$(0,706)s(r=1000) + (0,375)s(r=0) \geq 158,1$$

Sustituyendo:

$$(0,706)(334) + (0,375)(0) = 235,8 \geq 158,1$$

En consecuencia al gerente sí le interesa trabajar bajo esas condiciones.

42 La solución del sistema de ecuaciones arroja $s(r = 1000) = 261,89$ y $s(r = 0) = -71,45$, pero este contrato no es posible porque no puede haber un salario negativo.

La condición de compatibilidad de incentivos indica que:

$$s(r = 1000) - s(r = 0) \geq 1000/3$$

Sustituyendo:

$$334 - 0 = 334 \geq 1000/3$$

En consecuencia, el anterior contrato (recibir 334 si las cosas salen bien en el negocio y 0 si las cosas salen mal) es un EBN porque ninguno de los dos jugadores (el gerente y el accionista) tienen incentivos para desviarse. Sin embargo, existen otros contratos donde, por ejemplo, se le da una compensación fija más un bono (ver problema 2 al final del capítulo).

Terminemos el capítulo con otras aplicaciones adicionales:

APLICACIÓN 3.

EL JUEGO DEL PECKING ORDER⁴³

El *pecking order* es una de las teorías más importantes que explica la configuración de la estructura de capital de las empresas bajo un ambiente de asimetrías de información.

Imagine una situación de un proyecto que requiere una inversión de 100, de la cual el gerente tiene conocimiento en $t = 0$ pero que los inversionistas conocerán en $t = 1$:

⁴³ Esta aplicación se basa en el modelo de asimetrías de información de Myers y Majluf (1984).

	Estado 1	Estado 2
Activos viejos	$a = 150$	$a = 50$
VPN (I = 100)	$b = 20$	$b = 10$
Capital Nuevo (E)	$E = 100$	$E = 100$
Valor de la firma	270	160

El valor de la empresa depende de los estados de la naturaleza. En el Estado 1 los activos viejos valen 150 y el proyecto tendrá un Valor Presente Neto (VPN) de 20. Con el capital nuevo requerido para llevar a cabo la inversión, 100, el valor de la firma asciende a 270.

Por otro lado, en el Estado 2 el valor de los activos viejos es 50, el VPN = 10, lo que sumado al capital requerido de 100, lleva el valor de la firma a 160.

Suponga que el gerente conoce cuál será el estado de la naturaleza pero no el mercado donde irá a buscar los 100 que requiere para hacer la inversión. El mercado solo entiende que existen dos posibles estados, uno bueno donde el valor de la empresa es 270 y otro malo donde el valor es solo 160. Note que el proyecto es bueno ya que en ambos estados su VPN es positivo.

¿Qué pasa cuando la empresa emite las acciones por 100 para financiar el proyecto? Luego de emitir las acciones el valor de la empresa se puede dividir entre el valor para los accionistas antiguos y el valor para los accionistas nuevos.

$$V = V^{ANTIGUOS} + V^{NUEVOS}$$

Sea P el valor de mercado para los antiguos accionistas y E el valor de mercado para los nuevos accionistas. Es claro que $E = 100$ porque ese es el valor que la empresa está tratando de conseguir en el mercado accionario para financiar el proyecto; sin embargo, el valor de mercado de las acciones antiguas es:

$$P = a^- + b^- = 100 + 15 = 115$$

Recuerde que el gerente conoce exactamente cuál es el valor de la empresa para los antiguos accionistas, pero el mercado (nuevos accionistas) solo es capaz de calcular el valor esperado. Dicho esto, evaluemos qué ocurre en cada uno de los estados posibles.

En el estado 1:

$$V = 150 + 20 + 100 = 270$$

$$V^{ANTIGUOS} = P/(P+E) \quad V = 115/(115+100) \quad 270 = 144,42$$

$$V^{NUEVOS} = E/(P+E) \quad V = 100/(115+100) \quad 270 = 125,58$$

En el estado 2:

$$V = 50 + 10 + 100 = 160$$

$$V^{ANTIGUOS} = P/(P+E) \quad V = 115/(115+100) \quad 160 = 85,58$$

$$V^{NUEVOS} = E/(P+E) \quad V = 100/(115+100) \quad 160 = 74,42$$

Como en ambos estados el gerente emite acciones (estrategia integradora o *pooling*), no revela ninguna información acerca del verdadero estado en $t = 1$. Sin embargo, como se puede observar en la tabla a continuación, los accionistas antiguos solo

estarán mejor emitiendo las acciones e invirtiendo en el proyecto cuando el estado es malo; debido a que cuando el estado es bueno, para ellos es mejor no invertir.

	Emisión e Inversión	No hacer nada
V Nuevo (Estado 1)	144.42	150
V Nuevo (Estado 2)	85.58	50

Es decir, cuando el estado es bueno “tendrían que compartir” con los nuevos accionistas los beneficios del proyecto. En cambio, cuando el estado es malo “estarían dispuestos” a compartir con los nuevos accionistas ya que de alguna manera participan en los 100 que los nuevos accionistas inyectan en la operación de la firma (diluyen el efecto negativo del estado).

Sin embargo, los nuevos accionistas saben esto *ex ante* y, en consecuencia, si la empresa emite acciones estaría revelando su verdadero tipo (estado 2) y, en ese caso, el valor de capital antiguo ya no sería $p = 115$ sino que caería a $p = 60$. Por otro lado, si la empresa decide no emitir las nuevas acciones, estaría también revelando su tipo y en ese caso $p = 150$, pero con el problema de que no se podría llevar a cabo el proyecto.

Esta aplicación permite observar el efecto que tienen las asimetrías de información (cuando un jugador sabe más que el otro) en las empresas para conseguir capital. La teoría indica que cuando existen asimetrías de información (como en el caso de esta aplicación), los proyectos deben financiarse primero con capital propio, y luego con

deuda, dado que los acreedores financieros están en mejor posición para ejercer actividades de supervisión y, en última instancia, mediante la emisión de acciones. Dicha jerarquía en las decisiones de financiación de las empresas, es lo que se conoce como *Pecking Order Theory*.

La evidencia empírica muestra⁴⁴ que, como sugiere la teoría, las empresas que emiten acciones y todavía tienen capacidad ociosa de endeudamiento (o recursos propios) son fuertemente penalizadas por el mercado, mediante una disminución del precio de la acción.

APLICACIÓN 4^[45].

ENTRADA A NUEVOS MERCADOS

Suponga que existe una empresa monopolista local llamada P y otra empresa llamada Q que amenaza con entrar en su mercado. P tiene dos opciones: expandir su capacidad instalada (E) o mantenerla tal como está y no hacer nada (NE). Dicha expansión puede ser de dos tipos: barata (tipo A) o costosa (tipo B). Por su parte, Q también tiene dos acciones posibles: competir (C) con P entrando en el mercado o mantenerse al margen (NC). Q no conoce exactamente el tipo de la expansión de P, pero sus creencias indican que con una probabilidad de $1/3$ la expansión es tipo A y con una probabilidad de $2/3$ es tipo B. Los pagos se muestran a continuación:

44 El lector interesado puede consultar Copeland, Weston, Shastri (2010).

45 Basada, en Osborne (2004).

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , 4)	(2 , 2)
	NC	(0 , 6)	(0 , 5)

$$\rho = \Pr(t_p = A) = 1/3$$

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , -2)	(2 , 2)
	NC	(0 , 0)	(0 , 5)

$$(1-\rho) = \Pr(t_p = B) = 2/3$$

Note que Q tiene dos estrategias que corresponden al número de acciones posibles: competir (C) o no hacerlo (NC). Por su parte, P tiene cuatro estrategias: dos integradoras (E, E), (NE, NE) y dos separadoras: (E, NE) y (NE, E). Si la empresa Q toma la estrategia NC (no entrar a competir), la matriz de pagos a la que se enfrenta es la siguiente:

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , 4)	(2 , 2)
	NC	(0 , 6)	(0 , 5)

$$\rho = \Pr(t_p = A) = 1/3$$

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , -2)	(2 , 2)
	NC	(0 , 0)	(0 , 5)

$$(1-\rho) = \Pr(t_p = B) = 2/3$$

En este caso el pago para Q es 0 (ya que no entra) y el pago para P, dadas sus estrategias, será: si juega (E, E) = (6, 0); si juega (E, NE) = (6, 5); si juega (NE, E) = (5, 0), y si juega (NE, NE) = (5, 5). Note que el primer pago representa a la empresa P tipo A y el segundo a la empresa P tipo B. En resumen, se puede escribir el conjunto de pagos para la empresa P, dado que la empresa Q no entra, de la siguiente manera:

$$[0; (6,0),(6,5),(5,0),(5,5)]$$

Si la empresa Q toma la estrategia de entrar a competir con P, y la empresa P decide no expandirse (si es tipo A) y expandirse (si es tipo B), es decir, P juega la estrategia (NE, E), se generan los siguientes los pagos:

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , 4)	(2 , 2)
	NC	(0 , 6)	(0 , 5)

$$\rho = \Pr (t_p = A)= 1/3$$

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , -2)	(2 , 2)
	NC	(0 , 0)	(0 , 5)

$$(1-\rho) = \Pr (t_p = B)= 2/3$$

En este caso la empresa Q toma el valor esperado dado que no conoce el tipo de la empresa P: $2 \cdot 1/3 + (-2)2/3 = -2/3$. Por su parte, la empresa P (que conoce su tipo) tendrá un pago de 2 en caso que sea tipo A y de -2 en caso que sea tipo B. En resumen, los pagos para este par de estrategias serían:

$$[-2/3; (2,-2)]$$

Si la empresa Q toma la estrategia de entrar a competir con P, y la empresa P no expande si es tipo A y expande si es tipo B, es decir, juega la estrategia (NE, E), los pagos que se generan son los siguientes:

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , 4)	(2 , 2)
	NC	(0 , 6)	(0 , 5)

$$\rho = \Pr(t_p = A) = 1/3$$

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , -2)	(2 , 2)
	NC	(0 , 0)	(0 , 5)

$$(1-\rho) = \Pr(t_p = B) = 2/3$$

En este caso la empresa Q toma el valor esperado, dado que no sabe el tipo de la empresa P: $2 \cdot 1/3 + (-2) \cdot 2/3 = -2/3$. Por su parte, la empresa P (que sabe su tipo) tendrá un pago de 2 en caso de que sea tipo A y de -2 en caso de que sea tipo B. En resumen, los pagos para este par de estrategias serán:

$$[-2/3; (2,-2)]$$

Ahora bien, si la empresa Q toma la estrategia de entrar a competir con P, y la empresa P expande si es tipo A y no expande si es tipo B, es decir, juega la estrategia (E, NE), los pagos que se generan se muestran a continuación:

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , 4)	(2 , 2)
	NC	(0 , 6)	(0 , 5)

$$\rho = \Pr (t_p = A) = 1/3$$

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , -2)	(2 , 2)
	NC	(0 , 0)	(0 , 5)

$$(1-\rho) = \Pr (t_p = B) = 2/3$$

En este caso, la empresa Q toma el valor esperado dado que no conoce el tipo de la empresa P: $(-2) \cdot 1/3 + (2) \cdot 2/3 = 2/3$. Por su parte, la empresa P tendrá un pago de 4 en caso de que sea tipo A y de 2 en caso de que sea tipo B. En resumen, los pagos para este par de estrategias serían:

$$[2/3; (4,2)]$$

Si la empresa Q toma la estrategia de entrar a competir con P, y la empresa P expande si es tipo A y también expande si es tipo B (estrategia integradora donde independientemente de su tipo expande su capacidad), es decir, juega la estrategia (E, E), los pagos que se generan se muestran a continuación:

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , 4)	(2 , 2)
	NC	(0 , 6)	(0 , 5)

$$\rho = \Pr(t_p = A) = 1/3$$

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , -2)	(2 , 2)
	NC	(0 , 0)	(0 , 5)

$$(1-\rho) = \Pr(t_p = B) = 2/3$$

En este caso, la empresa Q toma el valor esperado dado que no sabe el tipo de la empresa P: $(-2) \cdot 1/3 + (-2) \cdot 2/3 = -2$. Por su parte, la empresa P tendrá un pago de 4 en caso de que sea tipo A y de -2 en caso de que sea tipo B. En resumen, los pagos para este par de estrategias serán:

$$[-2; (4, -2)]$$

Por último, si la empresa Q toma la estrategia de entrar a competir con P, y la empresa P no expande si es tipo A y tampoco expande si es tipo B (estrategia integradora donde independientemente de su tipo no expande su capacidad), es decir, juega la estrategia (NE, NE), los pagos que se generan son:

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , 4)	(2 , 2)
	NC	(0 , 6)	(0 , 5)

$$\rho = \Pr (t_p = A) = 1/3$$

		P	
		E	NE
Q	C	(-2 , -2)	(2 , 2)
	NC	(0 , 0)	(0 , 5)

$$(1-\rho) = \Pr (t_p = B) = 2/3$$

En este caso, la empresa Q toma el valor esperado dado que no sabe el tipo de la empresa P: $(2) \ 1/3 + (2) \ 2/3 = 2$. Por su parte, la empresa P tendrá un pago de 2 en caso de que sea tipo A y de 2 en caso de que sea tipo B. En resumen, los pagos para este par de estrategias serán:

$$[2; (2,2)]$$

Al integrar toda esta información dentro de una matriz de pagos, como se muestra a continuación, y seguir el procedimiento estándar para hallar equilibrios de Nash, obtenemos el EBN para este juego:

		P			
		(NE , E)	(E , NE)	(E , E)	(NE , NE)
Q	C	$[-2/3 , (2 , -2)]$	$[2/3 , (4 , 2)]$	$[-2 , (4 , -2)]$	$[2 , (2 , 2)]$
	NC	$[0 , (5 , 0)]$	$[0 , (6 , 5)]$	$[0 , (6 , 0)]$	$[0 , (5 , 5)]$

$$EBN = \{ [C , (E , NE)] ; [1/3 , 2/3] \}$$

Decidiendo las estrategias que generen los mayores pagos para cada empresa, se tiene que el EBN de este juego es:

$$[C, (E, NE); (1/3, 2/3)]$$

Donde $C, (E, NE)$ significa la estrategia de cada jugador según su tipo y $(1/3, 2/3)$ significa las creencias que tiene el primer jugador (Q) sobre los tipos del segundo jugador (P).

Hasta ahora en los juegos que hemos estudiado solo uno de los jugadores tiene incertidumbre sobre el tipo del otro jugador. Por ejemplo, en la aplicación anterior la empresa Q no conoce el tipo de la empresa P, pero P sí conoce cuál es el tipo (los pagos) de la empresa Q. *¿Qué ocurre cuando todos los jugadores tienen incertidumbre sobre los tipos de sus contrincantes?* Para ahondar en esta discusión considere la siguiente aplicación.

APLICACIÓN 5

Suponga que Carolina recibe de herencia un cuadro. Como no tiene espacio en su casa, decide venderlo. Para ello invita a Urbi a su casa para mostrarle el cuadro y ver si está interesado en comprarlo. Urbi sabe que si muestra mucho entusiasmo por la obra, Carolina subirá el precio; por otro lado, si Carolina muestra mucho desinterés por el cuadro, Urbi le ofrecerá un precio más bajo...

Suponga las siguientes valoraciones de Carolina junto con las probabilidades que Urbi le asigna a cada posibilidad:

Alta	Baja
20.000.000	500.000
Prob = 0.4	Prob = 0.6

Por otro lado, las valoraciones de Urbi y las probabilidades que Carolina asigna a cada una de ellas se muestran a continuación:

Alta	Baja
30.000.000	10.000.000
Prob = 0.6	Prob = 0.4

Note que tanto Urbi como Carolina desconocen el tipo del otro. Por ejemplo, Urbi puede ser del tipo que tiene una valoración baja del cuadro (10 millones) o puede ser del tipo que tiene una valoración alta de la obra (30 millones); por otro lado, Carolina puede tener una valoración baja del cuadro (0,5 millones) o, por el contrario, puede tener una valoración alta (20 millones). Los pagos se presentan a continuación:

		Carolina	
		Baja 10 MM Prob 0.4	Alta 30 MM Prob 0.6
Urbi	Baja 0.5 MM Prob 0.6	10.000.000	¿Precio?
	Alta 20 MM Prob 0.4	No hay negocio	20.000.000

Note que si tanto Urbi como Carolina tienen una baja valoración, el negocio se podría cerrar vendiéndose el cuadro por 10 millones. Este escenario sería muy beneficioso para Carolina debido a que genera una ganancia de 9,5 millones (recibe 10 millones por algo que valora en 500 mil), y también sería beneficioso para Urbi ya que obtendría el cuadro de acuerdo con su valoración más baja.

Por otro lado, si ambos tienen una valoración alta, el precio de venta sería de 20 millones, lo cual sería beneficioso para Urbi porque obtendría una ganancia de 10 millones (termina pagando 20 millones por el cuadro que él valora en 30 millones), y también sería beneficioso para Carolina porque vende el cuadro por su máxima valoración.

Si Urbi tiene una valoración baja y Carolina una valoración alta del cuadro, no podría haber negocio, ya que Urbi como máximo pagaría 10 millones y ella como mínimo estaría dispuesta a recibir 20 millones.

La situación interesante, sin embargo, es cuando Urbi tiene una valoración alta y Carolina tiene una valoración baja. Como los tipos no se conocen con certeza, Urbi tratará de hacer creer a Carolina que su valoración es baja para que el precio se acer-

que a 10 millones; pero, por otro lado, Carolina que tiene una valoración baja tratará de hacer creer a Urbi que su valoración es alta para que el precio se aproxime a los 20 millones.

El problema con esta interacción es que si ambos fingen demasiado, el negocio podría terminar no dándose, lo cual les resultaría perjudicial.

Consideremos el caso cuando el verdadero tipo de Carolina es que tiene una valoración baja, pero finge que es alta, como se muestra a continuación:

	Baja 10 MM Prob 0.4	Alta 30 MM Prob 0.6
Baja 0.5 MM Prob 0.6	10.000.000	¿Precio?
Alta 20 MM Prob 0.4	No hay negocio	20.000.000

En ese caso la ganancia de Carolina vendrá dada calculando el valor esperado siguiente:

$$0(0,4)+(20-0,5)(0,6)=11,7$$

Donde el primer sumando es cuando ella obtiene un pago de cero ya que Urbi efectivamente tiene una valoración baja del cuadro y, en consecuencia, no habría negocio (0,4 es la probabilidad que Urbi tenga una valoración baja); y el segundo sumando, es cuando recibe un pago de 20 y, en consecuencia, una ganancia de 19,5 ya que Urbi tiene una valoración alta de la obra

(0,6 es la probabilidad de que Urbi tenga una valoración alta).

Por otro lado, si ella realmente tiene una valoración baja y dice la verdad, se analiza la situación siguiente:

	Baja 10 MM Prob 0.4	Alta 30 MM Prob 0.6
Baja 0.5 MM Prob 0.6	10.000.000	¿Precio?
Alta 20 MM Prob 0.4	No hay negocio	20.000.000

En este caso, la ganancia de Carolina al decir la verdad sería:

$$(10-0,5)(0,4) + (p_c-0,5)(0,6) = 3,5 + 0,6p_c$$

A fin de que Carolina tenga incentivos para decir la verdad, debe ser cierto que:

$$3,5 + 0,6p_c \geq 11,7 \rightarrow p_c \geq 13,67$$

Es decir, para que Urbi pueda incentivar a Carolina a decir la verdad sobre su tipo, debe ofrecer un precio mayor o igual a 13,67 millones por el cuadro.

Consideremos ahora el caso cuando el verdadero tipo de Urbi es que tiene una alta valoración, pero finge que es baja, como se muestra a continuación:

	Baja 10 MM Prob 0.4	Alta 30 MM Prob 0.6
Baja 0.5 MM Prob 0.6	10.000.000	¿Precio?
Alta 20 MM Prob 0.4	No hay negocio	20.000.000

En ese caso, la ganancia de Urbi vendrá dada calculando el siguiente valor esperado:

$$(30-10)(0,6)+(0)(0,4)=12$$

Donde el segundo sumando es cuando él obtiene un pago de 0 ya que Carolina efectivamente tiene una valoración alta del cuadro y, en consecuencia, no hay negocio (0,4 es la probabilidad de que Carolina tenga una valoración alta); y el primer sumando es cuando paga 10 y recibe el cuadro que valora en 30 y, en consecuencia, genera una ganancia de 20 ya que Carolina tiene una valoración baja de la obra (0,6 es la probabilidad que Carolina tenga una valoración baja).

Por otro lado, si ella realmente tiene una valoración alta y dice la verdad, se analiza la situación siguiente:

	Baja 10 MM Prob 0.4	Alta 30 MM Prob 0.6
Baja 0.5 MM Prob 0.6	10.000.000	¿Precio?
Alta 20 MM Prob 0.4	No hay negocio	20.000.000

En este caso, la ganancia de Urbi al decir la verdad será:

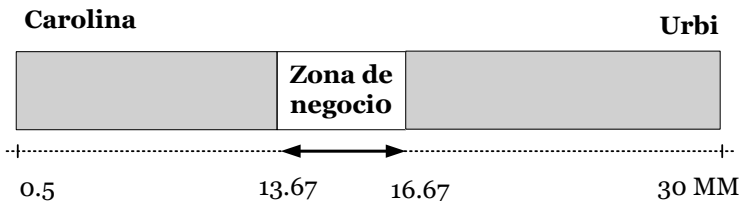
$$(30 - p_U)(0,6) + (30 - 20)(0,4) = 22 - 0,6p_U$$

A fin de que Urbi tenga incentivos para decir la verdad, debe ser cierto que:

$$22 - 0,6p_U \geq 12 \rightarrow p_U \leq 16,67$$

Es decir, para que Carolina pueda incentivar a Urbi a decir la verdad sobre su tipo, debe ofrecer un precio menor o igual a 16,67 millones por el cuadro.

La “zona de negocio” donde ambos estarían dispuestos a revelar su verdadero tipo se muestra en la siguiente gráfica:



Antes de terminar considere el siguiente problema con solución:

Problema resuelto 1

Luego de terminar este curso usted consigue su primer contrato de consultoría: asesorar a una empresa colombiana, llamémosla C , sobre la decisión de entrar a competir en el mercado peruano. El mercado peruano está actualmente dominado por un monopolio, llamémoslo M , pero el gobierno de ese país ha decidido abrir el mercado a competidores extranjeros. La empresa colombiana tiene poca información sobre la estructura de costos de M y sobre sus posibles acciones cuando se vea amenazada. Si M lucha en una guerra de precios y resulta que es de bajos costos, la empresa C no podrá resistir por mucho tiempo y tendrá que retirarse; sin embargo, si es de altos costos la amenaza no será creíble y C podrá consolidarse en ese mercado suramericano. Sea λ la probabilidad de que la empresa M sea de bajos costos y $(1 - \lambda)$ que sea de altos costos, diseñe un juego estático de información incompleta, y explique el o los EBN (en estrategias puras) como función de λ . *¿Qué recomendaría hacer para obtener más información sobre λ ?*

Solución

Es claro que la estrategia de C es entrar a competir (E) o no entrar (NE). Por lo tanto, su conjunto de estrategias es $\{E, NE\}$. Por otro lado, también es claro que la estrategia de M es resistirse a la entrada de C mediante una guerra de precios (G) o no llevar a cabo la amenaza de la guerra de precios (NG). Por lo tanto, podemos definir cuatro estrategias que dependerán del tipo de M : $\{(G, NG), (G, G), (N-G, G), (G, G)\}$. Considere la siguiente matriz de pagos para cada uno de los tipos posibles de M :

Si M es de bajos costos (lo cual ocurrirá con probabilidad λ):

C/M	G	NG
E	(-1 , 2)	(2 , 1)
NE	(0 , 1)	(0 , 0)

Note que de acuerdo con el enunciado del problema “Si M lucha en una guerra de precios y resulta que es de bajos costos, la empresa C no podrá resistir por mucho tiempo y tendrá que retirarse”. Es claro que luego de hacer el análisis usual de esta matriz el equilibrio de C es no entrar y para M hacer la guerra de precios. Note que el juego es simultáneo por lo que M no puede esperar a ver si C entró o no antes de iniciar la guerra de precios.

Si M es de altos costos (lo cual ocurrirá con probabilidad $(1 - \lambda)$):

C/M	G	NG
E	(1 , 1)	(2 , 2)
NE	(0 , -1)	(0 , 0)

Note que de acuerdo con el enunciado del problema “si M es de altos costos la amenaza no será creíble y C podrá consolidarse en ese mercado suramericano”. Es claro que luego de hacer el análisis usual de esta matriz el equilibrio de C es entrar a competir y para M no hacer la guerra de precios.

¿Qué terminará haciendo C , que es la empresa que está asesorando? Depende de las creencias que se tengan sobre λ . El pago esperado de entrar es:

$$-1\lambda + 2(1-\lambda) = 2-3\lambda$$

Mientras que el pago esperado de no entrar es:

$$0\lambda + 0(1-\lambda) = 0$$

Por lo tanto, la empresa C entrará siempre que

$$2-3\lambda > 0 \rightarrow \lambda < 0,67.$$

Si la creencia de la empresa C sobre si la empresa M es de bajos costos, es menor a 0,67, la empresa C entrará a competir. Si, por el contrario, la empresa C piensa que la empresa M es de bajos costos con una probabilidad mayor a 0,67, decidirá no entrar a competir en ese mercado.

Para encontrar más información sobre λ se podrían analizar en detalle los estados financieros de la empresa y compararla con otras empresas similares en otros mercados. Si es un monopolio muchas veces esa información es pública. Por otro lado, se podría recabar información de clientes y proveedores.

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos

PROBLEMA 1

En la aplicación 1 (juego de los limones) indique cuál debería ser la garantía para que Marta pueda vender su vehículo si es tipo bueno.

Solución:

La garantía deber estar en el rango $[13,16]$.

PROBLEMA 2

Considere el ejemplo desarrollado en la sección de diseño de contratos. Utilizando la información que allí se presenta diseñe un contrato donde el gerente recibe un pago fijo de 20 más un bono, dependiendo de los resultados obtenidos.

Solución:

Un pago fijo de 20 y un bono de 334 si el negocio sale bien.

PROBLEMA 3

Considere el siguiente juego de información incompleta: las acciones del *Jugador R* son (u, d) y las acciones del *Jugador C* son (l, r). Los pagos del *Jugador C* no son conocidos por el *Jugador R*. Sin embargo, el *Jugador R* sabe que el *Jugador C* puede ser tipo A con pro-

babilidad a o tipo B con probabilidad b . Suponga que . Los pagos de cada jugador, dependiendo del tipo del *Jugador C*, se presentan abajo:

Jugador C tipo A:

		C	
		l	r
R	u	(1 , 2)	(0 , 0)
	d	(0 , 0)	(2 , 1)

Jugador C tipo B:

		C	
		l	r
R	u	(1 , 0)	(0 , 2)
	d	(0 , 2)	(2 , 0)

Indique, si existen, el o los Equilibrios Bayesianos de Nash en estrategias puras de este juego. ¿Qué pasa si $a \neq b$?

Solución:

Este juego tiene un único EBN: $[d,(r,l); 1,(0,5,0,5).]$

PROBLEMA 4

El dueño de una firma de consultoría gerencial está estudiando contratarlo a usted para abrir una práctica de teoría de juegos y ampliar el portafolio de servicios que ofrece su firma. Como parte de la entrevista de trabajo le pide que diseñe su propio contrato de trabajo, el cual debe tener dos condiciones: 1. Que lo acepte, y 2. Que tenga incentivos para hacer su máximo esfuerzo (sin necesidad de supervisión). Es claro que su sueldo dependerá de alguna medida observable del éxito de su nueva práctica de teoría de juegos que liderará. Sea r esa medida. Ambos saben que el éxito o fracaso de este nuevo negocio no solo depende de su esfuerzo sino también de otras variables exógenas. Luego de algunos supuestos y de común acuerdo con usted, se establece que un alto nivel de esfuerzo tiene un valor de 100 millones y lleva la probabilidad de éxito de la nueva práctica a 0,75; por otro lado, un bajo nivel de esfuerzo no genera ningún costo para usted y el éxito (o fracaso) será consecuencia estrictamente de la suerte, donde con una probabilidad de 0,5 tendrá éxito el negocio y con una probabilidad de 0,5 será un fracaso. Por otro lado, la noción de “éxito” se cuantifica en utilidades mayores a los 1,500 millones, mientras que un “fracaso” sería utilidades por menos de 100 millones.

Tanto su futuro jefe como usted saben que el 65% de los gerentes no se esfuerzan mientras que el 35% si lo hacen. Usted está devengando actualmente un salario de 50 millones y acuerda, dentro de las cláusulas del contrato, que como mínimo debe recibir 25 millones cualquiera sea el resultado de esta nueva práctica al final del año. Usted le dice al presidente de la firma que se vaya a tomar un café y que en 20 minutos regrese para firmar el contrato que usted habrá diseñado. Él sonríe y le deja la siguiente tabla como ayuda, donde se muestra la inferencia que él haría sobre su nivel de esfuerzo, dados los resultados observados al final del año:

Resultados observados		
Esfuerzo inferido		
	Buenos ($r = 1.500$)	Malos ($r = 100$)
Alto ($e = e_a$)	0.73585	0.48148
Bajo ($e = e_b$)	0.26415	0.51852

Solución:

El primer paso es construir la tabla de probabilidades condicionales.

Resultados observados		
Esfuerzo inferido		
	Buenos ($r = 1.500$)	Malos ($r = 100$)
Alto ($e = e_a$)	0.73585	0.48148
Bajo ($e = e_b$)	0.26415	0.51852

La condición de participación del gerente y la condición de alineación de incentivos generan las siguientes soluciones:

$$s(r = 1500) = 300 \text{ y } s(r = 100) = -100.$$

Como no es posible ofrecer un contrato con sueldos negativos y dado su requerimiento que como mínimo debe recibir 25 millones, el contrato óptimo sería: $s(r = 1500) = 425$ y $s(r = 100) = 25$.

CAPÍTULO 6.

JUEGOS DE SEÑALES

Los juegos de señales son un tipo de juegos bayesianos (juegos de información incompleta) dinámicos. En estas interacciones uno de los jugadores envía una señal, y el otro la recibe a fin de actualizar sus creencias y escoger una acción.

Antes de estudiar la estructura formal de este tipo de juegos, considere el siguiente ejemplo: una empresa productora de papel piensa construir una fábrica cerca de una determinada población. Los habitantes están preocupados por los daños ambientales que potencialmente se puedan generar y la consecuente pérdida de valor de sus propiedades. La empresa asegura que no hay de qué preocuparse pues, dada la alta demanda de vivienda que se espera para los profesionales que trabajarán en la planta, el valor de los inmuebles más bien subirá en el futuro.

Como es de esperar, los vecinos no le creen a los directivos de la compañía y les piden que respalden sus apreciaciones con compromisos creíbles. Es decir, *¿qué señal puede enviar la empresa para que los vecinos estén tranquilos sobre el valor futuro de sus propiedades?*

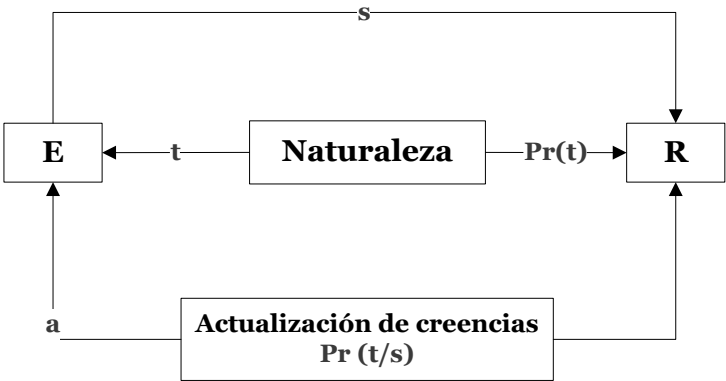
Una forma de hacerlo es contratar una agencia independiente de finca raíz (junto con la asociación de vecinos) y valorar cada una de las viviendas. Luego la empresa hace la siguiente oferta: firmar un contrato mediante el cual se compromete, si el dueño del inmueble así lo desea, a comprar cada casa por ese valor establecido dentro de cinco años.

Si los costos esperados para la empresa de firmar ese acuerdo con los propietarios son suficientemente altos (en caso de que en realidad las propiedades pierdan valor) entonces ese acuerdo sería una señal creíble.

Como todo juego bayesiano, los juegos de señales buscan revelar el tipo de los jugadores ante una determinada interacción estratégica.

Estructura básica de los juegos de señales

En la siguiente figura se muestra la estructura básica de un juego de señales.



La “naturaleza” juega primero asignando los tipos a cada jugador (transformación de Harsanyi). En particular, el *Jugador E* (el que envía la señal) conociendo su tipo, t , y conociendo la acción esperada del *Jugador R* (el que recibe la señal), a , escoge una señal para enviar, s , que maximiza sus pagos. Por otro lado, el *Jugador R* recibe de la naturaleza una creencia sobre el tipo de E , $\Pr(t)$, , que cuando recibe la señal actualiza sus creencias sobre el tipo de E , $\Pr(t|s)$, y escoge la acción, a , que maximiza sus pagos.

Como todo juego bayesiano, las estrategias en los juegos de señales se clasifican en dos grupos: estrategias integradoras, donde todos los tipos envían la misma señal, y estrategias separadoras, donde cada tipo envía una señal diferente.

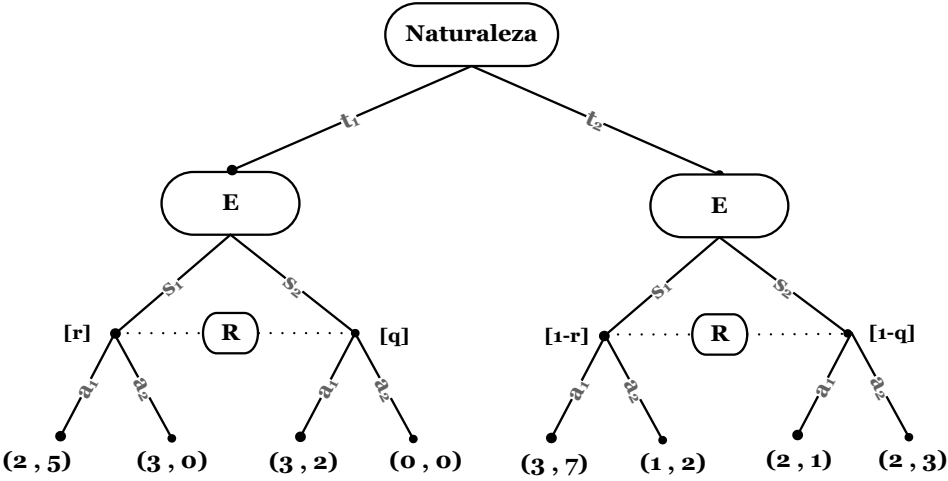
Ejemplo

Considere el siguiente juego de señales abstracto:

$$\{(E,R); (t_1,t_2); (s_1,s_2); (a_1,a_2); (0.5,0.5)\}$$

En este caso hay dos jugadores, E y R , el *Jugador E* puede ser de dos tipos, t_1 y t_2 , y puede enviar dos señales, s_1 y s_2 , por otro lado, el *Jugador R* tiene dos posibles acciones, a_1 y a_2 , y sus creencias sobre el tipo de E , es que E puede ser tipo t_1 con probabilidad 0,5 y tipo t_2 con probabilidad 0,5.

La siguiente es la representación gráfica de este juego con sus respectivos pagos:



En este contexto, r es la probabilidad bayesiana que calcula el *Jugador R* sobre el tipo de E cuando recibe la señal s_1 . Es decir:

$$r = Pr(t = t_1 | s = s_1)$$

Y q es la probabilidad bayesiana que calcula R sobre el tipo de E cuando recibe la señal s_2 . Es decir:

$$q = Pr(t = t_1 | s = s_2)$$

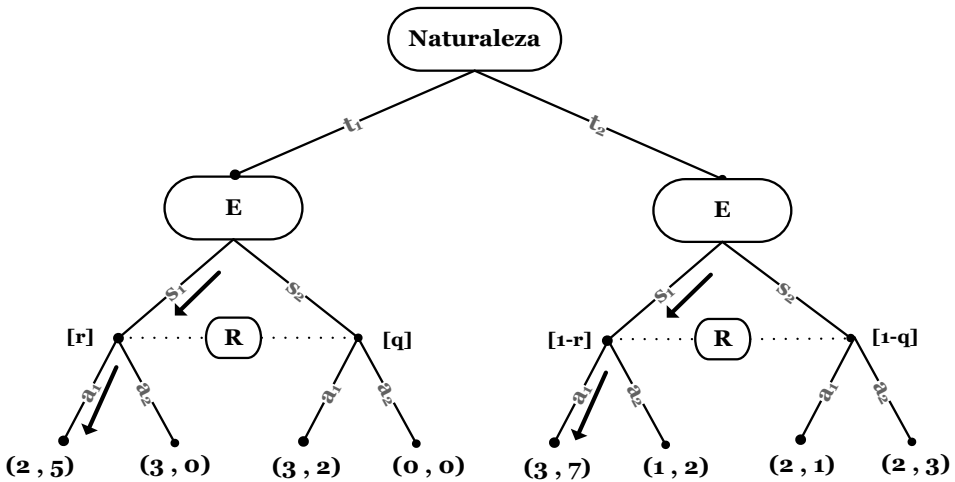
Consideramos primero el equilibrio integrador en donde los dos tipos envían la misma señal. En este caso el pago esperado del *Jugador R* cuando juega a_1 es:

$$5r + 7(1-r) = 7-2r$$

Y el pago esperado de jugar a_2 es:

$$0r + 2(1-r) = 2-2r$$

Por lo tanto, es claro que para cualquier valor de r , el *Jugador R* jugará a_1 cuando reciba la señal s_1 , como se representa en la siguiente gráfica:



Para evaluar que el candidato a equilibrio $\{(s_1, s_1), (a_1, a_1), (r, q)\}$ es realmente un equilibrio de señales, debemos probar que ninguno de los dos jugadores tiene incentivos para desviarse. Es claro que el *Jugador R* no tiene incentivos para desviarse (jugar a_2 en vez de a_1) si recibe la señal s_1 . Pero queda por demostrar que el *Jugador E* tampoco tiene incentivos para desviarse (enviar la señal s_2 en vez de la señal s_1).

¿Qué hace el jugador R cuando recibe la señal s_2 ? Si juega a_1 su pago esperado será:

$$2q + 1(1-q) = 1 + q$$

Por otro lado, si juega a_2 su pago esperado será:

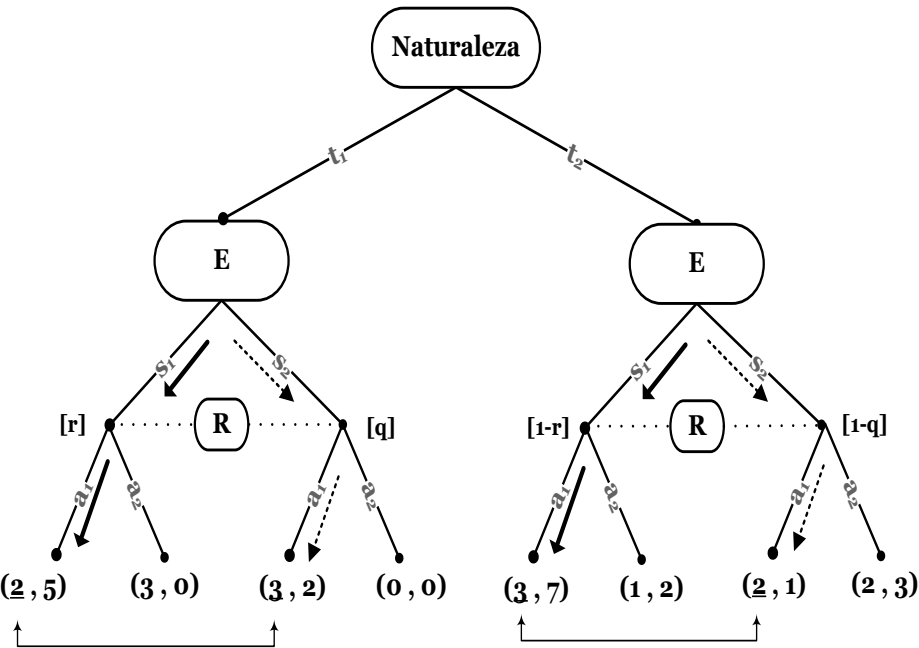
$$0q + 3(1-q) = 3-3q$$

Como vemos, el *Jugador R* será indiferente si:

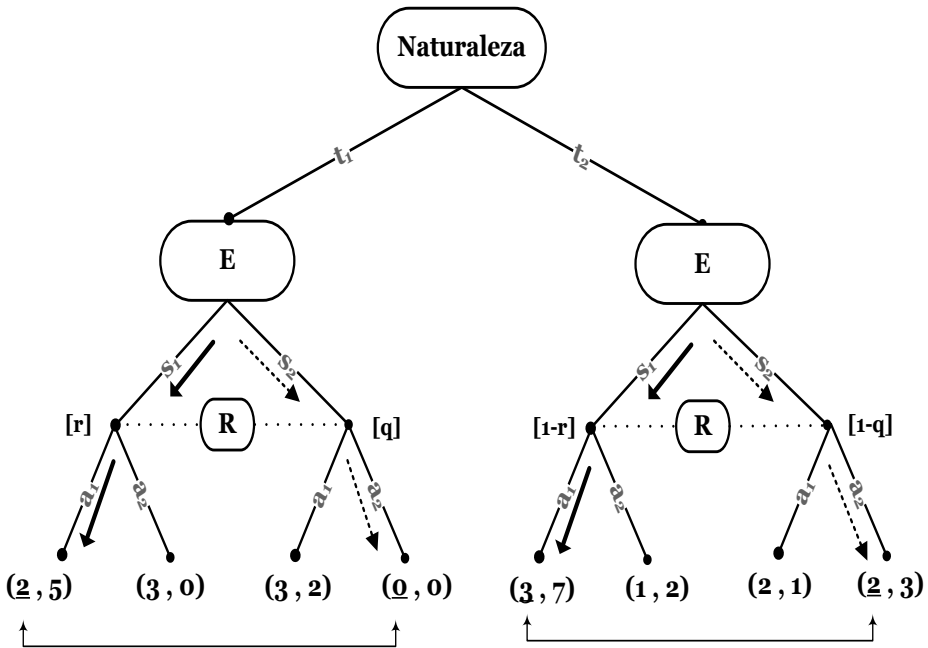
$$1 + q = 3-3q \rightarrow q = 0,5$$

Entonces, debemos evaluar dos escenarios:

Escenario 1, $q > 0,5$: en este caso es preferible para el *Jugador R* jugar a_1 ($1 + q > 3 - 3q$) cuando recibe la señal s_2 , pero como se muestra en el siguiente gráfico, si el *Jugador E* es tipo t_1 tiene incentivos para desviarse y, en consecuencia, no existe equilibrio de señales si $q > 0,5$.



Escenario 2, $q < 0,5$: en este caso es preferible para el *Jugador R* jugar a_2 ($1 + q < 3 - 3q$) cuando recibe la señal s_2 ; como se muestra en el siguiente gráfico, el *Jugador E* no tendrá incentivos para desviarse y, en consecuencia, existe un equilibrio de señales si $q < 0,5$.



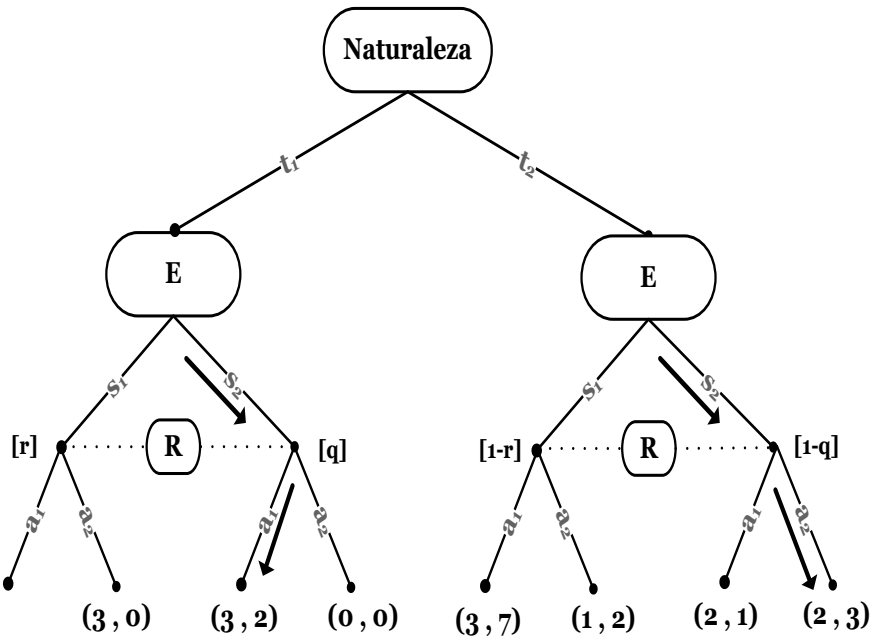
Entonces, para que exista equilibrio de señales debe ser cierto que la actualización bayesiana de las creencias del *Jugador R* cuando recibe la señal s_2 debe ser menor a 0,5.

Resumiendo, existe un equilibrio integrador en s_1 :

$$\{(s_1, s_1); (a_1, a_2); r = 0,5; q < 0,5\}$$

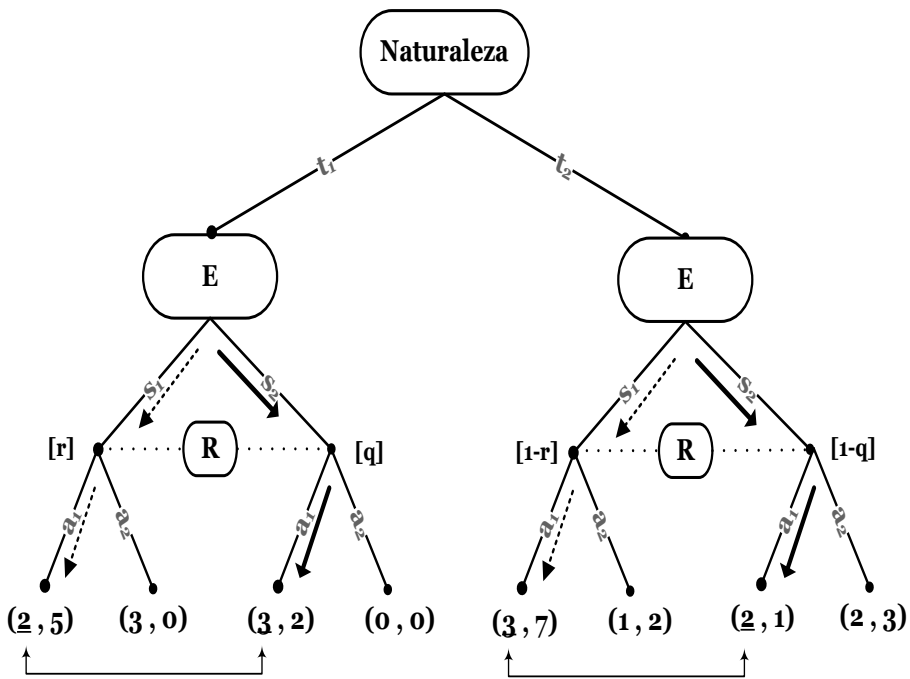
La lectura de este equilibrio es la siguiente: los dos tipos enviarán la misma señal, es decir: (s_1, s_1) . El *Jugador R* jugará a_1 si recibe la señal s_1 , y jugará a_2 si recibe la señal s_2 . Las actualizaciones bayesianas que “soportan” el equilibrio es r (cualquier r) pero $q < 0,5$. Una vez analizado en profundidad el equilibrio integrador en s_1 , es fácil saber si existe un equilibrio integrador en s_2 . Es decir, ¿es $\{(s_2, s_2), (a_1, a_2), (r, q)\}$ un equilibrio de señales?

Ver gráfico:

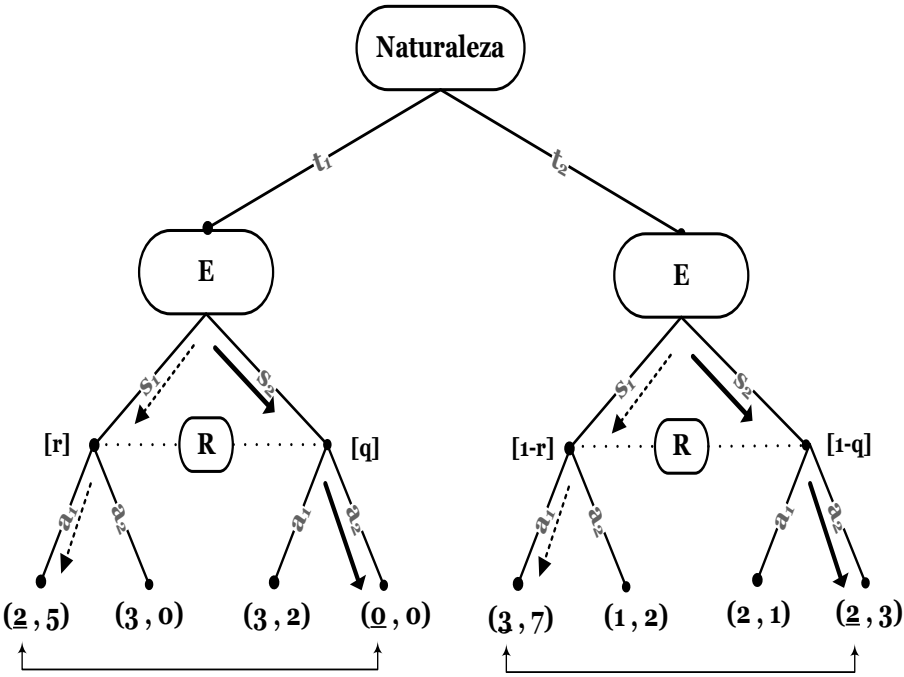


Ya sabemos que si el *Jugador R* recibe la señal s_2 y juega a_1 su pago esperado será $1+q$, y si juega a_2 su pago esperado será $3-3q$, siendo indiferente cuando $q=0,5$. Entonces, otra vez debemos evaluar dos escenarios:

Escenario 1, $q > 0,5$, en este caso es preferible para el *Jugador R* jugar a_1 ($1 + q > 3 - 3q$) si recibe la señal s_2 ; sin embargo, como se muestra en el siguiente gráfico, si el *Jugador E* es tipo t_2 tendría incentivos para desviarse y, en consecuencia, no existe equilibrio de señales si $q > 0,5$.



Escenario 2, $q < 0,5$: en este caso es preferible para el *Jugador R* jugar a_2 ($1 + q < 3 - 3q$) cuando recibe la señal s_2 ; sin embargo, como se muestra en el siguiente gráfico, independientemente del tipo, el *Jugador E* tendrá incentivos para desviarse y, en consecuencia, tampoco existe equilibrio de señales integrador en s_2 si $q < 0,5$.

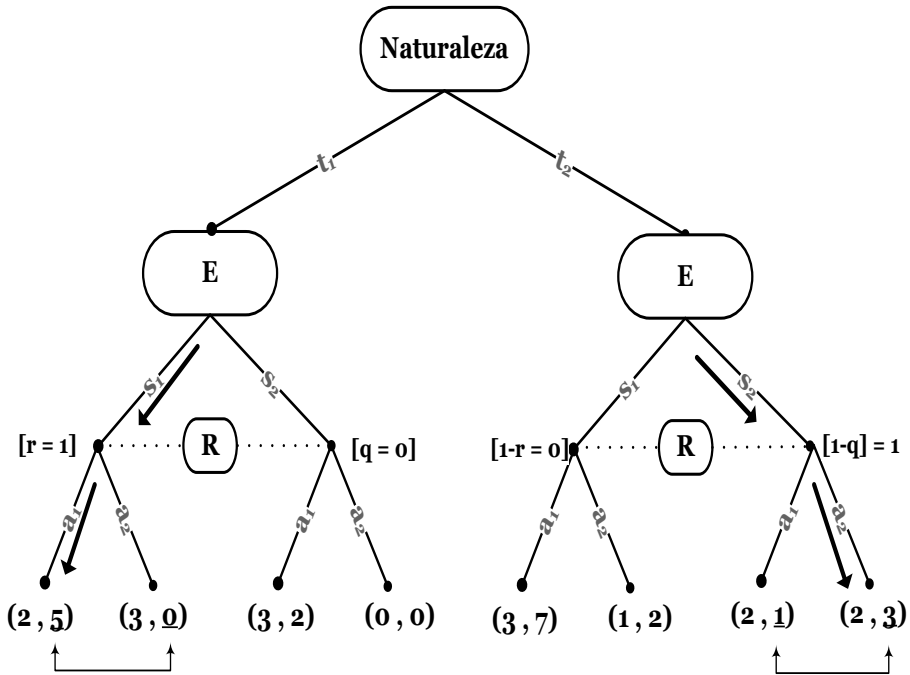


Para el caso de los equilibrios de señales separadores es más sencillo el análisis ya que si son realmente equilibrios deben necesariamente revelarse los tipos.

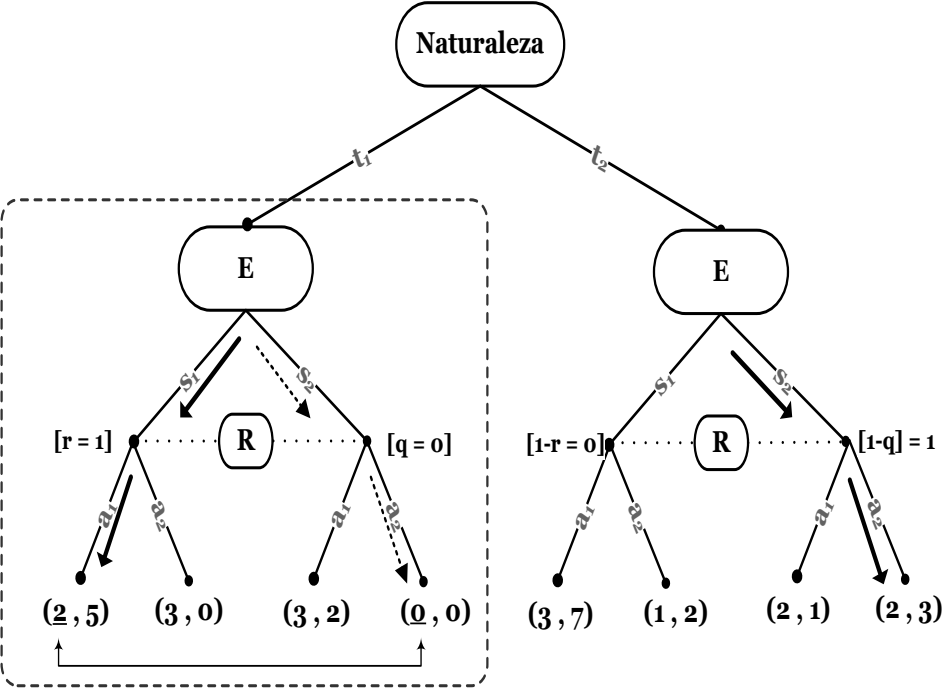
Considere el siguiente candidato a equilibrio separador:

$$\{(s_1, s_2), (a_1, a_2), (r=1, q=0)\},$$

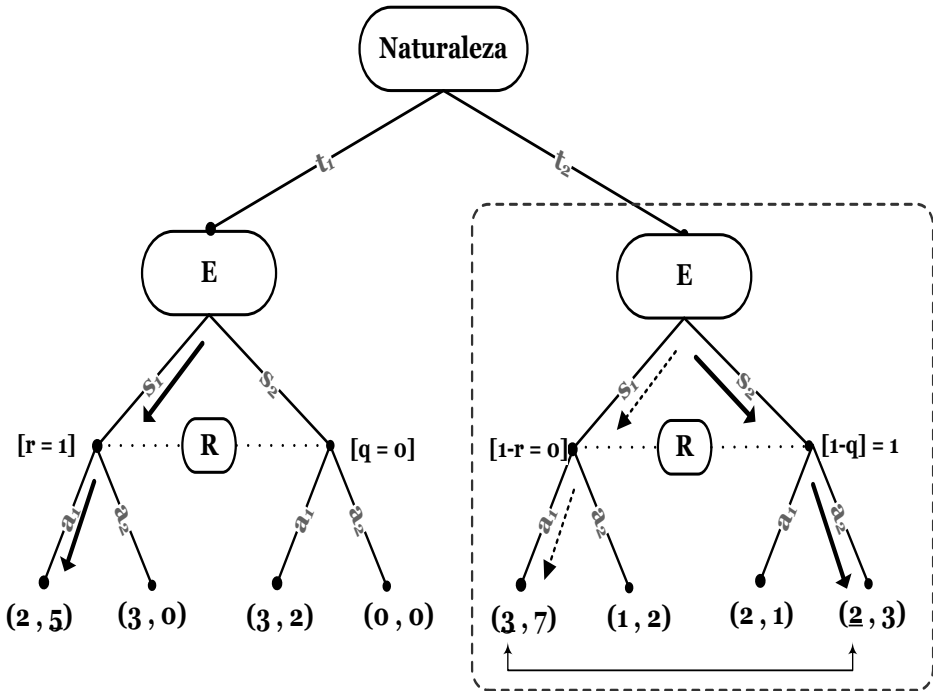
tal como se muestra en el siguiente gráfico:



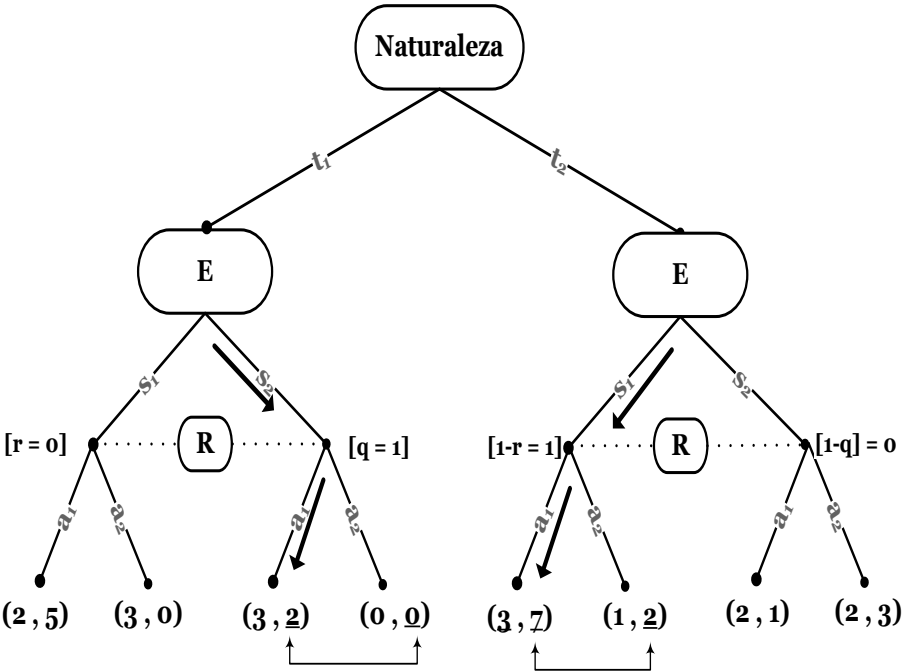
Es fácil ver que si el *Jugador E* es tipo t_1 no tendrá incentivos para desviarse, es decir, enviar la señal s_2 en vez de la señal s_1 , ya que si el *Jugador R* recibe la señal s_2 pensará que está en el sub-juego de la derecha y, en consecuencia, jugará a_2 , pero esto llevaría el pago del *Jugador E* tipo t_1 de 2 a 0, como se muestra en el siguiente gráfico:



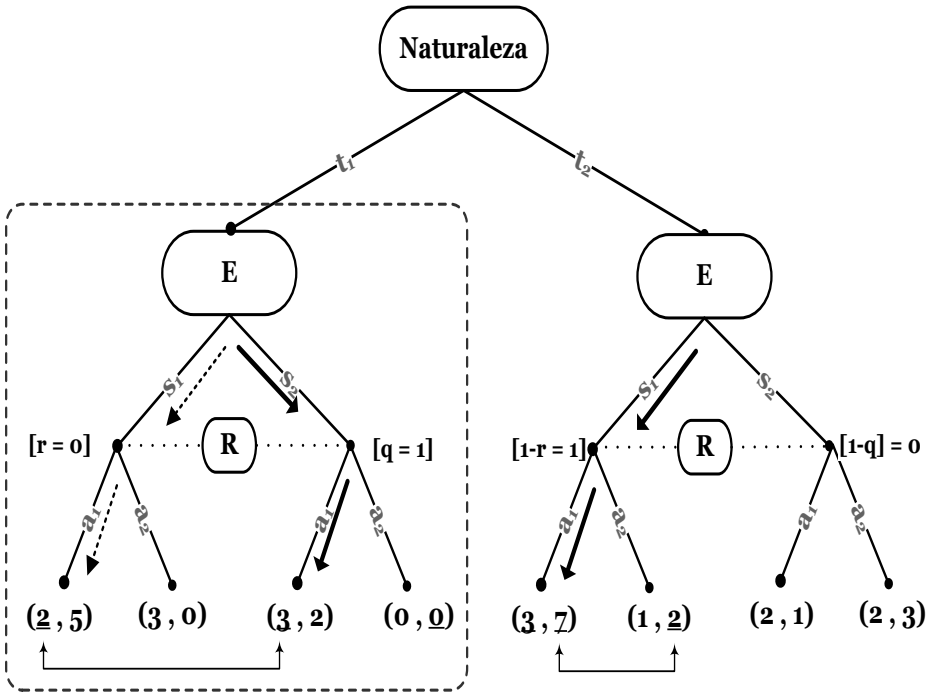
Sin embargo, si el *Jugador E* es tipo t_2 sí tendría incentivos para desviarse del equilibrio propuesto puesto que si envía la señal s_1 en vez de la señal s_2 , el *Jugador R* pensará que está en el sub-juego de la izquierda y, en consecuencia, jugará a_1 , y esto llevaría el pago del *Jugador E* de 2 a 3, como se muestra en el gráfico siguiente:



Por último, considere el siguiente candidato a equilibrio separador: $\{(s_2, s_1), (a_1, a_1), (r=0, q=1)\}$, como se muestra en el gráfico a continuación:



Evidentemente el *Jugador R* no tiene incentivos para moverse y siempre jugará a_1 independientemente de la señal que reciba. El *Jugador E* tipo t_1 podría desviarse enviando la señal s_2 , como se muestra en el siguiente gráfico, pero como el *Jugador R* siempre juega a_1 independientemente de la señal que reciba, entonces el pago del *Jugador E* bajaría de 3 a 2.



Por otro lado, si el *Jugador E* es tipo t_2 , tampoco tiene incentivos para desviarse ya que, como se muestra en el siguiente gráfico, su pago pasaría de 3 a 2. Como ningún jugador tiene incentivos para desviarse, entonces $\{(s_2, s_1), (a_1, a_1), (r = 0, q = 1)\}$ representa un equilibrio de señales separador para este juego.

Habiendo analizado en detalle este juego de señales abstracto, continuemos ahora con dos aplicaciones muy importantes de este tipo de juegos.

Aplicaciones

APLICACIÓN 1.

EL JUEGO DE LA EDUCACIÓN⁴⁶

Manuel está tratando de conseguir un trabajo en la empresa de Juana; él conoce su propia productividad pero Juana no, así que el proceso de negociación se podría analizar como un juego bayesiano de señales.

Suponga, para simplificar la situación, que Manuel puede ser de dos tipos: alta productividad ($t = t_a$) o baja productividad ($t = t_b$). Él conoce su tipo, pero Juana solo sabe que la mitad de los empleados son de alta productividad y la otra mitad son de baja productividad, es decir, sus creencias *a priori* son:

$$\Pr(t = t_a) = \Pr(t = t_b) = 0,5$$

El valor agregado de Manuel cuando es de alta productividad es 40, es decir, $h(t = t_a) = 40$; pero solo de 15 cuando es de baja productividad, es decir, $h(t = t_b) = 15$.

Como Juana no sabe con certeza cual es el nivel de productividad de Manuel, este debe enviar una señal, s , que luego Juana usará para ofrecerle un salario que dependerá de la señal recibida, $w(s)$.

Si Manuel no puede enviar una señal creíble de su productividad, entonces Juana le ofrecerá un sueldo promedio dada sus expectativas *a priori*, pero en ese caso, el sueldo solo será aceptado por Manuel tipo baja productividad, ya que Manuel

46 Esta aplicación está motivada en Rasmussen (2007).

tipo alta productividad no lo aceptaría, llevándonos de nuevo al problema de los limones (carros usados malos) que estudiamos en el capítulo anterior.

Supongamos que Manuel decide enviar como señal su nivel educativo. Como toda señal, para que sea creíble debe generar un costo para el que la envía, donde al tipo más productivo debe costarle menos educarse que al tipo menos productivo. Sea el costo de la educación, como función del tipo el siguiente:

$$\begin{aligned} c(t = t_a) &= 12 \\ c(t = t_b) &= 76/3 \end{aligned}$$

Entonces, al tipo más productivo le sale casi la mitad de costoso de lo que le sale al tipo menos productivo educarse⁴⁷. Para fines de modelación suponga que la señal es $s=1$ en caso de que Manuel se haya educado y $s=0$ en caso de que no se haya educado⁴⁸.

Suponga que la función de beneficios de Manuel viene dada por:

$$w - 40s/h - c$$

Donde w es el sueldo ofrecido, s es la señal (1 o 0), h es la productividad según el tipo (40 ó 15) y c es el costo de haberse educado según el tipo (12 ó 76/3). Por ejemplo, si Manuel es $t = t_b$ y decide no educarse, $s=0$, entonces su beneficio será

47 Note que la educación *per se* en este modelo no mejora la productividad de Manuel. Lo importante es que si Manuel es más productivo, entonces le costará menos educarse. Michael Spence ganó el premio Nobel de economía en 2001 por haber formalizado este argumento.

48 Para contextualizar esta situación, la señal puede ser, por ejemplo, tener una maestría o no tenerla.

simplemente w (el cual por supuesto se supone positivo). Es decir, cualquier sueldo positivo que le ofrezca Juana será suficiente para Manuel.

Por otro lado, si Manuel es $t = t_a$ y decide educarse, $s=1$ entonces su beneficio será:

$$w - 40 - 1/40 - 12 \rightarrow w - 13$$

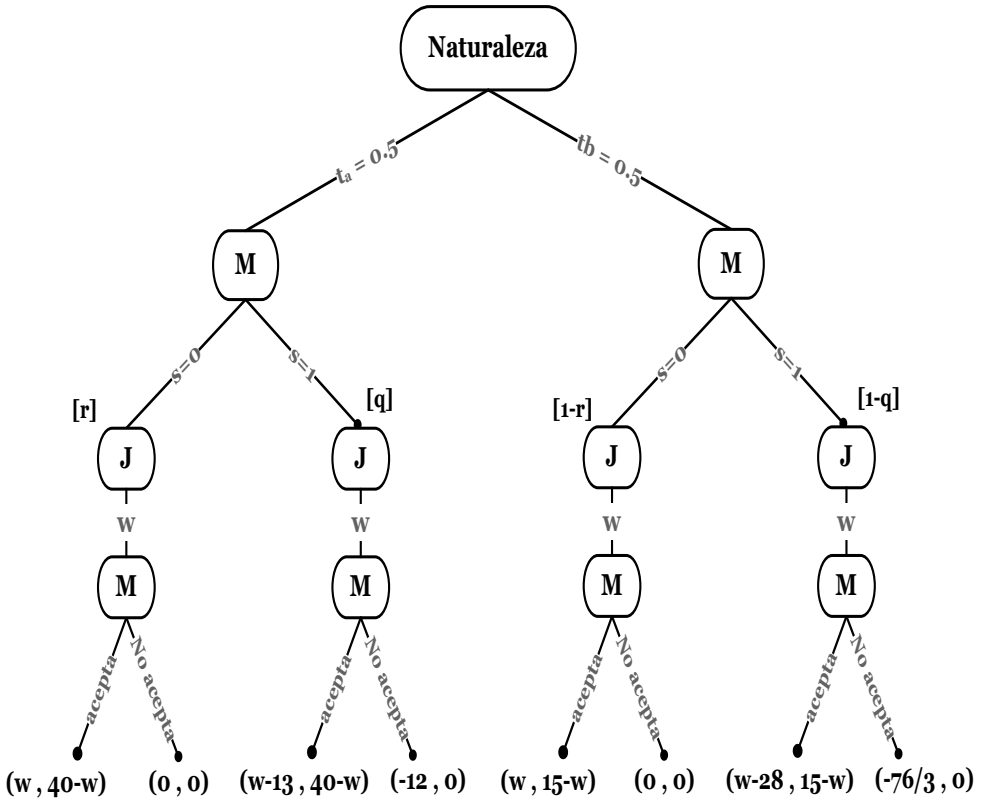
Pero como el sueldo tiene que ser positivo, entonces $w \geq 13$. Lo cual es intuitivo ya que si el costo de educarse es 12, debe recibir un sueldo que al menos compense dicha inversión.

Por otro lado, supongamos que la función de beneficios de Juana se puede representar como:

$$h - w$$

Es decir, como la diferencia entre el valor agregado que genera Manuel y lo que ella debe pagarle como salario.

En el siguiente gráfico se muestra la evolución del juego: primero la naturaleza decide cuál es el tipo de Manuel, luego Manuel decide si envía o no la señal, luego Juana, dada la señal (o en ausencia de señal), establece un sueldo que finalmente Manuel acepta o rechaza.



Suponga que r y q representan las actualizaciones bayesianas de las creencias de Juana respecto de la productividad de Manuel una vez que recibe la señal, es decir:

$$r = Pr(t = t_a | s = 0)$$

$$q = Pr(t = t_a | s = 1)$$

Por ejemplo, si Manuel es tipo $t = t_b$ pero decide educarse para enviar una señal de alta productividad, entonces su beneficio será:

$$w - 40 \frac{1}{15-76/3} = w - 28$$

Por otro lado, para esa situación el beneficio de Juana será $15-w$, como se muestra en la parte derecha del gráfico anterior.

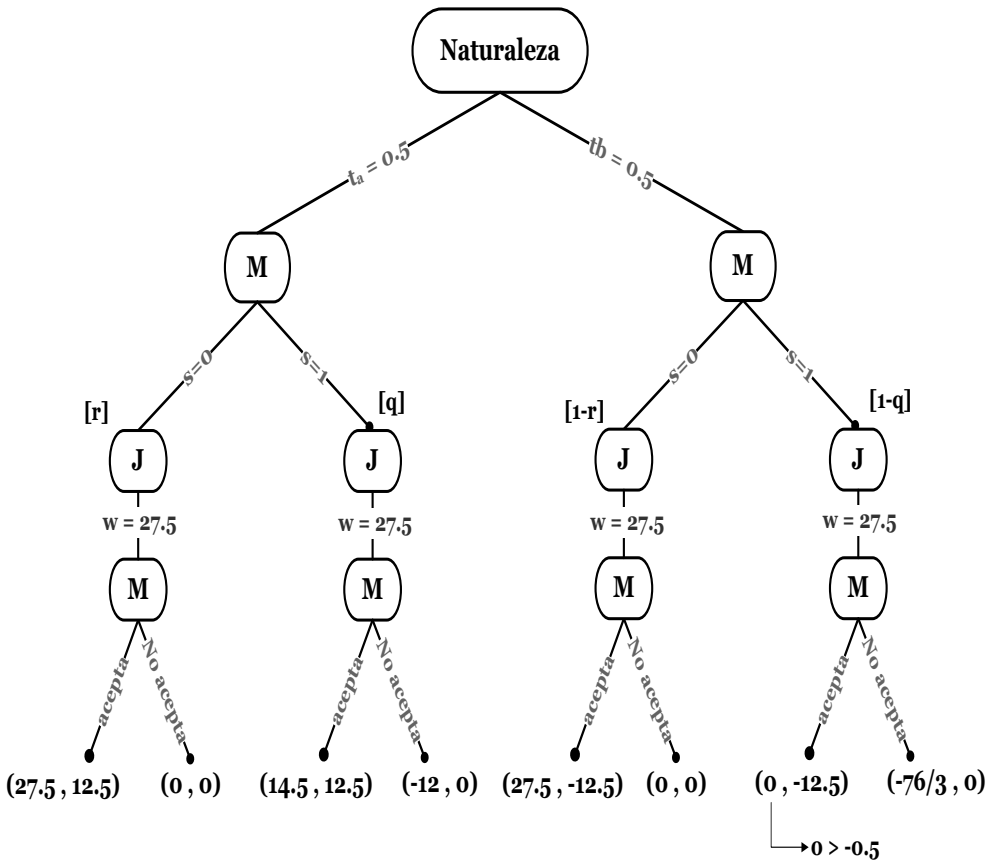
Estudiemos ahora algunos candidatos a equilibrio para este juego. Suponga una estrategia integradora (*pooling*) donde ninguno de los tipos se educa, es decir, considere la estrategia de Manuel:

$$s(t = t_a) = s(t = t_b) = 0$$

En este caso Juana ofrecerá un sueldo basado en sus creencias *a priori*, y supongamos que ella se conforma con un beneficio marginal igual a cero, es decir, que le paga a Manuel un sueldo igual al valor agregado que él le genere:

$$\begin{aligned} 0,5(15-w) + 0,5(40-w) &= 0 \\ w &= 27,5 \end{aligned}$$

Incorporando este sueldo al gráfico anterior, obtenemos:



Note que Manuel, independientemente de su tipo, siempre acepta ese salario. ¿Manuel tiene incentivos para desviarse? Claramente no, ya que si lo hace (no aceptar la oferta) su pago será 0. Por lo tanto, no educarse representa un equilibrio de señales para este juego (veremos más adelante que tampoco tiene incentivos para cambiar la señal).

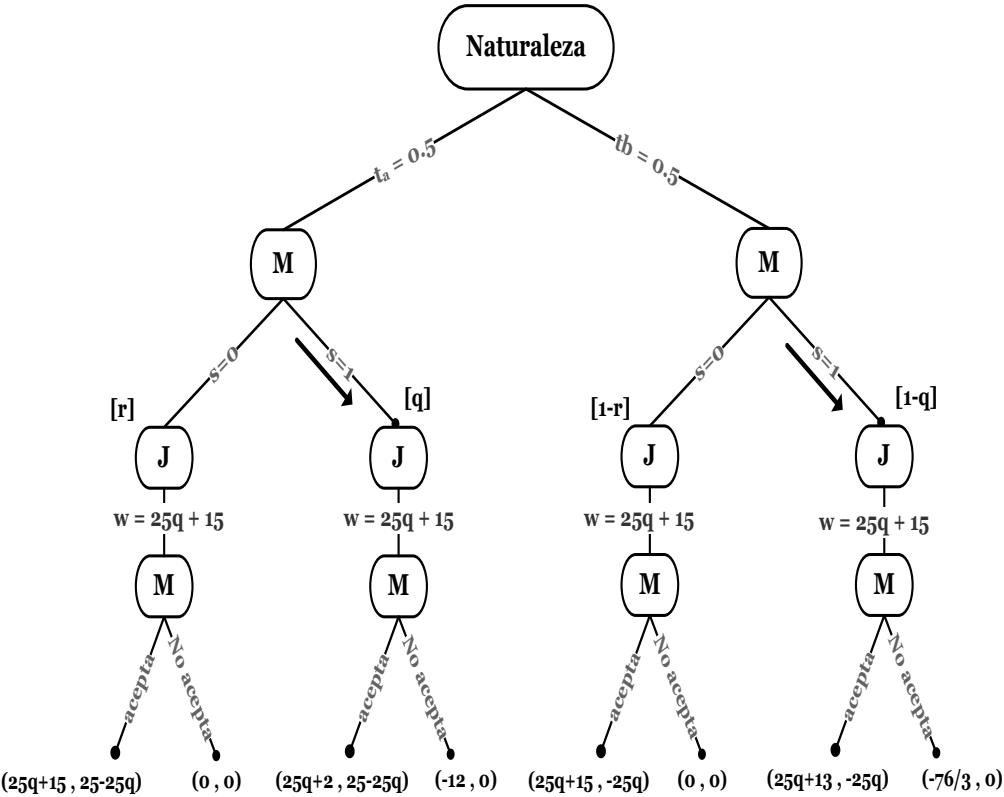
Considere ahora la otra estrategia integradora donde ambos tipos se educan, es decir:

$$s(t = t_a) = s(t = t_b) = 1$$

En este caso, el sueldo que ofrecerá Juana estará basado en sus creencias actualizadas sobre el tipo de Manuel luego de recibir la señal:

$$(1-q)(15-w) + q(40-w) = 0$$
$$w = 25q+15$$

Esta situación se muestra en la siguiente figura:



Analicemos primero cuando Manuel es $t = t_a$. Para que Manuel acepte la oferta de Juana luego de enviar la señal (educándose), debe ser cierto que:

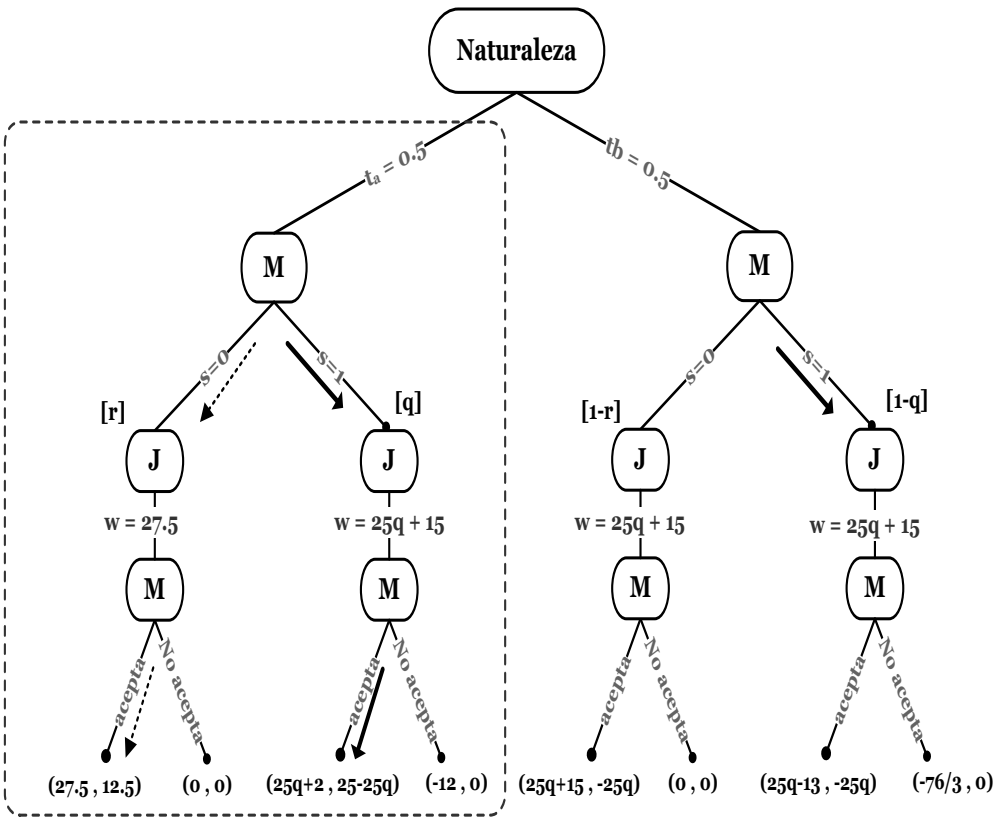
$$25q + 2 > -12$$

Es decir, el sueldo debe compensar lo que gastó en su educación. Lo cual será cierto para $q > -0,56$, que siempre es cierto.

¿Tendrá Manuel incentivos para desviarse, es decir, no enviar la señal educándose? Si es tipo alta productividad y no envía la señal el sueldo ofrecido será $w = 27,5$, por lo tanto, para que no haya incentivos para desviarse, debe ser cierto que (ver gráfico abajo):

$$25q + 2 > 27,5$$

Pero esto implica que $q > 1$, lo cual no es posible ya que q es una probabilidad. Por lo tanto, Manuel tipo alta productividad tendría incentivos para desviarse.



Si Manuel es $t = t_b$ aceptará la oferta siempre, ya que

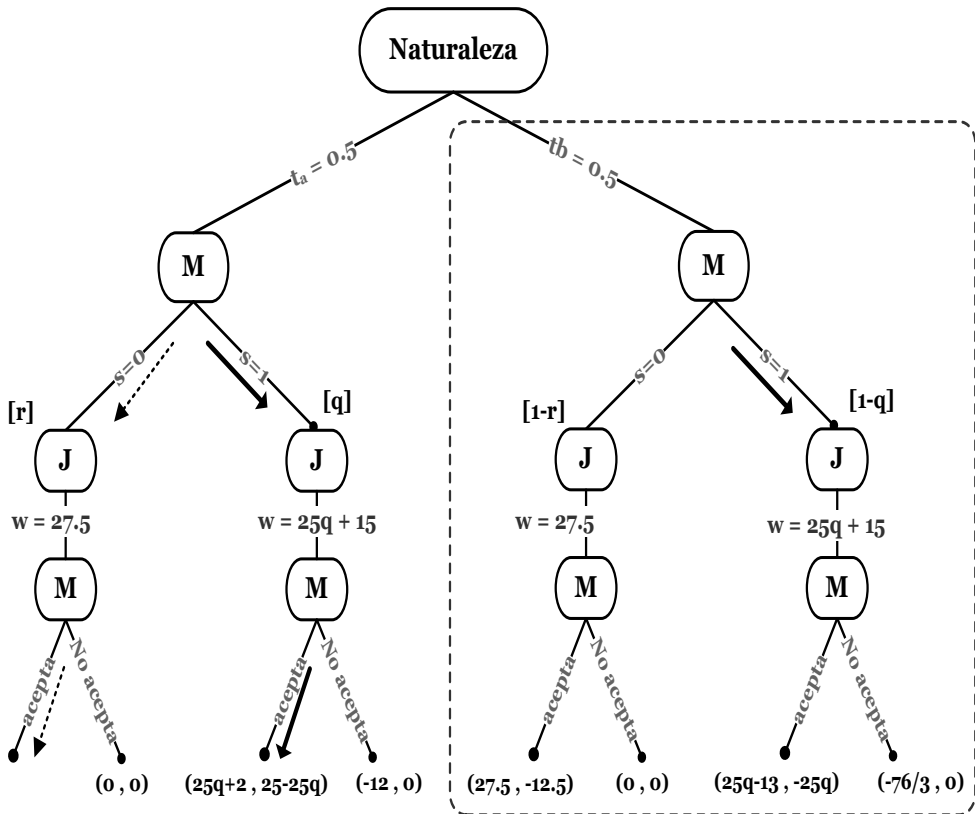
$$25q - 13 > -76/3$$

lo cual es cierto para todo q .

Si Manuel es tipo baja productividad y no envía la señal el sueldo ofrecido será $w = 27,5$, por lo tanto, para que no haya incentivos para desviarse, debe ser cierto que (ver gráfico abajo):

$$25q - 13 > 27,5$$

Pero esto implica que $q > 1$, lo cual no es posible ya que q es una probabilidad. Por lo tanto, Manuel tipo baja productividad también tendría incentivos para desviarse.



Como ambos tipos tienen incentivos para desviarse no existe un equilibrio de señales integrador en $s = 1$.

Ahora analicemos los equilibrios separadores. Como ya se estudió, los equilibrios separadores revelan el tipo, es decir, si existe un equilibrio separador entonces debe ser cierto que:

$$r = Pr(t = t_a / s = 0) = 0 = Pr(t = t_a / s = 1) = 1$$

Por lo tanto, el sueldo ofrecido por Juana bajo estas estrategias será:

$$w(s = 1) = 40$$

$$w(s = 0) = 15$$

Para que exista un equilibrio separador en este contexto debe ser cierto que Manuel acepte el contrato (condición de participación). Recordando que el beneficio de Manuel enviando la señal (y en consecuencia recibiendo un sueldo de 40) es:

$$40 - 40 \cdot \frac{1}{40} - 12 = 27$$

Es decir, es mayor que no enviando la señal:

$$15 - 40 \cdot \frac{0}{40} - 0 = 15$$

Por lo que a él le conviene “separarse” y enviar la señal si es tipo alta productividad.

La segunda condición para la existencia de equilibrio es que si Manuel es tipo baja productividad no tiene incentivos para hacerse pasar por tipo alta productividad enviando la señal. Si Manuel es tipo baja productividad y no envía la señal, su pago será:

$$15 - 40 \cdot 0 / 40 - 0 = 15$$

Si envía la señal su pago será:

$$40 - 40 \cdot 1 / 15 - 76 / 3 = 12$$

Por lo tanto Manuel tipo baja productividad no tendrá incentivos para enviar la señal.

Como se cumplen las dos condiciones existe un equilibrio de señales separador donde solo Manuel tipo alta productividad tiene incentivos para desviarse. Es fácil ver que no existe un equilibrio de señales donde el tipo alta productividad no se educa y el tipo baja productividad sí lo hace.

APLICACIÓN 2.

EL JUEGO DE LA EMISIÓN PÚBLICA DE ACCIONES⁴⁹

Juan Prieto quiere inscribir su empresa en la Bolsa de Valores mediante una Oferta Pública de Acciones (OPA). Los recursos obtenidos de la emisión se usarán para financiar proyectos de investigación y desarrollo de productos de alta tecnología.

49 Esta aplicación está motivada en Tirole (2006).

El éxito o fracaso de esas iniciativas está altamente correlacionado con la competencia de Juan no solo desde el punto de vista técnico sino también gerencial. Sea p la probabilidad de éxito de los proyectos si Juan es competente, y q la probabilidad de éxito si Juan no lo es. Supongamos además que $p > q$.

Juan conoce su tipo, pero el mercado solo tiene una creencia *a priori* igual a α de que Juan es competente y $1 - \alpha$ que Juan es incompetente.

El mercado entiende que el éxito de los proyectos que se generen por esas inversiones en investigación y desarrollo depende conjuntamente del proyecto *per se*, pero también de la competencia de Juan, por lo tanto, la probabilidad de éxito de los proyectos, m , viene dada por:

$$m = \alpha p + (1 - \alpha)q$$

Sea I la inversión requerida por Juan, la cual debe buscar en los mercados financieros mediante una OPA.

Para simplificar el análisis, suponga un mundo de un solo período donde una vez hecha la inversión I se genera un flujo de caja, FC , en el período siguiente que se descuenta a una tasa de interés r . Por lo que el Valor Presente Neto (VPN) de la inversión es:

$$VPN = -I + mFC/(1 + r)$$

Sin pérdida de generalidad se puede normalizar r haciendo $r = 0$. Entonces, para que $VPN > 0$ debe cumplirse que:

$$I \leq mFC$$

Los nuevos inversionistas que entran a participar en el proyecto exigen un lugar en la junta directiva (que es la que toma las decisiones de inversión), por lo que además del dinero que aportan, se espera que también apoyen y asesoren a Juan en la toma de decisiones. Sea ε ese aporte de los nuevos inversionistas que permitirá incrementar el valor de m . Es decir, una vez que los nuevos inversionistas entren a formar parte de la Junta Directiva, debe cumplirse que:

$$I \leq (m + \varepsilon)FC$$

Por la misma lógica de la aplicación de los limones y el *pecking order*, la valoración de las acciones estará subvaluada si Juan es competente y sobrevaluada si es incompetente.

Suponga que Juan ofrece a los nuevos inversionistas una cantidad a de dinero producto del flujo de caja que genera el proyecto. Por lo tanto, si suponemos que los inversionistas son neutrales al riesgo, para que acepten invertir en el proyecto debe ser cierto que:

$$(m + \varepsilon)a = I$$

Juan obtendría una cantidad igual a $FC - a$ una vez que entren a participar los nuevos inversionistas.

Suponga que Juan es competente y puede llevar a cabo el proyecto (suponiendo que tuviera el dinero requerido para hacerlo), su pago sería:

$$pFC$$

Si se asocia con los inversionistas su pago sería:

$$(p + \varepsilon) (FC - a)$$

Por lo tanto, para que Juan participe en el juego (condición de participación) debe ser cierto que:

$$\begin{aligned} (p + \varepsilon)(FC - a) &\geq pFC \\ \varepsilon FC &\geq (p + \varepsilon)a \end{aligned}$$

recordando que $(m + \varepsilon)a = I$, se obtiene:

$$\varepsilon FC \geq (p + \varepsilon)/(m + \varepsilon) I$$

Note que entre más alto sea el nivel de competencia de Juan (mayor p) más difícil es que acepte participar en el juego (incluir a los inversionistas externos en su proyecto). Para valores suficientemente altos de p , Juan prefiere no hacer el proyecto que invitar a los inversionistas externos. Este problema se conoce en la literatura financiera como el problema de subinversión.

¿Ese resultado implica que si Juan acepta el proyecto revela su verdadera competencia? No necesariamente, ya que esa relación también sugiere que entre más rentable sea el proyecto (FC) más costoso será para Juan dejarlo ir. En ese caso los inversionistas dudan entre si Juan está aceptando el proyecto porque su nivel de competencia es bajo, o porque el proyecto es muy rentable.

Puede decirse, entonces, que si se cumple la relación anterior existe un equilibrio de señales integrador donde se hace una OPA para cualquier tipo de competencia de Juan.

Suponga ahora que no se cumple la condición, es decir:

$$\varepsilon FC < (p + \varepsilon) / (m + \varepsilon) I$$

En este caso Juan solo aceptaría hacer la OPA si su nivel de competencia es bajo, por lo que $\alpha = 0$. Caso en el cual los inversionistas pueden comprar acciones de la OPA pero exigiendo una mayor participación en el FC para compensar su inversión. Sea b lo que piden los inversionistas, es decir, $(b > a)$.

Para que los inversionistas participen en el juego, debe ser cierto:

$$(q + \varepsilon)b = I$$

La condición para que Juan participe en el juego en este caso es:

$$(q + \varepsilon)(FC - b) \geq qFC$$

Si estas dos condiciones se cumplen simultáneamente, existirá un equilibrio de señales separador donde Juan tipo baja competencia acepta el proyecto y Juan tipo alta competencia no lo hace.

Antes de terminar considere el siguiente problema con solución:

Problema resuelto 1

Usted quiere trabajar en la prestigiosa firma de consultoría McKinsey & Co., sobretodo porque ellos acaban de abrir una práctica internacional de teoría de juegos. Le dan una entrevista

de trabajo para el martes 13 de octubre (hoy estamos a 22 de julio). Usted revisa la oferta de cursos de la universidad y le llama la atención uno que se dictará en el ciclo agosto-septiembre llamado Decisiones Gerenciales Estratégicas 2 (DGE2).

Juana, una reconocida experta en teoría de juegos, le ofrece un salario que depende de la “señal” que usted pueda transmitirle en esa entrevista. La estrategia de Juana puede representarse como una función $w: S \rightarrow A$, del conjunto de señales recibidas hacia el conjunto de salarios ofrecidos; es decir, si usted envía la señal s , ella le ofrecerá un salario $w(s)$.

Usted sabe el desempeño que ha tenido en el curso de DGE1, el cual puede haber sido excelente ($t=t_e$) o regular ($t=t_r$); sin embargo, Juana no conoce su verdadera competencia en teoría de juegos, por lo que, supongamos, ella asigna las siguientes probabilidades a su experticia en el área: $Pr(t=t_e)=0.65$ y $Pr(t=t_r)=0.35$.

Por su experiencia en McKinsey & Co., Juana sabe que si los nuevos empleados son excelentes le producirán a la empresa 400 millones al año ($h(t=t_e)=400$), ya que trabajarán mejor y más rápido, pero solo 100 millones ($h(t=t_r)=100$) si son regulares.

Por lo que sabe del curso de DGE2, el esfuerzo requerido para aprobarlo será muy superior al de DGE1. Si decide tomarlo ($s=1$) deberá asumir un costo (en términos del esfuerzo diario que deberá invertir estudiando) de 80 millones si su tipo es excelente ($c(t=t_e)$, pero le costará 180 millones si su tipo es regular ($c(t=t_r)=180$). Si decide no tomar el curso ($s=0$) no incurrirá en ningún costo.

Suponga que su función de utilidad es:

$$u(t,s,w) = w - 400(s/h) - c$$

donde w es el salario que le ofrece Juana, s es la variable que indica si tomó o no el curso, h es su nivel de productividad para la firma y c es el costo que debe asumir si toma el curso.

Por otro lado, la función de utilidad de Juana es:

$$u(Pr(t/s), s, w) = h - w$$

donde $Pr(t/s)$ es la actualización bayesiana que hace Juana al recibir la señal s .

Si Juana le paga 200 millones a los empleados excelentes y 100 a los regulares, y si suponemos que usted es excelente en teoría de juegos... ¿Debería tomar el curso de DGE2 como una señal de competencia? Explique de manera detallada y ordenada.

Solución:

Queremos probar que existe un equilibrio de señales, donde el tipo excelente toma el curso ($s=1$) y recibe un salario $w(s=1)=200$, y el tipo regular no toma el curso ($s=0$) y recibe un salario $w(s=0)=100$.

Primero, el enunciado del problema indica que $Pr(t=t_e) = 0.65$ y $Pr(t=t_r) = 0.35$ por lo que se satisface el primer requerimiento (existencia de creencias *a priori*).

Para verificar el segundo requerimiento (los jugadores actúan racionalmente) consideramos primero si el salario $w(s=1)=200$ es suficientemente alto como para que yo envíe la señal (tomar el curso) dado que mi tipo es excelente (condición necesaria). Para ello debe ser cierto que:

$$u(t=t_e, s=1, w(s=1)) \geq u(t=t_e, s=0, w(s=0))$$

$$w(s=1) - 400(1/(400)) - 80 \geq w(s=0) - 400(0/(400)) - 0$$

$$w(s=1)-81 \geq w(s=0).$$

Sustituyendo para $w(s=1) = 200$ y para $w(s=0) = 100$, nos queda:

$200-81 \geq 100 \Rightarrow 119 > 100$. Esto indica que el sueldo ofrecido justifica tomar el curso dado que mi tipo es excelente.

Ahora es necesario probar que el graduado tipo regular no tendrá incentivo de tomar el curso (condición suficiente). Para ello debe ser cierto que:

$$\begin{aligned} u(t=t_{[r]}, s=1, w(s=1)) &\leq u(t=t_{[r]}, s=0, w(s=0)) \\ w(s=1)-400(1/(100))-180 &\leq w(s=0)-400(0/(100))-0 \\ w(s=1)-184 &\leq w(s=0). \end{aligned}$$

Sustituyendo para $w(s=1)=200$ y para $w(s=0)=100$, nos queda:

$200-184 \leq 100 \Rightarrow 16 < 100$. Esto indica que solo los graduados excelentes tomarán el curso. El equilibrio: $[(s=1, s=0); (200, 100); (0, 65, 0, 35); (1, 0)]$ es un equilibrio de señales y, en consecuencia, ¡debería tomar el curso de DGE2!

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos

PROBLEMA 1

Una firma desea posicionar un nuevo producto en el mercado. La calidad del producto puede ser buena o mala. El nivel de consumo depende de su calidad, algo que solamente se puede comprobar una vez el consumidor decide probar el producto. Con el fin de persuadir a los consumidores, la firma puede lanzar una campaña publicitaria que busque posicionar la marca, no necesariamente las características del producto, en la mente de los clientes. Discuta sobre el valor que tiene la publicidad como señal de la calidad del producto a pesar de que esta no esté directamente relacionada con la calidad. ¿Qué debería suceder para que los consumidores puedan identificar, a través de la publicidad, un producto de alta calidad?

Solución:

Será una señal de la calidad del producto si el valor invertido en publicidad es mayor que la utilidad obtenida por la firma con un producto de mala calidad.

PROBLEMA 2

Existen en el mercado dos tipos de trabajadores que se pueden diferenciar por su productividad: los trabajadores tipo p^A tienen una productividad $p=2$, mientras que los trabajadores tipo p^B tienen una

productividad $p=1$. Los trabajadores tipo p^B deben asumir un mayor costo que los trabajadores tipo p^A si desean alcanzar un nivel de educación superior. El costo de e unidades de educación para un trabajador es $c(e; p)=e/p$. El beneficio de cada trabajador está dado por $s-c(e; p)$, siendo s el salario a recibir. Las firmas consideran que un nivel de educación mayor a e^* es una señal de alta productividad mientras que un nivel de educación menor a e^* es señal de baja productividad por lo que ofrecen un salario de $w(e)=2$ si $e \geq e^*$ y $w(e)=1$ si $e < e^*$. a. ¿Qué tanta influencia tiene el nivel de educación en la productividad?; b. ¿Cuál debería ser el nivel de educación óptimo si las firmas y los trabajadores tienen la misma información sobre el valor de p ? Dado que las firmas solamente pueden observar el nivel de educación más no la productividad del trabajador, y c. Teniendo en cuenta la oferta salarial, ¿cuál debería ser el nivel de educación que cada tipo de empleado debe escoger?

Solución:

Si el empleado es tipo A escogerá e^0 si $2-e^0/2 > 1$, es decir si $e^0 < 2$. Si el empleado es de tipo B escogerá $e=e^0$ para $e=0$ si $e^0 < 1$

PROBLEMA 3

Considere un juego entre un estudiante (E) y la facultad (F) en el proceso de admisión para el Doctorado en Administración. Los estudiantes pueden ser de dos tipos: *confundidos* (C) y *motivados* (M). Los estudiantes confundidos no tienen claro lo que significa hacer una carrera académica, mientras que los motivados lo entienden perfectamente. La experiencia de la facultad permite saber que el 80%

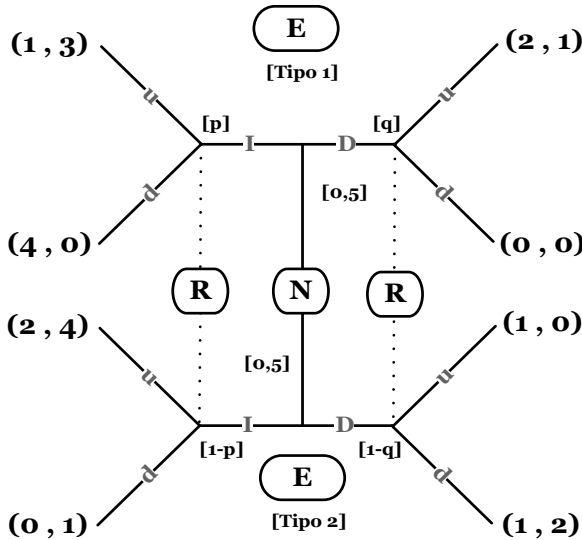
de los estudiantes son del *tipo C* mientras que el 20% son del *tipo M*. Los estudiantes tienen dos acciones: *aplicar (A)* o *no aplicar (NA)* al programa doctoral ofrecido por la facultad. La aplicación es costosa (p. ej., estudiar para el examen de admisión), por lo tanto si el estudiante no es aceptado en el programa debe incurrir en un costo de -5 si es *tipo C* y de -1 si es *tipo M*. Si no aplica su pago es cero para ambos tipos. La facultad también tiene dos acciones: *aceptar al aspirante (Y)* o *rechazarlo (NY)*. Si acepta a un estudiante *tipo C* su pago será de -20, mientras que si es *tipo M* su pago será 20. Ahora bien, si rechaza a un estudiante *tipo C* su pago es cero, pero si rechaza a un estudiante *tipo M* su pago será -5. Por último, si el estudiante es *tipo C* y es aceptado, su vida será miserable por los próximos cuatro años y su pago será de -12, mientras que si es *tipo M* su vida será maravillosa y su pago será 20. Con esta información, represente el juego en su forma dinámica donde la naturaleza juega primero asignando el tipo al estudiante. Una vez descrito el juego indique detalladamente cuál(es) es(son) el(los) equilibrios de señales de este juego.

Solución:

$[(A, N A); Y; 0.8; 0.2]$ y $[(N A, N A); N Y; 0.8; 0.2]$ son los equilibrios de señales de este juego.

PROBLEMA 4

Considere el juego abstracto que se presenta a continuación:



Responda las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos jugadores hay?
- ¿Cuáles son las acciones de cada jugador?
- ¿Cuáles son las estrategias de cada jugador?
- ¿Qué jugador tiene incertidumbre en su ubicación dentro del juego?
- ¿Qué creencias a priori tiene ese jugador con la incertidumbre sobre su ubicación?
- ¿Qué representan p y q en este juego?
- ¿Cuántas y cuáles serán las estrategias candidatas a ser equilibrio de señales?
- Demuestre que $(I, I), (u, d); p = 0,5, q < 2/3$ es equilibrio de señales.
- Demuestre que $(I, D), (u, d); p = 1, q = 0$ no es un equilibrio de señales.

Solución:

- g. Cuatro: *pooling* en I , *pooling* en D , *separating* donde el jugador E (tipo 1) envía la señal I y *separating* donde el jugador E (tipo 2) envía la señal I .
- h. Es importante entender cómo se lee ese equilibrio: el jugador E envía la señal I independientemente de su tipo. Luego, el jugador R juega u si recibe la señal I , y d si recibe la señal D , es decir, $aR(s = I) = u$ y $aR(s = D) = d$. Por otro lado, como ambos tipos envían en equilibrio la señal I , $p = 0,5$ (las creencias *a priori* no se ajustan cuando se recibe la señal I). Sin embargo, notamos que en el juego de abajo el jugador E no tiene incentivos para moverse, pero en el juego de arriba, si el jugador E en vez de enviarla señal I (como establece el equilibrio) se desvía y envía la señal D , el jugador R responderá calculando los valores esperados de jugar u o d . Si la estrategia propuesta es un equilibrio, no debe haber incentivos para E de enviar D , por lo tanto debe ser cierto que:

$$0q + 2(1 - q) > 1q + 0(1 - q)$$

$$q < \frac{2}{3}$$

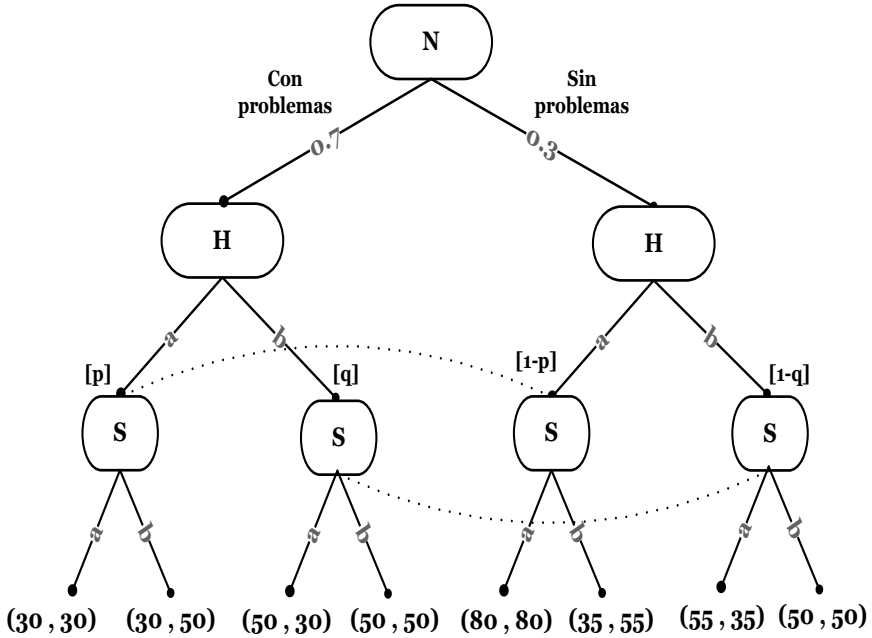
Como $p=1$ en el equilibrio propuesto, cuando E envíe la señal I el jugador R jugará u . Por otro lado, como en el equilibrio propuesto, cuando E envíe la señal D el jugador R jugará d . Note que en este último caso al jugador E (tipo 2) le convendría desviarse del equilibrio enviando la señal I (haciéndose pasar por tipo 1), para lo cual el jugador R responde jugando u , y así el beneficio de E pasa de 1, que obtenía jugando el equilibrio propuesto, a 2 desviándose. Esto demuestra que el equilibrio propuesto no es un equilibrio de señales.

PROBLEMA 5

Este es un juego entre dos empresas llamadas H y S que quieren hacer una alianza estratégica. El éxito de la alianza depende del nivel de esfuerzo que pongan en el negocio, el cual tiene un costo de 20 para cada empresa. Independientemente del esfuerzo, el negocio puede salir mal por causas externas a los dos socios (p. ej., avances tecnológicos nuevos). Antes de comenzar el juego las creencias a priori son de 0,7 de que puedan existir problemas externos que afecten el negocio. Por otro lado, antes de escoger su nivel de esfuerzo (alto a o bajo b) la empresa H sabrá primero si aparecieron los problemas externos; los pagos y la secuencia del juego se ven en el siguiente gráfico, tome en cuenta lo siguiente:

- a) Si las dos firmas escogen un nivel de esfuerzo bajo las ventas totales serán de 100 y se reparten equitativamente (independientemente de la aparición de problemas externos);
- b) Si las dos empresas mantienen un nivel de esfuerzo alto y no surgen problemas, las ventas totales serán 200, pero cada uno recibirá 80 luego de restar los 20 que cuesta esforzarse;
- c) Si las dos empresas mantienen un nivel de esfuerzo alto y surgen problemas, las ventas totales serán 100, las cuales se reparten nuevamente de manera equitativa, y cada una recibirá 30 luego de restar los 20 que cuesta ese nivel de esfuerzo.
- d) Si solo una de las empresas se esfuerza y no aparecen problemas externos las ventas serán 100 con probabilidad 0,9 y 200 con probabilidad 0,1 (), y por lo tanto el pago esperado de la que no se esforzó será 55, mientras que el pago de la que se esforzó será 35 (55-20).
- e) Si solo una de las empresas se esfuerza y aparecen problemas externos las ventas serán 100 con probabilidad 1, y por lo tanto el

pago esperado de la que no se esforzó será 50, mientras que el pago de la que sí lo hizo será 30 ($50-20$).



Analice este juego e indique el o los equilibrios de señales.

Solución:

Existen dos equilibrios: uno de señales integrador, $\{(b,b),(b,b); p > 0,56; q\}$, y uno de señales separador $\{(b,a),(b,a); p=0; q=1\}$.

CAPÍTULO 7.

OPCIONES REALES Y TOMA DE DECISIONES FINANCIERAS ESTRATÉGICAS

Cuando los directivos de una empresa quieren tomar decisiones de inversión tienen dos opciones: apoyarse completamente en su intuición o buscar herramientas que les permita contar con algunos criterios en el proceso. La matemática financiera ofrece herramientas tradicionales como el Valor Presente Neto (VPN), la Tasa Interna de Retorno (TIR), el Payback Descontado (PD), entre otras⁵⁰. En general estas herramientas permiten comparar la rentabilidad esperada en la inversión con la tasa de interés de oportunidad, establecer el valor agregado para la empresa, y realizar comparativos con otras alternativas de inversión, por lo que generalmente los ejecutivos se apoyan en esa batería de herramientas al momento de tomar decisiones. Sin embargo, existen casos donde los directivos, basados en su experiencia, deciden llevar a cabo un proyecto aun cuando los indicadores financieros tradicionales ofrecidos por las matemáticas financieras sugieran lo contrario.

50 Para una revisión exhaustiva de todas las herramientas de análisis financiero relacionadas con la toma de decisiones se recomienda revisar Berck y DeMarzo (2014).

Lo más probable es que muchas de las grandes empresas como Apple, Microsoft o Amazon, no hayan pasado en sus comienzos un examen financiero basado en esos indicadores tradicionales, sino que, más bien, la intuición de sus fundadores fue suficiente para llevar a cabo las inversiones iniciales. Sin embargo, no todos los emprendedores tienen la posibilidad, fortuna e ingenio para encontrar ese tipo de oportunidades en el mercado. Los recursos financieros son escasos y los procesos de decisión relacionados con alternativas de inversión deben realizarse de la manera más rigurosa posible para evitar en el caso de empresas consolidadas destruir valor, y en el caso de nuevos emprendedores acabar con los ahorros de toda una vida o terminar con un nivel de endeudamiento inesperado. Lo anterior señala que al momento de valorar nuevas inversiones es necesario contar con un conjunto de herramientas que faciliten alcanzar una decisión acertada.

Sin embargo, las malas decisiones no se toman únicamente por desconocimiento. En ocasiones un comportamiento interesado puede llevar a tomar decisiones que afecten a los inversionistas. Específicamente, en un contexto de problemas de agencia, es decir, donde los directores o gerentes que toman las decisiones no son los mismos dueños, puede decidirse adelantar un proyecto que destruye valor para la empresa, no porque la intuición del directivo le indique que debe desarrollar el proyecto, sino más bien, porque sus intereses personales se ven favorecidos (y no necesariamente los del resto de los accionistas). Ejemplos de ese tipo de circunstancias abundan, desde escoger negocios con empresas relacionadas (p. ej., el proveedor de una materia prima específica), es decir, de amigos o familiares del gerente, hasta patrocinar el equipo de fútbol favorito del directivo o de otras personas que desee complacer.

Ahora bien, no todo proyecto con un VPN negativo debe ser rechazado. Lo anterior sucede por varias desventajas asociadas al cálculo

del valor presente neto. Por ejemplo, los flujos de caja proyectados representan los valores medios esperados, lo cual no refleja la capacidad de adaptación de los directores, su capacidad de gestión y la posibilidad de unos mayores valores esperados en esos flujos. A lo anterior se le conoce como valor de la flexibilidad. Por lo tanto, el valor presente subestima sistemáticamente el valor de los proyectos. El método de valor presente no tiene en cuenta el valor de la flexibilidad, el cual siempre es positivo.

Por otra parte, la tasa de descuento que se utiliza se supone conocida y en ocasiones constante, dependiendo del riesgo del proyecto. Entonces, hay la presunción de que el riesgo del proyecto es constante, cuando el mismo cambia en la medida en que transcurre el tiempo, y se modifican tanto el apalancamiento como la rentabilidad del proyecto. Además, la base de toda proyección radica en la proyección de precios de mercado esperados a lo largo de la vida del proyecto. Realizar esta proyección con verosimilitud es imposible y ello influye en el valor presente neto del proyecto, además de que elimina escenarios posibles. Finalmente, cuanto mayor es el riesgo del proyecto en estudio mayor es el valor que puede aportar el concepto de la flexibilidad que se mencionó previamente.

En ocasiones, proyectos con VPN negativo representan inversiones estratégicas que en el mediano y largo plazo generan valor para los accionistas y riqueza para la sociedad en general. *¿Cómo se puede entonces saber si un proyecto, que al evaluarse con indicadores tradicionales y debería rechazarse, representa un proyecto “estratégico” en el que se debe invertir?* Aquí es justamente cuando aparecen las opciones reales. En términos muy generales un proyecto es más que el VPN, es decir, una serie de flujos de caja libres esperados que se traen al presente a una tasa de descuento ajustada por riesgo y se comparan con la inversión requerida. Los proyectos pueden traer consigo una serie de “opciones”...

En tal sentido, un proyecto puede ser “malo” cuando solo se evalúa su VPN (p. ej., $VPN < 0$), pero al sumar la opciones reales que ese proyecto conlleva puede revertir el signo del VPN, y es cuando se habla de un Valor Presente Neto Ampliado (p. ej., $VPNA = VPN + OR > 0$). Es importante mencionar que bajo este supuesto los proyectos no pueden ser considerados viables o inviables al apoyarse únicamente en indicadores tradicionales, sino más bien, emerge la pregunta de si los proyectos tienen suficientes opciones reales para revertir el VPN negativo.

¿Qué es una opción real?

Una opción típica da derecho a comprar (*call*) o vender (*put*) un activo a un precio determinado y por un periodo determinado (americana) o en una fecha específica (europea). El activo objeto del contrato se denomina activo subyacente y el precio pactado o convenido “precio de ejercicio”. Una opción *call* puede estar *in-the-money*, cuando el precio de mercado está por encima del precio de ejercicio (vale la pena ejercer la opción *call* porque el precio de mercado es más alto que el precio pactado), o *out-of-the-money* cuando no vale la pena ejercer la opción ya que es más barato comprar el activo subyacente en el mercado. Para el caso de las opciones *put* (derecho a vender el activo subyacente), la situación es al revés, es decir, si el precio de mercado es menor al precio de ejercicio la opción estará *in-the-money* ya que el tenedor del *put* puede vender el activo subyacente a un precio mayor que lo que podría obtener en el mercado; igualmente, si el precio de mercado es mayor al precio de ejercicio, entonces la opción *put* estaría *put-of-the-money* ya que a ese inversionista le convendría más vender el activo subyacente en el mercado y no ejerciendo la opción.

La teoría de opciones reales surge de forma natural de la teoría de opciones financieras⁵¹. En tal sentido, una “opción” es un derecho, pero no una obligación, de llevar a cabo ciertas decisiones. En el argot financiero se hablan de opciones *call* cuando el poseedor de la opción tiene el derecho de comprar un activo subyacente en el futuro a un determinado precio de ejercicio. Por otro lado están las opciones *put* que son aquellas que brindan el derecho de vender el activo subyacente en el futuro.

Una particularidad de las opciones es que la compra (*call*) o venta (*put*) solo se hace cuando conviene hacerlo; es decir, si en el mercado se consigue el activo subyacente más barato la opción *call* expira *out-of-the-money*, por lo que su función de pagos viene dada por:

$$Call = \max(S_T - K, 0)$$

Donde S_T se refiere al precio del activo subyacente en el momento T cuando vence la opción, y K es el precio pactado o de ejercicio al que se comprará el activo subyacente en el caso en que sea ejercida la opción (es decir cuando $S_T > K$).

Para el caso de las opciones *put*, la función de pagos viene dada por:

$$Put = \max(K - S_T, 0)$$

Es decir, se ejercerá solo cuando el precio pactado sea mayor que el precio al que el mercado estaría dispuesto a comprar el activo subyacente (cuando $K > S_T$).

51 Ver Hull (2012, Cap. 1) o cualquier otro libro básico de derivados para repasar los principales aspectos de la teoría de opciones financieras.

En el ámbito de las opciones reales, los *calls* y los *puts* se puede traducir a decisiones como por ejemplo “expandir” una determinada operación, “diferir” un proyecto de construcción, “abandonar” una iniciativa de negocios, “contratar” ciertos servicios, etc....

Todos estos verbos son importantes porque cuando un directivo comienza a justificar llevar a cabo un proyecto con un $VPN < 0$, que permitirá “expandir”, “diferir”, “abandonar”, “contratar”, puede percibirse que se está ante algún tipo de opción real que puede ser valiosa, inclusive puede ser lo suficientemente valiosa como para cambiar el signo del VPN inicialmente calculado. El problema que plantean las opciones reales es el de la teoría de la decisión: cómo crea valor una compañía que quiere invertir en activos reales. Hay proyectos que no admiten demoras y otros que tienen flexibilidad operativa, es decir, se puede aplazar la decisión de su ejecución porque tienen oportunidades de crecimiento contingentes. Al aplazar la decisión los directivos pueden obtener beneficios pues se reduce al máximo el impacto del riesgo en los flujos de caja. Esta posibilidad de demorar el desembolso necesariamente modifica la decisión de invertir.

Imaginen que Ecopetrol está en la actualidad estudiando la posibilidad de participar en una subasta para la adquisición de derechos de explotación de alguno de los bloques de aguas profundas en el Golfo de México. Sin embargo, los precios actuales no justifican financieramente dicha adquisición dadas las grandes inversiones requeridas. *¿Pero, qué pasa si el precio del petróleo sube en los próximos años?* El tener los derechos de explotación le permite a Ecopetrol ejercer dicho derecho, si le conviene hacerlo. Si el precio sube en el futuro los ingresos esperados más que justificaran el haber adquirido los derechos de explotación; en el caso contrario,

la opción expira *out-of-the-money*⁵² y Ecopetrol solo perdió lo que invirtió en la adquisición de los derechos de explotación. Tanto las opciones financieras como las opciones reales trabajan con pérdidas limitadas.

Algo interesante de las opciones reales es que, a diferencia de los proyectos de inversión tradicionales, entre más incertidumbre se tenga más valiosas son. En un proyecto tradicional el riesgo o la incertidumbre puede producir grandes ganancias, pero al mismo tiempo grandes pérdidas; en el caso de las opciones, las pérdidas están de alguna manera acotadas (como es una “opción” siempre se puede elegir no ejercerla) al valor que se pagó por ellas. En tal sentido, entre más incertidumbre haya más valiosas son las opciones ya que las ganancias son ilimitadas, pero las pérdidas están acotadas.

El aumento del riesgo tiende a aumentar el valor de la opción y, en consecuencia, el valor del proyecto evaluado como opción. Por el contrario, cuando se utiliza el método de descuento de flujos de caja el riesgo modifica el beta incrementándolo, y en consecuencia, afectando la tasa de descuento, lo que lleva a reducir el valor presente de los flujos de caja.

Por otro lado, las opciones son útiles cuando la inversión está condicionada a que algo ocurra. Por ejemplo, una empresa puede decidir expandirse a nivel nacional si las ventas en Bogotá superan cierto nivel. Cuando se calcula el VPN de un proyecto es difícil incorporar ese tipo de contingencias en cuanto a las inversiones requeridas.

Las opciones financieras tienen como título subyacente un bono o una acción, cotizan en mercados de derivados, por lo que es más fácil identificar los parámetros, y los resultados no dependen de la

52 En el argot de teoría de opciones financieras, una opción está *in-the-money* cuando vale la pena ejercerla, es decir, la opción permite comprar (vender) un determinado activo a un precio por debajo (por encima) del valor de mercado. Cuando la opción está *out-of-the-money* es el caso contrario, al dueño de la opción le conviene ir al mercado a comprar (vender) el activo ya que el precio es menor (mayor).

acción de la compañía. En las opciones reales la alta dirección controla el activo básico, que es tangible (negocio o proyecto), y en general no es negociable. La posibilidad de dilatar la inversión le proporciona a la empresa un tiempo adicional para examinar la tendencia de los acontecimientos reduciendo la eventualidad de incurrir en errores. Cuanto más tiempo se tiene para demorar la decisión final mayor será la posibilidad de que los acontecimientos se desarrollen en forma favorable, aumentando la rentabilidad del proyecto.

En este libro no abarcaremos todas las opciones posibles, sino que trataremos de dar definiciones y ejemplos a las más utilizadas en la práctica como son las opciones reales de expansión, abandono, flexibilidad y espera⁵³.

Clasificación de las opciones reales

Como se mencionó, una opción real representa la posibilidad (no la obligación) de tomar una decisión. Una forma de clasificar las opciones reales es justamente pensando en el tipo de decisiones que se está tratando de tomar.

OPCIONES DE EXPANSIÓN

Imagine que usted es gerente de planificación de una línea aérea grande como Avianca. Su flota depende de la demanda esperada de pasajeros, la cual siempre es incierta ya que depende de muchos factores como el crecimiento de la economía, el precio del petróleo, aspectos geopolíticos, etc.

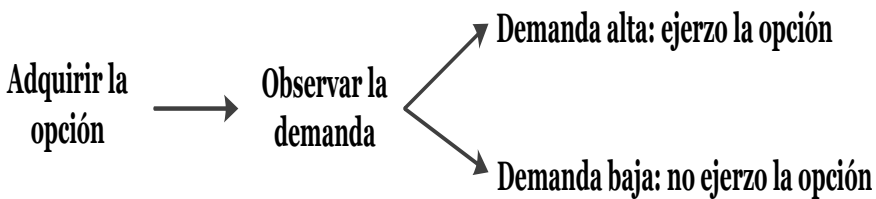
53 Se invita al lector interesado a consultar, entre otros, Bready et al. (2010), y Ross et al. (2008) en cuanto a la definición y las distintas clasificaciones de las opciones reales.

Luego de ponderar todos los factores que contribuyen a la demanda de pasajeros, su estimación indica que se necesitarían entre diez y quince aviones Airbus. Si la demanda supera la capacidad de esos aviones debe incurrir en costos de arrendamiento de naves, pero si la demanda es menor a la esperada, quedarán muchas sillas vacías incrementando significativamente los costos de operación.

¿Qué quisiera usted como gerente de planificación? Es claro que si usted tuviera más tiempo para seguir analizando la demanda podría tomar una decisión más certera, pero dado el tiempo que pasa desde que se coloca una orden de compra de una aeronave de ese tipo hasta que finalmente se entrega puede tomar más tiempo del esperado, lo que restringe el margen de acción.

Sin embargo, usted podría hacer una orden de compra de diez aviones, más una “opción” de compra de cinco naves adicionales en caso de que la demanda aumente más de lo esperado en un período de tiempo acordado. Resulta que esa “opción” es muy valiosa y, entre más incertidumbre tenga con respecto a la demanda de pasajeros, más valiosa se hace.

Esquemáticamente se podría ver la opción de expansión en este ejemplo de la siguiente manera:



Una pregunta que responderemos más adelante es cuánto estaría dispuesta a pagar Avianca por esa opción real de expansión.

En el mundo real se observan muchas opciones reales de expansión a pesar de que son pocas las personas que las llamas de esa forma. Cuando una empresa hace una “prueba piloto” antes de lanzar un producto está básicamente comprando una opción real de expansión. El costo de esa opción es la inversión en esa prueba piloto. Si la prueba resulta satisfactoria entonces se hacen las inversiones requeridas para lanzar el producto al mercado, en caso contrario se asume el costo de la prueba piloto (costo de la opción) pero no se hacen inversiones adicionales.

Cuando se diseñan carreteras y autopistas generalmente (al menos en los países desarrollados) se deja a ambos lados un espacio suficiente para construir canales adicionales, los cuales generan un costo importante de oportunidad ya que no representan beneficios inmediatos (p.ej. peajes); sin embargo, ese costo es una opción real de expansión para, si en el futuro la demanda así lo requiere, realizar las inversiones adicionales a fin de expandir la carretera o autopista en cuestión.

Entonces, podemos decir que una opción de expansión representa una inversión contingente a la ocurrencia de un hecho. En el caso de Avianca la inversión contingente (la compra de cinco aviones adicionales a los inicialmente comprados) depende de la proyección de la demanda. En el caso de la autopista, la inversión contingente (construir nuevas calzadas) depende del volumen de vehículos.

También es importante resaltar que en las herramientas tradicionales de evaluación de proyectos, como el VPN, no es fácil incluir ese tipo de opciones de expansión ante escenarios de incertidumbre alta. Por ello es usual escuchar expresiones como “... debemos hacer esta u otra inversión porque es estratégica”. Sin embargo, la teoría de opciones nos brinda herramientas para cuantificar esas inversiones “estratégicas” que no son más que opciones las reales que presentan ciertos proyectos.

OPCIONES DE ABANDONO

Otro tipo de opciones reales muy comunes en el mundo de los negocios son las de abandono. Existen ciertos proyectos que permiten no ser ejecutados (salirse) en caso de que lo proyectado no se presente como se esperaba. Los “bonos educativos” que exigen algunos colegios es un ejemplo de una opción de abandono. La opción radica en el hecho de que si, por algún motivo, los padres deciden cambiar sus hijos del colegio recuperan, por un tiempo, una fracción del bono. Esa es una opción valiosa dado que sin ella, algunos padres no se comprometerían a pagar el bono.

¿*Qué tan valiosa es una opción de abandono?* Esa pregunta la responderemos más adelante, sin embargo, consideremos el siguiente ejemplo:

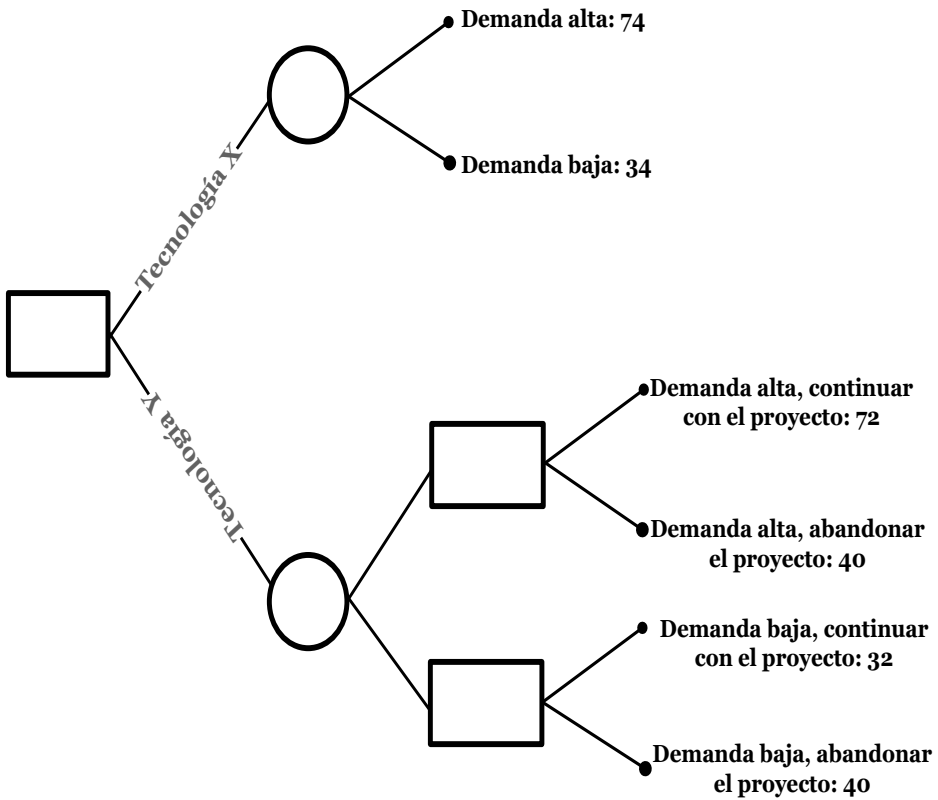
Usted es el gerente de operaciones de la empresa *Dental*, fabricante de tableros de control electrónicos para sillas odontológicas. Debe tomar la decisión de escoger el tipo de tableros de control a fabricar para las sillas que saldrán al mercado el año entrante. La tecnología X es sofisticada y sirve únicamente para las sillas de la marca *Italdent*, y los costos de producción son substancialmente más bajos; por otro lado, si bien la tecnología Y también sirve para los tableros de las sillas *Italdent*, es más costosa de producir pero tiene una ventaja: los tableros con la tecnología Y pueden venderse como producto genérico (sin marca) por una cantidad de 40 millones.

¿*Dónde está presente la opción de abandono en este ejemplo?* Suponga que la demanda de tableros de control de la empresa que produce las sillas *Italdent* puede ser alta o baja... si es alta, es mejor producir los tableros usando la tecnología X y esto genera para la empresa *Dental* un estimado de 74 millones en flujo de caja libre. Por otro lado, si la demanda es baja se quedarán muchos tableros

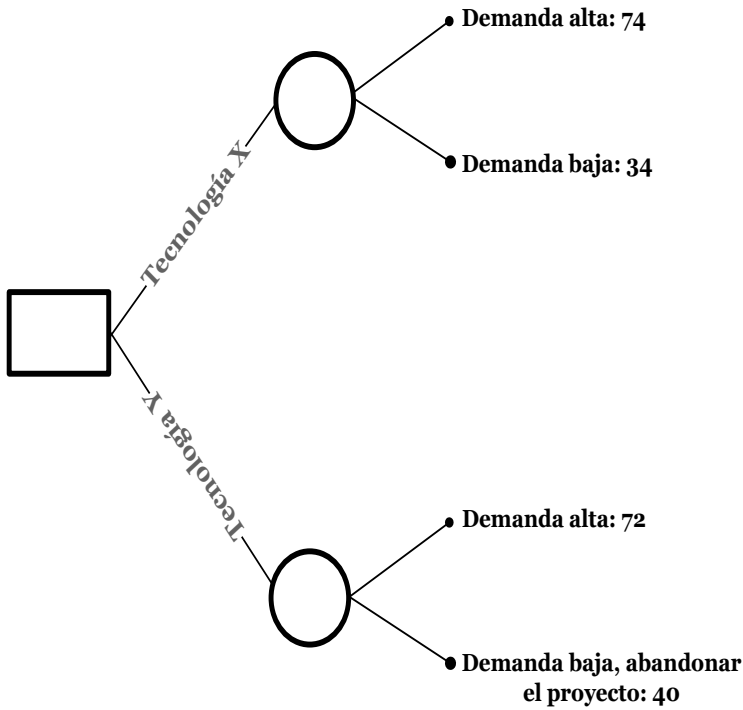
en los inventarios de la empresa *Dental* y el flujo de caja estimado será de 34 millones. Ahora bien, si se adopta la tecnología Y, y la demanda es alta, el flujo de caja será de 72 millones (la diferencia entre las dos tecnologías es que la Y es más costosa de producir para *Dental*). Si, por el contrario, la demanda es baja, el flujo de caja llega a 32 millones. Todo lo anterior se puede ver en la siguiente tabla:

Demanda <i>Italdent</i> / Flujo de Caja <i>Dental</i>	Tecnología X	Tecnología Y
Alta	74	72
Baja	34	32

Ahora bien, el uso de la tecnología Y tiene una “opción” de abandono. Es decir, en caso de que la demanda sea baja, en lugar de vender los tableros a *Italdent*, la empresa *Dental* puede venderlos al mercado de los genéricos por 40 millones. Otra forma de verlo, es que al “abandonar” al cliente *Italdent* se obtendrían 40 millones, y al continuar con el cliente se tendrían 72 si la demanda es alta, pero solo 32 si la demanda es baja. La tecnología X no brinda esa posibilidad, por ello al evaluar las dos tecnologías se tiene que tomar en cuenta que si bien la tecnología X es más eficiente en comparación con la tecnología Y, la última posee una opción real que la primera no posee. Gráficamente se puede plantear la discusión así:



Como en todo árbol de decisión, los círculos representan probabilidad y los cuadrados decisiones. Por lo tanto, en la parte de abajo del árbol es claro que si la demanda es alta se vende a *Italdent* y en caso contrario se “abandona” el cliente y se vende al mercado de los genéricos. Por lo tanto, el árbol quedaría como se presenta a continuación:



Si asignamos una probabilidad de 50% al tipo de demanda, el valor esperado de usar cada tecnología sería:

$$\text{Tecnología X} = 74 \cdot 0,5 + 34 \cdot 0,5 = 54$$

$$\text{Tecnología Y (con la opción)} = 72 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,5 = 56$$

Por lo tanto, la tecnología Y (más costosa pero con una opción real de abandono) es una mejor opción...

Note que sin la opción de abandono el valor esperado de la tecnología Y es:

$$\text{Tecnología Y (sin la opción)} = 72*0,5 + 32*0,5 = 52$$

Por lo tanto el “valor” de la opción real de abandono viene dado por:

$$\begin{aligned} \text{Tecnología Y (con la opción)} - \text{Tecnología Y (sin la opción)} \\ = 56 - 52 = 4 \end{aligned}$$

O, lo que es lo mismo, la tecnología Y tienen dos fuentes de valor: por un lado, produce un valor esperado de 52 millones, y por otro cuenta con una opción de abandono de 4, por lo que el valor total de la tecnología Y es 56.

Note en este sencillo ejemplo que si basamos nuestra decisión sin tomar en cuenta el valor de la opción real de abandono no hubiéramos optado por la tecnología X, lo cual hubiera sido una decisión errada ya que no se estaría considerando el valor de la opción real.

Las inversiones que hacen los capitalistas de riesgo en proyectos nuevos, los desembolsos en proyectos de investigación y desarrollo, los contratos temporales de trabajo son solo algunos ejemplos donde las opciones reales de abandono están presentes y deben ser evaluadas antes de tomar una decisión.

Otro tipo de opciones que se encuentran en la vida de los negocios son las llamadas opciones de flexibilidad.

OPCIONES DE FLEXIBILIDAD

Imagine una empresa trasnacional que centraliza sus procesos de producción. Esto obviamente genera economías de escala si los productos son *commodities* o con muy pocas diferencias entre los

mercados en que se venden; sin embargo, si existen algunas diferencias en las especificaciones se pueden generar problemas.

Por ejemplo, una empresa fabrica impresoras a nivel mundial y cada país que atiende requiere ciertas especificaciones diferenciales (p. ej., el tipo de energía que utiliza), lo cual le puede generar el inconveniente de que si no estima adecuadamente la demanda, el costo de oportunidad de acumulación de inventarios puede ser sustancial.

En cada país o región se pueden recibir impresoras parcialmente ensambladas y completarlas con las especificaciones requeridas una vez conocida la demanda; pero si no se tiene en cuenta la opción de flexibilidad de adecuar la producción a la demanda, podría verse como una alternativa más costosa. Sin embargo, antes de tomar cualquier decisión hay que cuantificar el valor de dicha opción. En otras palabras, si se adopta la alternativa de descentralizar parcialmente la producción se debe comprobar que:

$$\text{Valor (prod.centralizada)} < \text{Valor (prod.descentralizada)} \\ + \text{Opción flexibilidad}$$

Es decir, el valor de la opción en este ejemplo viene dada por:

$$\text{Opción de flexibilidad} = \text{Valor (prod.centralizada)} \\ - \text{Valor (prod.descentralizada)}$$

En el mundo de los negocios hay muchas opciones de ese tipo. Por ejemplo, algunas empresas emplean plantas generadoras que pueden operar con gas o con petróleo. Si bien tales plantas son más costosas que las de solo gas o solo petróleo, pueden ser la alternativa óptima si se quiere tener la “flexibilidad” de cambiar de un tipo de combustible a otro dependiendo de la volatilidad de los precios.

En la cadena de suministros de un negocio manufacturero también suelen aparecer este tipo de opciones de flexibilidad: un solo proveedor que ofrece mejores precios gracias a mayores volúmenes de compra o varios proveedores con niveles de compra más pequeños. Si es un proveedor confiable donde la incertidumbre de su capacidad de atender nuestros requerimientos es baja puede ser una mejor alternativa; de lo contrario, la opción real de flexibilidad que me permita cambiar de proveedor rápidamente en caso que alguno falle, puede, en algunos casos, justificar el hecho de no aprovechar los descuentos por volumen.

Note que en estos ejemplos el punto clave para tomar la decisión es la incertidumbre de la variable de interés (demanda por país para el caso de las impresoras, precios del combustible para el caso de las plantas generadoras, capacidad de respuesta de los proveedores). Como se señaló al inicio de este capítulo, esto es usual para todas las opciones en general, y también para las opciones reales: entre más incertidumbre mayor valor generan las opciones.

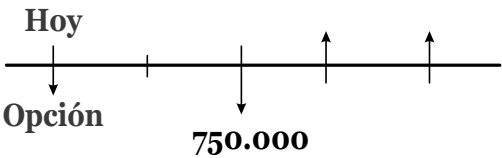
Por último se estudian otras opciones reales muy importantes: las opciones de espera.

OPCIONES DE ESPERA

Considere el caso de una empresa que está considerando comprar un lote para construir en el futuro un edificio de apartamentos. Sin embargo, existe incertidumbre acerca del potencial económico de dicha construcción dada la zona y la situación de la economía. Por lo tanto, la empresa le propone al dueño del lote comprarle la “opción”, es decir, el derecho más no la obligación de hacer ese desarrollo inmobiliario en los próximos tres años.

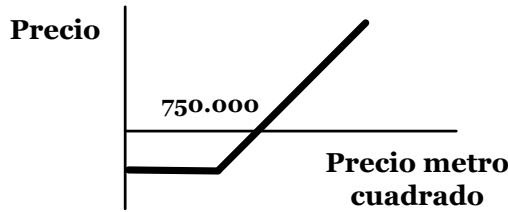
Como se está comprando la opción y no el lote, si al cabo de los tres años no se ha construido, entonces se pierde el derecho y el dinero que se pagó para adquirir esa opción.

Para la construcción se requieren US\$750.000 (incluyendo el valor del lote). Si se estuviera evaluando este proyecto bajo el modelo de valoración tradicional, el cálculo sería el que se muestra a continuación:



Habría entonces que calcular el valor presente neto del proyecto descontando los flujos de caja desde hoy (valor de la opción) hasta que finalice el proceso de construcción; sin embargo, en la figura anterior no se contempla la posibilidad de hacer la inversión requerida antes, es decir, en el presente (hoy), en el año 1, en el año 2 o en el año 3... o simplemente no hacerla... Allí es cuando se puede observar la diferencia de un proyecto tradicional a la valoración de una opción real.

Visto desde la teoría de opciones reales, este proyecto se debe valorar como un *call option*. Hoy se adquiere la opción que me permitirá ejercerla, es decir, hacer la inversión requerida para la construcción en el caso que sea favorable hacerlo desde el punto de vista económico. Suponga que la variable de interés es el valor de venta del metro cuadrado, por lo tanto, visto desde la perspectiva de la teoría de opciones el proyecto sería tal como se muestra en el siguiente gráfico:



Si los ingresos esperados dado el valor de venta del metro cuadrado superan los US\$750 mil, entonces se ejerce la opción y se comienza la construcción. En caso contrario, si al cabo de los tres años el precio del metro cuadrado no es suficiente para justificar la inversión, la opción expira y se pierde el valor pagado por la opción.

Otros ejemplos frecuentes de este tipo de opciones se observa en la industria petrolera; por ejemplo, si el precio del petróleo es muy bajo para justificar la extracción ahora, se puede “esperar” hasta que los precios suban, por lo que, la compra de zonas con potencial de extracción petrolera se justifica inclusive con precios bajos del petróleo analizándolo como una opción de espera.

Ahora que se tiene mayor claridad sobre el significado y la clasificación de las opciones reales, el siguiente paso es hacer una introducción del proceso de valoración de las mismas.

Valoración de las opciones reales

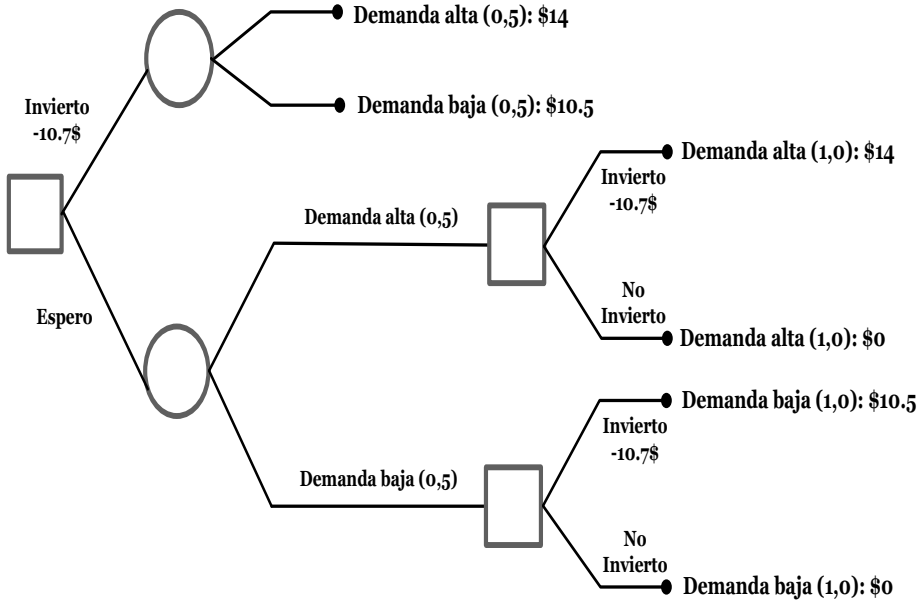
En las secciones anteriores tratamos de justificar la importancia de las opciones reales dentro de la toma de decisiones gerenciales; sin embargo, queda un vacío al no poder cuantificar su valor. En esta sección se hace una introducción a la valoración de opciones reales y se explica cómo cerrar en parte la brecha⁵⁴.

Como se vio en el ejemplo de *Italdent* (opción real de abandono), los árboles de decisión son los instrumentos más utilizados para valorar opciones reales. En los ejemplos vistos hasta ahora, y en los que se presentarán más adelante, se crean árboles relativamente sencillos; sin embargo, en el mundo real existen situaciones tan complejas que los árboles de decisión se quedan cortos para representarlas.

Considere el siguiente ejemplo de cómo valorar una opción de espera en el desarrollo de un pozo petrolero. Suponga que la explotación de dicho pozo asciende a US\$10,7 millones. El flujo de caja depende de la demanda que puede ser alta (probabilidad de 50%) o baja (probabilidad de 50%). Si la demanda resultó ser alta, el valor presente del flujo de caja será de US\$14 millones (en el año 1); si la demanda es baja, el valor presente de dichos flujos será US\$10,5 millones (en el año 1).

Suponga que por las características del proyecto se puede esperar (opción real de espera) a tener más información sobre la demanda, situación que se puede mostrar fácilmente con un árbol de decisión:

54 Para una exposición más técnica del proceso de valoración de opciones reales consultar Amram y Kulatilaka (1999) y Smit y Trigeorgis (2004).



Como en el ejemplo anterior, el árbol se resuelve de atrás hacia adelante hasta llegar al cuadrado de decisión inicial. Suponga una tasa de descuento de 10%.

Si se decide invertir de inmediato, el valor presente neto de esa decisión será:

$$VPN = -10,7 + (14(0,5) + 10,5(0,5))/1,10 = 0,44$$

Si decide esperar un período hasta tener más información acerca de la demanda, y en ese período ($t = 1$) la demanda resultó ser alta, el valor presente neto sería:

$$VPN = -10,7 + 14(1)/1,10 = 2,03$$

En caso que sea baja no se invierte porque:

$$VPN = -10,7 + 10,5(1)/1,10 = -1,15$$

¿Qué decisión se debe tomar hoy ($t = 0$)? Si espera un período solo invierte si la demanda es alta, y como existe 50% de probabilidad de que eso ocurra, el valor esperado hoy es:

$$VPN = (2,03(0,5) + 0(0,5))/1,10 = 0,92$$

Note que la posibilidad de esperar un período hasta tener más información sobre la demanda prácticamente duplica el valor del proyecto. ¿Cuál es el valor de la opción de espera en este ejemplo?

$$VPN(\text{Ampliado}) = VPN + OR(\text{Espera})$$

$$0,92 = 0,44 + OR(\text{Espera})$$

$$OR(\text{Espera}) = 0,48$$

El proceso de valoración de opciones reales involucra varias etapas, siendo la más importante definir cuándo y cuáles son las decisiones que se deben tomar (que se representan como un cuadrado en los árboles de decisión). Luego se debe tener claridad en cuanto a las fuentes de incertidumbre, es decir, entender qué variables son críticas para el éxito del proyecto (que se representan como círculos en los árboles de decisiones).

El problema con esta metodología es que un determinado proyecto puede tener múltiples fuentes de incertidumbres y puede ser muy difícil, o imposible, representarlas dentro de un árbol de decisión.

Cuando los analistas enfrentan estos casos generalmente utilizan fórmulas generales como la de valoración de opciones *Black-Scholes*. Los detalles de esa fórmula están fuera del alcance de este libro, pero podemos decir que necesita cinco *inputs*. En el caso de las opciones financieras y sus equivalentes para las opciones reales se representan de la siguiente manera⁵⁵:

Variable fórmula Black-Scholes	Opciones financieras	Opciones reales
S	Precio de la acción	Valor presente de los flujos de caja libres (FCL) descontados a una tasa ajustada por riesgo (WACC).
K	Precio de ejercicio	Valor de la inversión en el momento que se realiza
T	Tiempo hasta el vencimiento	Momento cuándo se hace la inversión
σ	Volatilidad del precio de la acción	Volatilidad de los FCL
R	Tasa libre de riesgo	Tasa libre de riesgo

En algunas de las aplicaciones que siguen se hará uso de la fórmula de Black Scholes para determinar el valor de las opciones reales que se analizan.

55 Existen muchas calculadoras gratuitas en internet para determinar el precio de una opción usando la fórmula de Black Scholes. Una de ellas es DerivaGem (<http://derivagem.software.informer.com/2.0/>).

Aplicaciones

APLICACIÓN 1

Considere a una chica llamada María Fernanda que, gracias a sus grandes conocimientos financieros y de sistemas, desarrolla una aplicación llamada Mi Asesor Financiero Para Éxito (MAFE) el cual permita a las empresas no solo llevar su contabilidad en tiempo real, sino hacer proyecciones y calcular indicadores que ayudan a la gerencia de la empresa a tomar decisiones financieras⁵⁶. Ella lo explica como un “waze”⁵⁷ para los gerentes y directivos que quieren maximizar el valor para los accionistas. En caso de que se tome una decisión que “desvíe” a la empresa de dicho objetivo, MAFE inmediatamente reacciona con una serie de alarmas y, en caso de ser necesario, “recalcula” la nueva ruta elegida por la gerencia.

Sin embargo, las estimaciones de María acerca del VPN de MAFE no son alentadoras pues sus cálculos indican que es negativo. María Fernanda ha escuchado que este tipo de proyectos tienen opciones reales... sobretodo en este caso parece evidente que existen opciones para expandir el negocio creando, por ejemplo, versiones más avanzadas de su aplicación: MAFE para la mediana empresa, MAFE para negocios agrícolas, MAFE para colegios y universidades, es decir, la posibilidad (opción) de crear un MAFE + debe ser evaluada antes de descartar este proyecto luego del análisis financiero tradicional que se muestra a continuación:

⁵⁶ Ejemplo adaptado de Ross et al. (2008).

⁵⁷ Aplicación que trabaja con el sistema gps y permite a los conductores establecer la mejor ruta para llegar a su destino.

Concepto	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
EBITD/impuestos	-600	330	477	885	555	0
Variaciones de Capital de Trabajo	0	-150	-300	-300	375	375
CAPEX	-750	0	0	0	0	0
FCL	-1.350	180	177	585	930	375
Tasa de descuento	20%					
VPN	-139					

Supongamos que al tercer año se lanza una nueva versión de MAFE, digamos MAFE +. Supongamos además, que se dobla la escala, como se muestra a continuación:

Concepto	Año 3	Año 4	Año 5	Año 6	Año 7	Año 8
FCL (MAFE+)	-2.700	360	354	1170	1860	750
Tasa de descuento	20%					
VPN	-279					

Como MAFE + es básicamente el doble en todo que MAFE, entonces su VPN resulta el doble de negativo. En otras palabras, la introducción de MAFE + en el tercer año, sigue siendo un proyecto de valor presente negativo... Suponga que la volatilidad de los FCL para proyectos de este tipo es 35% y que la tasa libre de riesgo es 10%. Con esta información podemos calcular el valor de la opción de expansión

usando DerivaGem (o cualquier otro software para calcular el valor de una opción). Los datos para el cálculo son los siguientes:

Variable fórmula Black-Scholes	Opciones reales
S	1.401 (*)
K	2.700
T	3
σ	35%
R	10%

(*) En $t = 3$ se calcula el VP de los FCL, y luego se trae a $t = 0$ usando la tasa de 20%. En otras palabras, 1.401 representa el valor HOY del valor presente de los flujos de caja que producirá MAFE + en tres años.

El valor de la opción es 171. ¿Cómo se interpreta ese resultado? El valor del proyecto incluyendo la opción de expansión viene dado por:

$$\begin{aligned} \text{VPN}(\text{Ampliado}) &= \text{VPN} + \text{OR}(\text{Expansión}) \\ \text{VPN}(\text{Ampliado}) &= -139 + 171 = 32 \end{aligned}$$

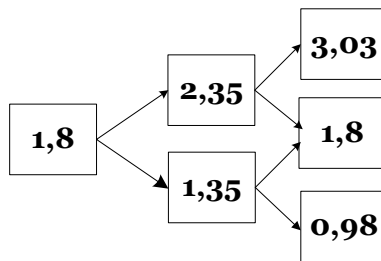
Es decir, este proyecto debe llevarse a cabo inclusive si el VPN es negativo, e incluso si el proyecto de expansión en el año 3 es negativo. La razón es que dada la volatilidad, esos resultados negativos esperados se deben a la información que se tiene hoy, pero eso podría revertirse en el futuro, y justamente esa posibilidad es la que genera

el valor de la opción real de expansión. En otras palabras, la opción hoy está *out-of-the-money* (ya que el valor presente de los flujos de caja esperados hoy no compensa la inversión requerida) pero eso podría revertirse en el futuro.

APLICACIÓN 2

Considere una empresa que está decidiendo la explotación de una mina de carbón⁵⁸. La inversión requerida es de US\$4 millones (\$1 millón para caminos y preparación del sitio, y \$3 millones para maquinaria). La operación del equipo cuesta \$0,7 millones al año y se puede considerar como un costo fijo de operación.

A los precios de hoy el proyecto generaría ingresos por US\$2,5 millones al año. Por lo tanto, si la mina estuviera en operación hoy el flujo de caja sería $\$2,5 - \$0,7 = \$1,8$ millones. El pronóstico del flujo de caja para los próximos dos años (luego de los cuales la mina se agota) es el siguiente (millones de \$):



58 Ejemplo adaptado de Edleson (1994).

Suponemos un costo de oportunidad de 9% para los flujos de caja esperados (ajustados por riesgo); la probabilidad de que el flujo de caja suba es de 60% y 40% de que baje (dicha probabilidad se mantiene constante durante los dos años), por lo que el VPN del proyecto será:

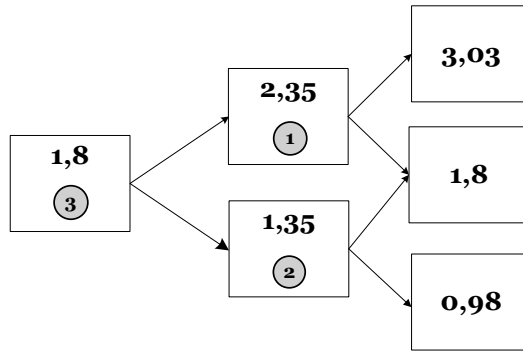
$$\begin{aligned} \text{VPN} = & -4 + (2,35(0,6) + 1,35(0,4))/1,09 \\ & + (3,03(0,6)^2 + 1,8(0,6)(0,4) + 3,03(0,4)^2)/(1,09)^2 = -0,8 \end{aligned}$$

Es decir, para llegar a los 3,03 millones en el período 2 es necesario que el flujo de caja suba dos veces; la probabilidad de que suba una vez es 0,6 y la probabilidad de que suba en el segundo año es independiente, de donde la probabilidad de llegar a ese punto es 0,6 x 0,6. Y así con los demás sumandos.

A pesar de que el proyecto tiene un VPN negativo debe tomarse en cuenta la posibilidad que tiene la gerencia de vender la maquinaria y los equipos. Los valores de venta son los siguientes (millones de \$):

Hoy	Año 1	Año 2
4	3.85	0

Estos valores de rescate representan una opción real de abandono... ¿Cómo podríamos valorar dicha opción en este contexto?



$$\textcircled{1} \quad VP = 2,35 + \frac{3,03 * (0,6) + 1,80 * (0,4)}{1,09} = 4,67 > 3,85$$

$$\textcircled{2} \quad VP = 1,35 + \frac{1,08 * (0,6) + 0,98 * (0,4)}{1,09} = 2,7 < 3,85$$

$$\textcircled{3} \quad VP = 1,8 + \frac{4,67 * (0,6) + 3,85 * (0,4)}{1,09} = 4$$

Analizando este problema desde la óptica de una opción real de abandono existen tres decisiones que las agrupamos en los nodos 1, 2 y 3 del gráfico anterior. Si nos ubicamos en el nodo 1, el valor presente de seguir con la operación un año más es 4,67, que es mayor que el valor de rescate de las maquinarias y equipos en ese momento (3,85 millones). Es decir, si el flujo de caja sube en el primer año (nodo 1), se continúa con la operación a pesar de la incertidumbre que se tiene con respecto al flujo de caja del año 2.

¿Qué ocurre si el flujo de caja es bajo en el primer año? Si se continúa la operación el valor esperado de los flujos de caja es 2,7 millones que es menor al valor de liquidación de los activos, que en el año 1 es de 3,85 millones. En ese caso (flujo de caja bajo en el primer año), la empresa debería liquidar los activos y cerrar su operación.

Con estos datos, podemos tomar la decisión hoy (nodo 3), que muestra que el valor presente de este proyecto, cuando se considera la opción real es \$4 millones. Dado que la inversión requerida es \$4 millones, el VPN (incluyendo la opción real) es cero. Es decir, el valor de la opción real de abandono (US\$800 mil) es suficiente para compensar el valor presente negativo inicial del proyecto.

$$\text{VPN}(\text{Ampliado}) = \text{VPN} + \text{OR}(\text{Abandono})$$

$$\text{VPN}(\text{Ampliado}) = -0,8 + 0,8 = 0$$

Problemas con solución para practicar y afianzar conceptos

PROBLEMA 1

Usted está estudiando la posibilidad de entrar en un negocio textil en Colombia. Es octubre y usted sabe que tiene poco tiempo antes de que comience la demanda de la época navideña. Su horizonte de negocio son dos años. Sus estimaciones iniciales indican que la inversión requerida serían \$350 millones y el valor presente de los Flujos de Caja Libres (FCL) esperados durante esos dos años asciende a \$400 millones aproximadamente, de los cuales se podría pagar \$60 millones de dividendo al final del año 1. Un corredor de bolsa amigo suyo le indica que la volatilidad anual de ese mercado está en 25% y la tasa libre de riesgo es 4%. Con esta información y usando la fórmula de *Black-Scholes*, indique si es mejor iniciar el negocio ahora o es preferible esperar un año.

Solución:

El VPN de comenzar el negocio ahora es:

$$VPN = -I + VP(FCL) = -350 + 400 = 50$$

La opción de espera no solo tiene el costo de no recibir el dividendo al final del año 1, sino que todo el proyecto se extiende un año. Usando la fórmula de *Black-Scholes* (incluyendo el dividendo esperado al final del año 1) el valor de dicha opción es aproximadamente \$37 millones, por lo cual es mejor no esperar y comenzar inmediatamente el negocio.

PROBLEMA 2

Considere el mismo problema anterior, pero con un valor presente de los FCL de \$360 millones.

Solución:

En ese caso, el valor presente neto de comenzar ya es:

$$VPN = -350 + 360 = 10$$

Por su parte, la opción de espera (usando la fórmula de *Black-Scholes* incluyendo el dividendo al final del año 1) asciende a \$18 millones; por lo cual en este caso es mejor esperar un año antes de tomar la decisión.

PROBLEMA 3

Imagine una empresa farmacéutica que está considerando lanzar una determinada medicina para atender a dos mercados potenciales⁵⁹. La incertidumbre recae en la efectividad de la medicina más que en su aceptación en cualquiera de los dos mercados; es decir, la medicina será exitosa o fracasará con igual probabilidad en ambos mercados. La empresa puede entrar simultáneamente o de forma secuencial en ambos mercados ahora, en un año o dentro de dos años. El mercado A requiere una inversión de 100 millones independientemente de cuándo se entre; si la medicina es exitosa tendrá un valor presente de los FCL (un año después de entrar) igual a 160 millones; si por el contrario la medicina fracasa en ese mercado, el valor presente de los FCL (un año después de entrar) será solo de 80 millones. Para el caso del mercado B, la inversión es de 55 millones y dentro de un año, si la medicina es exitosa, tendrá un valor presente de los FCL igual a 140 millones; de lo contrario el valor presente neto del FCL será de solo 25 millones. Suponga una tasa de descuento de 5%. *¿Cuál es el VPN de cada mercado? ¿Cuál es el VPN de entrar en ambos mercados simultáneamente? ¿Qué otras alternativas se tienen? ¿Cuál es la que genera el mayor VPN? ¿Cuánto vale la opción de expansión?*

Solución:

Calculamos el VPN esperado de cada proyecto:

$$VPN_A = -100 + (160(0,5) + 80(0,5))/1,05 = 14,3$$

$$VPN_B = -55 + (140(0,5) + 25(0,5))/1,05 = 23,6$$

59 Problema basado en Luehrman (2009).

Si se entra a los dos mercados de manera simultánea, entonces el VPN combinado será:

$$VPN_{A+B} = 14,3 + 23,6 = 37,9$$

Existen varias alternativas: por ejemplo, si se entra al mercado A con éxito, se entra luego al mercado B, de lo contrario no se entra en el mercado B en el siguiente período. En caso de que la medicina sea exitosa en el mercado A (que lo será con 50% de probabilidad) el VPN viene dado por:

$$\begin{aligned} VPN_{A \rightarrow B} &= -100 + (160(1) + 80(0) - 55)/1,05 \\ &+ (140(0,5) + 25(0,5))/(1,05)^2 = 126,98 \end{aligned}$$

En caso de que se entre en el mercado A y sea un fracaso (que ocurrirá con 50% de probabilidad) el VPN viene dado por:

$$VPN_{A \rightarrow B} = -100 + (160(0) + 80(1))/1,05 = -23,8$$

Por lo que el VPN esperado de esa segunda alternativa es:

$$VPN_{A \rightarrow B} = 126,98(0,5) + (-23,8)(0,5) = 51,6$$

En este caso, el valor de la opción de expansión será:

$$VPN(\text{Ampliado}) = VPN + OR(\text{Expansión})$$

$$VPN(\text{Ampliado}) = 37,9 + 13,7 = 51,6$$

Cálculos similares nos indican que:

$$VPN_{B \rightarrow A} = 128,22(0,5) + (-31,19)(0,5) = 48,5$$

Lo cual indica que la mejor opción es ejercer la de expansión y entrar primero en el mercado A.

CAPÍTULO 8.

MINICASOS DE ESTUDIO

En este capítulo recogemos algunos minicasos de estudio que sirven para aplicar los conceptos aprendidos a problemas concretos.

CASO DE ESTUDIO 1.

Determinación de la política de precios

Julio y María, presidente y gerente de finanzas de Flexillanos, discuten sobre cuál será la política de precios del polietileno para bolsas plásticas para inicios del año. Dicho mercado es altamente competitivo y cada empresa pone especial atención a los precios de su competencia.

Otros actores importantes del mercado (p. ej., Polipack) suelen esperar que Flexillanos anuncie sus precios para ellos establecer los propios, lo cual es importante dada la sensibilidad de los precios en ese mercado, especialmente en la zona de influencia de Flexillanos y Polipack.

María (economista de formación) ha estudiado la sensibilidad de los precios entre algunos de los clientes principales, y se ha dado cuenta de que si las dos empresas ofrecen el mismo precio, que actualmente es de US\$9 por kilo de producto, Flexillanos puede colocar unas 375 toneladas trimestrales, mientras que estima que Polipack puede suplir unas 300 toneladas.

En caso de que Flexillanos suba el precio a US\$12 por kilo (para compensar el alza significativa de las materias primas e insumos de producción), pero Polipack se mantenga en US\$9, María estima que la demanda para Flexillanos caería a unas 225 toneladas mientras que la demanda para Polipack llegaría a las 450 toneladas.

Por el contrario, si Flexillanos deja su política de precios estable en US\$9 por tonelada y Polipack unilateralmente sube el precio a US\$12 por tonelada, entonces la demanda de Flexillanos se ubicaría en no menos de 600 toneladas y la de Polipack caería a no más de 75 toneladas.

En caso de que las dos empresas aumenten el precio a US\$12 el kilo (lo cual María estima que sería lógico dado el aumento considerable de los costos de producción), algunos clientes cambiarían a proveedores de otras regiones (asumiendo inclusive mayores costos de transporte), y la demanda para ambas empresas se reduciría aproximadamente en un 15%, llegando a 320 toneladas para Flexillanos y a unas 255 toneladas para Polipack. El resumen de este análisis se puede ver en la siguiente tabla:

Precios (\$/kg)		Volumen	
Flexillanos	Polipack	Flexillanos	Polipack
9	9	375.000	300.000
12	9	225.000	450.000
9	12	600.000	75.000
12	12	320.000	225.000

Como se puede observar, el mercado que atienden Flexillanos y Polipack es altamente sensible al precio del producto final, lo cual es de esperar dado que el polietileno es un producto estilo *commodity*, en el sentido de que es poco diferenciado y su valor agregado es relativamente bajo si lo comparamos con otros tipos de productos plásticos.

María, a fin de tomar la decisión junto con su padre, y presidente de la empresa, de la forma más informada posible, presenta la siguiente tabla que busca mostrar la estructura de costos para cada nivel de producción. Para simplificar su análisis, y usando datos históricos, dividió los costos en materia prima, mano de obra directa, gastos indirectos de fabricación y desperdicios, todos expresados en dólares por kilo.

	Dólares /Kilogramo						
Costo de producción	75.000	225.000	300.000	320.000	375.000	450.000	600.000
Materia Prima	4.208	4.208	3.825	3.825	3.825	3.443	3.443
Mano de Obra Directa	1.530	1.530	1.530	1.530	1.530	1.530	1.530
Gastos Indirectos de Fabricaci	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765
Desperdicios	1.148	1.148	0,765	0,765	0,765	0,383	0,383
	6.887	6.887	5.357	5.357	5.357	4.974	4.974

Estos datos son estimados, pero lo más seguro es que la estructura de costos de Polipack no será muy diferente, dado que ambas empresas se dedican al mismo negocio y operan más o menos la misma tecnología de producción.

María nota igualmente que algunos rubros del costo son sensibles a la producción; por ejemplo, el proveedor de la materia prima ofrece descuentos por volumen pasando de US\$4.208 por kilo para consumos menores a 300 toneladas a US\$3.825 por kilo para consumos entre 300 y 400 toneladas, llegando hasta US\$3.443 por kilo para consumos mayores a 400 toneladas.

Por otro lado, el desperdicio es un rubro que también es sensible a los niveles de producción, pues a medida que la producción se incrementa los tiempos de máquina son más largos y, en consecuencia, los niveles de desperdicios se reducen significativamente. Por ejemplo, para un nivel de producción de 75 toneladas, el desperdicio constituye el 15% de los costos de producción ($=1,148/7,65$), pero solo representa un poco más de 6% cuando el nivel de producción es de 600 toneladas ($=0,383/6,12$)..

Note que los niveles actuales de producción (375 toneladas) dejan una ganancia bruta a Flexillanos de US\$793.125 por trimestre [$= 375.000 \times (9 - 6,885)$], lo que representa un margen de 23,5%. Sin embargo, si consideramos que los otros gastos generales, administrativos y de ventas se sitúan entre el 18 y el 20% de las ventas, el margen neto es bastante bajo en relación con el nivel de precios (US\$9 por tonelada), sobre todo considerando el gran esfuerzo requerido de producción.

María sabe que esta situación no es distinta para Polipack, la cual debe estar operando con márgenes de ganancia tan bajos como los de Flexillanos; en este caso, incrementar los precios unilateralmente genera el riesgo de que la demanda se reduzca de 375 a 225 toneladas (40%)... pero seguir operando con márgenes tan bajos tampoco parece ser la mejor alternativa.

Preguntas para orientar la discusión del caso:

1. *¿Cuál es la rentabilidad bruta de Flexillanos en la situación actual?*
2. *¿Cuál es la rentabilidad bruta de Polipack en la situación actual?*
3. *¿Cuál es la rentabilidad bruta de Flexillanos si sube el precio pero Polipack no?*
4. *¿Cuál es la rentabilidad bruta de Polipack si sube el precio pero Flexillanos no?*
5. *¿Cuál es la rentabilidad bruta de Polipack y Flexillanos si ambos suben los precios?*
6. *¿Cómo se podría plantear esta situación como un juego estratégico?*

7. *¿Cuáles son los jugadores, las estrategias y los pagos?*
8. *¿Cuál(es) es (son) el(los) equilibrio(s) de Nash en este juego?*
9. *¿Es bueno ese equilibrio?*

CASO DE ESTUDIO 2.

Salida y entrada al mercado de explosivos para la minería en Colombia⁶⁰

Tras el gran “boom” del sector minero, varias compañías internacionales han volcado sus esfuerzos para incursionar en el mercado colombiano de explosivos. El reporte de prensa en gestión.com de octubre de 2012^[61] analiza dicha situación y describe las pretensiones de la peruana Exsa y la chilena Enaex de ingresar a dicho mercado. Por otro lado, en Colombia el sector de explosivos ha sido administrado por el monopolio local que por ley otorga el Estado colombiano a la Empresa INDUMIL. Del artículo en cuestión se puede inferir que la demanda de explosivos crecerá dadas las condiciones favorables en el último año y en razón al crecimiento de la inversión en el sector minero. Se hace el siguiente supuesto: de acuerdo con las condiciones expuestas, el Gobierno permite el ingreso de la nueva empresa Exsa-Enaex con el fin de que compita con la empresa local INDUMIL por todo el mercado. Bajo ese supuesto, los gerentes de cada compañía tienen la opción de permanecer o salir del mercado con los respectivos beneficios o pérdidas que estas decisiones representan.

60 La idea inicial para el desarrollo de este caso fue de Gustavo Parra, Darío Fuentes y María Medina.

61 Cfr.[<http://gestion.pe/empresas/fabricante-peruano-explosivos-mineria-mira-colombia-y-argentina-2050185>], consultada el 25 de noviembre de 2012.

La tensión de este juego es claramente para las empresas Exsa-Enaex si entran a competir o se mantienen fuera, y para INDUMIL si permanece compitiendo en el mercado local o más bien deja de participar. Para simplificar el análisis se consideran las siguientes estimaciones de ganancias o pérdidas surgidas de la participación o no en el mercado colombiano (datos estimados en millones de dólares).

- a. Si las dos empresas deciden mantenerse fuera del mercado no ganarán nada y cada una tendrá beneficios de 0.
- b. Si las dos empresas deciden atender conjuntamente el mercado, ambas perderán y deberán asumir pérdidas por 5 millones.
- c. Si una empresa permanece y la otra sale del mercado, la que se queda tendrá beneficios por 10 millones y la que se retira no tendrá beneficios.

El principal insumo imprescindible para la fabricación de explosivos para la gran minería es el nitrato de amonio. Ninguna de las compañías producen localmente tal insumo y deben recurrir a proveedores extranjeros. La producción de Exsa-Enaex se basa en insumos provenientes de Rusia, país que ha determinado dar prioridad a su producción local, por lo que no es claro que pueda abastecer toda la cantidad requerida por esta empresa. Por otro lado, la local INDUMIL no tendría problemas en el abastecimiento de su materia prima.

Preguntas sugeridas:

1. *¿Cuáles son las estrategias de cada jugador?*
2. *Construya la matriz de pago que plantea la situación descrita.*
3. *¿Cuál es el equilibrio del juego?*

4. *¿Qué tipo de juego “básico” representa esta situación?*
5. *¿Cómo se puede incorporar dentro de la estructura del juego la incertidumbre sobre el proveedor ruso para Exsa-Enaex? Haga los supuestos que considere necesarios.*
6. *¿Cuál cree usted que sería el desenlace del juego?*

CASO DE ESTUDIO 3.

Política de cobranzas y descuentos por pronto pago⁶²

A finales de 2008 la crisis en el sector industrial por la falta de liquidez golpeó fuertemente a la empresa XYZ. Varios de sus clientes entraron en la ley de quiebras, e inclusive sus mejores y más sólidos clientes solicitaron reducción de precios o descuentos por pronto pago.

Ante el eminente problema de liquidez, XYZ estructuró un programa de “amnistía de cartera”, donde los clientes podían pagar su deuda atrasada con descuentos, y luego, por mantenerse al día, se les ofrecían descuentos atractivos adicionales. Infortunadamente, la respuesta no fue la esperada, el impacto fue leve y solo momentáneo. Se han escuchado comentarios de clientes al estilo “yo dejo que se venzan las facturas porque igual me dan el descuento”.

Por todo esto el equipo financiero de la empresa XYZ buscó diseñar una herramienta con el fin de evitar que los clientes sin problemas de liquidez dejaran vencer sus facturas para luego solicitar el

62 La idea inicial para el desarrollo de este caso fue de Andrés Martínez y Alejandro Prieto.

descuento, y solo otorgar dichos beneficios a las empresas que realmente lo necesitaran. Por otro lado, las empresas que están en problemas financieros graves pueden eventualmente irse a la quiebra, y en esos casos habría que congelar rápidamente cualquier relación comercial dados los altos costos de recuperar esas facturas.

La primera opción a analizar es que para otorgar el descuento al cliente que realmente lo necesita es necesario evaluar primero si el beneficio para la empresa es mayor que el costo del descuento. El “beneficio” para xyz obviamente será la disminución de los días de cartera, y el “costo” será el valor descontado. Sin embargo, si el cliente está en graves problemas financieros, la decisión debe ser cancelar toda relación comercial.

El segundo caso es cuando se otorga el descuento a un cliente que no lo necesita, para lo cual se establece un descuento inicial; sin embargo, el cliente no desea mantenerse con su cartera corriente por lo que empieza a dejarla deteriorar y a solicitar cíclicamente el descuento, haciendo que el efecto en reducción de días de cartera sea nulo. Por otro lado, un cliente financieramente sólido que solicite descuentos (haciéndose pasar por una empresa en problemas) puede ocasionar que también se le retire todo crédito comercial.

Considere la siguiente matriz de pagos con un cliente que sí necesita el descuento. Este cliente debe decidir si solicita o no el descuento, entendiendo que al hacerlo puede disparar alarmas en xyz que terminen por generar un mayor problema dada la potencial eliminación de toda relación comercial.

		Cliente	
		Solicitar	No solicitar
XYZ	Otorga	(0 , 15)	(-5 , 12)
	No otorga	(-8 , -41)	(10 , 15)

Considere ahora la matriz de pagos con un cliente que no necesita el descuento:

		Cliente	
		Solicitar	No solicitar
XYZ	Otorga	(5 , 10)	(10 , 8)
	No otorga	(7 , -13)	(9 , 14)

Si β es la probabilidad de que el cliente sea del tipo “necesita el descuento” y $1 - \beta$ del tipo “no necesita el descuento”, conteste las siguientes preguntas sugeridas:

1. Suponga que $\beta=1$, ¿cuál es el equilibrio del juego?
2. ¿Qué tipo de juego “básico” representa la situación planteada en el literal a?

3. *Suponga que $\beta = 0$, ¿cuál es el equilibrio del juego?*
4. *Determine en función de β el o los equilibrios del juego planteado.*

CASO DE ESTUDIO 4.

Negociación con sindicatos⁶³

Manufacturas Inc. es una reconocida empresa del sector de producción de artículos de cuero. Aunque históricamente fue una compañía sólida, en 2005 inició un proyecto de expansión nacional mediante un crecimiento desordenado de varias de sus filiales que incluyó, entre otras cosas, la contratación de más personal del que requería. Así mismo, y producto de un mal diseño de incentivos, se dispararon sus costos pero no así sus resultados económicos.

Para 2009 varios accionistas expresaron preocupación por los rumores alrededor de la compañía, por lo que ordenaron la intervención inmediata de sus oficinas principales en Bogotá. El resultado del proceso terminó por demostrar el fracaso que había implicado la estrategia de expansión de la empresa. Así mismo, y con el fin de garantizar la sostenibilidad en el corto plazo y atender los problemas de liquidez que se empezaban a presentar, era urgente iniciar una estrategia de contracción que incluía cerrar varias de sus unidades de negocios y eliminar algunos de sus programas de bonificación e incentivos. La orden era disminuir a 550 los 1.020 empleados que la organización tenía en ese momento.

63 La idea inicial para el desarrollo de este caso fue de Germán Peña y Mario Rivas.

Aunque los empleados habían escuchado rumores acerca de la mala situación de la empresa, lo cierto es que la creencia general era que la empresa estaba creciendo y se estaban haciendo bien las cosas. Por lo tanto, la sorpresa general fue evidente cuando en septiembre de 2009, de acuerdo con el plan que conocía la Gerencia y que no se comunicó a tiempo, se despidieron 85 empleados. Ante la inminencia de más despidos los empleados decidieron formar SintraManufacturas, el sindicato de los trabajadores de la empresa.

Rápidamente el sindicato bloqueó ante las autoridades los planes de la compañía de más despidos. Por lo tanto, la única alternativa para Manufacturas Inc. era negociar con sus empleados programas de incentivos y retiros voluntarios que le permitieran llevar a cabo su plan financiero.

La negociación se inició en 2010 con presiones para garantizar la continuidad de la empresa. Tanto el empleador como el sindicato tenían dos estrategias:

Negociación distributiva. Bajo esta negociación ambas partes asumían posiciones agresivas en el proceso de negociación buscando quitar a la otra parte beneficios o parte de la utilidad que le correspondía de acuerdo con lo generado por la compañía.

Negociación integrativa. Dada la situación de la compañía, la estrategia integrativa podía llevar a empleador y empleados a trabajar bajo un esquema de incentivos y salarios atados a la productividad y a los resultados alcanzados por la compañía. Igualmente, las condiciones sugerían que era posible crecer sustancialmente en el mercado siempre y cuando se hiciera de manera organizada.

La siguiente tabla resume la información disponible al momento de empezar la negociación (valores en miles de dólares).

Negociación Distributiva

Empresa		Empleados	
Ventas anuales	10.000	Costo salarios	1.000
Costos operativos (Sin personal)	1.500	Incentivos exigidos	4.000
Costos huelga (utilidad)	2.000	Costo huelga	1.000
Costos huelga (Reputacional)	1.000		
Incentivos ofrecidos	100		

Negociación Integrativa

Empresa		Empleados	
Ventas anuales	17.000	Costo salarios	2.000
Incentivos negociados	3.500	Incentivos exigidos	3.500
Costos operativos (Sin personal)	2.500		

Algunas notas respecto a esta información.

- a. Dada la situación de la empresa, en caso de una negociación agresiva la empresa no estaría dispuesta a ofrecer incentivos, y en caso de huelga estaría dispuesta a hacer que los empleados asumieran la mitad del costo que dicha huelga generara (la mitad de sus utilidades estimadas).
- b. En caso de una negociación integrativa, el empleador estaría dispuesto a ofrecer un programa de incentivos cercano a lo exigido por el sindicato, siempre y cuando

los empleados lograran los resultados de ventas anuales proyectados.

- c. El sindicato asumiría una posición conciliadora a cambio de disminuir la cantidad de incentivos (sueldo variable) y exigiría que los sueldos se duplicaran.
- d. Si ambos jugadores asumieran posiciones agresivas los incentivos se negociarían a partir del promedio de sus pretensiones.

Preguntas sugeridas:

1. *Con la información presentada construya una matriz de pagos para modelar esta situación.*
2. *¿Cuál es el equilibrio del juego planteado?*
3. *¿Qué tipo de juego “básico” representa esta situación?*
4. *¿Cómo se puede romper ese equilibrio?*

CASO DE ESTUDIO 5.

Lucha entre banqueros⁶⁴

El Banco Cafetero nació en 1953 con el objetivo de financiar la producción y el proceso del café que en aquel momento estaba en auge en Colombia y su principal accionista era el Fondo Nacional del Café; sin embargo, entró en crisis en la última década de los años ochenta y en 1998 se fusionó con la Corporación Cafetera de Ahorro y Vivienda (Concasa, luego Bancafé).

64 La idea inicial para el desarrollo de este caso fue de Paula Franco y Wilson Sánchez.

La década de los noventa fue para Bancafé un periodo de expansión de su actividad con un crecimiento real anual de sus activos del 5% en el primer lustro de dicho período, mientras su cartera hizo lo propio en 16% en promedio anual. En 1997 se consolidó como el tercer banco más grande de Colombia con activos que ascendían a \$6.3 billones.

Sin embargo, en enero de 1999 el indicador de solvencia cayó por debajo de lo permitido por la legislación colombiana, por lo que FOGAFÍN tuvo que inyectarle \$600.000 millones, evitando así una crisis del sistema. Con esa inyección de liquidez el gobierno pasó a asumir el 99.99% de la entidad. A partir de la primera intervención, y con el fin de mejorar el margen de solvencia (por lo menos al mínimo requerido) el gobierno inyectó \$650.000 millones más entre el 2000 y el 2005^[65].

En el periodo comprendido entre 2002-2006 Bancafé consolidó su recuperación y saneó totalmente sus activos ubicándose en el séptimo lugar en tamaño de activos en 2006 con \$7.6 billones y un patrimonio de \$0.76 billones.

Para 2006 Bancafé era la tercera entidad con mayor presencia en el territorio nacional, con una red de 236 oficinas ubicadas en 132 municipios y 390 cajeros automáticos, con una base de 1.5 millones de clientes y 3.137 empleados. Luego de los resultados obtenidos por la ya saneada entidad, hacia 2006 el gobierno se enfrentó a la disyuntiva de privatizar o no la entidad.

La vía de la privatización implicaba la recuperación de los recursos inyectados a Bancafé por alrededor de \$1.25 billones; no privatizar conllevaría fusionar Bancafé con Granahorrar dejando un hueco en el presupuesto de 2005, pues en este se comprometía la venta tanto de Bancafé como de Granahorrar.

65 *El Tiempo*. “Expertos definirían futuro de Granbanco-Bancafé”, 23 de diciembre de 2005.

PROCESO DE LICITACIÓN

La banca de inversión Rothschild, Ágora y Gómez Pinzón indicó que el precio de Bancafé era \$1.09 billones por lo que el gobierno estableció un precio base de \$1.1 billones.

En una etapa preliminar los bancos interesados en conocer la información de Bancafé pagaron por tener ese derecho. Esas entidades fueron: General Electric, Citibank, Banco Santander, Davivienda y Banco de Bogotá. Siendo los dos últimos los que finalmente presentaron ofertas.

Luego de ver las ofertas iniciales, los aspirantes tuvieron media hora para analizar si presentaban una última y máxima propuesta. La diferencia de las ofertas fue mínima: Davivienda, del Grupo Bolívar, ofreció \$1.15 billones y el Banco de Bogotá, del Grupo Sarmiento Ángulo, hizo lo propio con \$1.1 billones de pesos.

DUELO CONOCIDO

El enfrentamiento entre José Alejandro Cortés, propietario mayoritario del Grupo Bolívar, a su vez propietario mayoritario de Davivienda, y Luis Carlos Sarmiento Ángulo ya se había suscitado 25 años atrás cuando el primero, socio fundador del Banco de Bogotá, perdió el control de dicha entidad a manos de Sarmiento, actual socio mayoritario. Cortés fue desplazado a partir de los movimientos estratégicos y secretos de compra de acciones a clientes minoritarios con los cuales Sarmiento logró hacerse al control accionario, y aunque inició una titánica lucha de compra de acciones no logró recuperar el control.

Producto de la disputa entre esos dos empresarios, y al entender Cortés que la estrategia seguida por Sarmiento no había sido del todo

trasparente, de algún modo se convino entre ellos que Sarmiento Ángulo entregaría a Cortés la Corporación de Ahorro y Vivienda –DAVIVIENDA– como un tipo de contraprestación.

BANCO DE BOGOTÁ

Al quedarse con Bancafé Luis Carlos Sarmiento Ángulo aumentó a \$ 27,6 billones sus activos en el sector financiero y amplió a 37% su participación en ese mercado. Además, se consagró, de lejos, como el jugador más importante de la banca colombiana y el hombre más poderoso del país.

El pago estimado de la acción para ENTRAR a la subasta significaba, en caso de quedarse con ella, convertirse en la mayor entidad bancaria de Colombia (por encima de Bancolombia).

BANCO DAVIVIENDA

Con la compra de Bancafé, Davivienda duplicó su tamaño y se consolidó como la tercera entidad bancaria del país. Sin embargo, el principal valor que Davivienda observó en Bancafé fue la forma de diversificar sus activos, y complementar el know-how en segmentos casi inexplorados para ellos como la cartera PYME y el sector corporativo. En 2006 Davivienda se caracterizaba por las líneas de negocio *retail* e hipotecario.

Con la compra de Bancafé, el Grupo Bolívar, propietario de Davivienda, se convirtió en el tercer grupo financiero por activos del país. En cartera de consumo se consolidó en el primer lugar con el 17,5% del mercado. También quedó en el primer puesto por cartera de vivienda, con \$2.5 billones.

Para la fecha el panorama de adquisiciones y/o fusiones en Colombia y Latinoamérica evidenciaba una relación de precio pagado/valor en libros entre 2,5 y 3,5 veces, por lo que se podía pensar que una segunda y definitiva oferta agresiva debería superar los \$2 billones.

Preguntas sugeridas:

1. *Considerando que el proceso de “subasta” del banco tiene dos etapas, ¿qué tipo de juegos se adaptarían mejor a la situación planteada?*
2. *¿Qué tipo de estrategias (agresivas versus conservadoras) piensa usted que adoptarían los jugadores en cada etapa del juego?*
3. *Diseñe un juego que permita modelar la situación planteada en el caso.*

CASO DE ESTUDIO 6.

Control corporativo, takeovers y el problema del “free-raider”

En este modelo⁶⁶ una empresa de capital abierto que no esté maximizando los intereses de los accionistas no necesariamente será objeto de un *takeover*. La idea principal es que los accionistas atomizados tienen incentivos para quedarse con sus acciones a fin de gozar de la revalorización una vez que la nueva gerencia entre a manejar la compañía; sin embargo, si todos los accionistas atomizados piensan de esa forma (*free-raider*), el *takeover* no se llevará a cabo. La idea de

66 Grossman y Hart (1980).

base es que la gerencia es un “bien público” de todos los accionistas y, como ocurre con todo bien público, tendrán incentivos para dejar que otros accionistas asuman los costos de supervisión de la gerencia; por supuesto, si todos piensan de esa forma, ningún accionista supervisará la gerencia.

Suponga que $f(a)$ es una función que representa las ganancias de una empresa en particular, donde f es una descripción de las actividades que escoge el gerente. Sea $a \in A$ el conjunto de actividades disponibles del gerente. Este conjunto se puede pensar, por ejemplo, como las horas de esfuerzo que debe invertir el gerente en su trabajo al interior de la firma.

Si el gerente escoge la actividad $a_0 \in A$, la firma generará un nivel de utilidad igual a $q = f(a_0)$. Bajo la gerencia actual, los accionistas esperan que el gerente resuelva el siguiente problema:

$$q = \max_{a \in A} f(a)$$

Por otro lado, existe un inversionista externo (*raider*) que si logra tomar el control de la firma obtendrá una ganancia igual a:

$$u = \max_{a \in A} f(a) + \varepsilon$$

La variable ε representa el valor agregado que trae el inversionista si logra tomar el control de la firma. Este valor agregado puede depender de una mayor capacidad gerencial o, simplemente, de que el inversionista siempre escogerá las actividades que maximizan el valor de la firma.

Suponemos ahora que el inversionista ofrece un precio p por las acciones de la compañía. Al momento del anuncio todos los

jugadores conocen q y u . El inversionista tomará el control si logra conseguir el 50% de las acciones.

Preguntas sugeridas para orientar la discusión del caso:

1. *¿Cuáles son las estrategias de cada jugador?*
2. *Construya la matriz de pago que plantea la situación descrita.*
3. *¿Cuál es el equilibrio del juego?*
4. *¿Cuál cree usted que sería el desenlace del juego?*

CASO DE ESTUDIO 7.

Corrupción e incentivos

La corrupción es un flagelo global, pero es especialmente significativa en países poco desarrollados con instituciones débiles⁶⁷. Existe un consenso general de que entre mayor sea el sueldo de los funcionarios públicos menores serán los incentivos para aceptar sobornos (p. ej., Singapur y Hong Kong); sin embargo, en muchos casos el nivel de salarios tendría que ser tan alto para eludir la corrupción que dejaría de ser viable para muchos países en desarrollo.

La otra perspectiva es ofrecer a los funcionarios incentivos directos en sus contratos de trabajo que ayuden a evitar la violación de las leyes.

Las consecuencias, por ejemplo, en el caso de los permisos de construcción pueden ser catastróficas, como se evidenció en 2013 en

67 Este caso está motivado en Wydick (2010).

Medellín cuando se desplomó un edificio segando la vida de varias personas; casos todavía más dramáticos se han visto en los terremotos de Turquía (1999) e India (2005) donde murieron 14.000 y 90.000 personas, respectivamente. Investigaciones posteriores indican que muchos de los edificios que se desplomaron no cumplían con la normatividad pero a pesar de eso recibieron los permisos de construcción, seguramente sobornando a los funcionarios encargados de inspeccionar las obras.

Considere el siguiente juego entre un constructor y un inspector de obras. El constructor puede cumplir la reglamentación vigente o, por el contrario, violar algunas de las normas a fin de abaratar costos. Por otra parte, el inspector puede vigilar el cumplimiento de la normativa o, por el contrario, no vigilar.

En este juego el inspector recibe un sueldo de w y su trabajo es vigilar que las construcciones se acojan a la reglamentación vigente. El constructor recibe un beneficio incremental de x si logra violar algunas de las normativas. Si el inspector inspecciona la obra y la misma no respeta la normativa, impone una multa de f al constructor, por lo que el beneficio del mismo sería $x - f$ (suponga que $f > x$).

Sin embargo, el inspector puede pedir una cantidad igual a b a cambio de no vigilar al constructor ($b < x$). Una vez que el inspector recibe b corre el riesgo de ser descubierto por sus superiores con una probabilidad c (o lo que es lo mismo, no descubierto por sus superiores con una probabilidad de $1-c$) y despedido de su cargo, por lo que su beneficio esperado será $(1-c)*w$ más el soborno recibido de b , es decir, su ingreso esperado luego de propiciar el soborno será igual a $(1-c)*w + b$.

Por otro lado, si el inspector reporta que el constructor no se ha acogido a la normatividad, recibe un incentivo igual a una fracción r de la multa f , es decir, recibe su sueldo, w , más una bonificación igual a $r*f$, es decir, $w+r*f$,

Con la información presentada en el caso, responda:

1. *¿Cuál sería la condición necesaria y suficiente para que el inspector vigile y el constructor cumpla la normatividad (equilibrio “bueno”)?* *¿Cuál sería su interpretación?*
2. *¿Cuál sería la condición necesaria y suficiente para que el inspector no vigile y el constructor no cumpla la normatividad (equilibrio “malo”)?* *¿Cuál sería su interpretación?*
3. *¿Qué ocurre cuando $(b-rf)/c < \omega < b/c$?*
4. *Suponga que $b = 10$, $r = 10\%$, $f = 15$, $c = 65\%$, $x = 12$ y $\omega = 14$, ¿cuál es el equilibrio del juego en estrategias puras?, ¿y en estrategias mixtas?, ¿cómo se interpreta?*
5. *Con base en este análisis diseñe una reglamentación que tenga como objetivo que el inspector vigile y que el constructor cumpla la normatividad.*

CASO DE ESTUDIO 8.

Acceso al microcrédito

El acceso al crédito depende de la capacidad del prestatario de honrar su deuda. En países en desarrollo donde los recursos son escasos y las necesidades de la población son muy grandes, hay miles de excusas para no pagar los créditos. Claramente el prestamista sabe eso ex ante y no presta el dinero requerido para que esta población pueda hacer las inversiones necesarias para salir de la pobreza.

El microcrédito se concibe como un programa anti-pobreza que tiene como propósito facilitar el acceso al crédito a personas de bajos recursos económicos, especialmente mujeres, así como pequeños productores y emprendedores quienes frecuentemente tienen acceso limitado a las instituciones financieras formales.

Bangladesh es el país líder entre los países de bajo ingreso ofreciendo microcrédito. El Grameen Bank, creado como un proyecto en 1976 en este país, y establecido como banco en 1983, fue la primera entidad en ofrecer un programa de microcrédito. El banco creía que la necesidad más urgente de los pobres era el crédito, el cual ellos podrían usar para crear y expandir oportunidades de auto empleo. El programa ha sido exitoso dada la buena disposición y habilidad del prestatario para repagar la deuda alcanzando altas tasa de recuperación.

Desde entonces, el Banco Grameen ha colocado aproximadamente US\$3.000 millones en préstamos a 2,4 millones de prestatarios. La metodología de asignación de préstamos se sustenta en un sistema de grupos basado en la colaboración. A través de ese sistema los prestamistas acceden al crédito en forma grupal dada la mayor presión ejercida. De la misma manera, el banco supervisa al grupo en su totalidad logrando que las tasas de incumplimiento sean más bajas y la diversificación del riesgo en la asignación de los recursos más alta. Esta metodología de crédito bajo un enfoque de grupo ha guiado a más de 750 organizaciones no gubernamentales que operan a baja escala en Bangladesh. Además de los microcréditos, otras figuras han emergido para atender préstamos para vivienda, proyectos de inversión en agricultura, manufactura, pesca y otras actividades⁶⁸.

Hoy en día, a pesar del éxito del programa, existe un debate respecto de los beneficios percibidos en términos de ingreso, consumo y bienestar familiar.

68 Khandker (1998).

En ese contexto, considere un préstamo de \$10 que puede generar un retorno de 100%. Suponga una tasa de interés de 30%, por lo que será requerido desembolsar \$13 para cancelar la deuda luego de un período. Esto pareciera ser una situación ganar-ganar ya que los \$10 del préstamo se transforman en \$20, el prestamista recibe \$13 y el prestatario se queda con \$7... ¿Cierto?

1. *¿Con la información presentada represente esta interacción como un juego estratégico?*
2. *¿Cuál es o son los equilibrios de Nash de este juego?*
3. *¿Qué tipo de juego básico genera la situación planteada?*
4. *¿Qué consecuencia tiene este equilibrio?*
5. *¿Cómo se puede salir de la situación planteada en este juego?*

CASO DE ESTUDIO 9.

Contratos como juegos de información incompleta

Juan es un terrateniente que necesita contratar a una persona que le ayude a sacar el mayor provecho de unas tierras que él directamente no puede desarrollar. Por su parte, Pedro no tiene tierras pero está dispuesto a trabajar si las condiciones del contrato de trabajo son satisfactorias para él.

Para simplificar las cosas suponga que Pedro tiene dos alternativas: trabajar duro (T) o, por el contrario, descansar (D) y no hacer mucho, esperando tener suerte y que la cosecha salga buena

independientemente de su nivel de esfuerzo. El esfuerzo es costoso para Pedro y supongamos que le cuesta un valor equivalente igual a \$1.000.000, mientras que el “descanso” no le cuesta nada.

La naturaleza juega un papel importante en el éxito o fracaso del negocio agrícola. Supongamos que la naturaleza puede generar un ambiente “amigable” u “hostil” para Pedro, dependiendo de su nivel de esfuerzo. Supongamos que si Pedro trabaja duro, entonces la cosecha generará \$25.000.000 con probabilidad 0,65 o \$16.000.000 con probabilidad de 0,35. Pero si decide descansar, la cosecha generará \$25.000.000 con probabilidad de 0,30 y \$16.000.000 con probabilidad 0,70.

Por la naturaleza de este negocio, si bien el esfuerzo de Pedro (cuidar la cosecha del viento, hacer las fumigaciones respectivas, construir canales para el desagüe, etc.) aumenta la probabilidad de éxito, la correlación no es perfecta, y puede darse el caso de que a pesar de su esfuerzo las cosas salgan mal. La creencia *a priori* de Juan es que Pedro trabajará duro con una probabilidad de 0,5 y descansará con una probabilidad de 0,5.

La siguiente tabla representa las creencias *a posteriori* (luego del ajuste bayesiano) de Juan sobre el nivel de esfuerzo de Pedro una vez revelado si la cosecha fue exitosa (25) o fue un fracaso (16):

		Resultado	
		Éxito [25]	Fracaso [16]
Esfuerzo	Trabajo Duro [T]	0.68	0.33
	Descanso [D]	0.32	0.67

Por ejemplo, si Juan observa que la cosecha fue buena “ajusta” sus creencias en un nivel alto de esfuerzo de Pedro pasando de 0,5 (creencia *a priori*) a 0,68 (creencia *a posteriori*); por el contrario, si Juan observa una cosecha de solo 16 ajusta sus creencias a un nivel alto de esfuerzo de Pedro pasando de 0,5 a 0,33.

La ganancia de Juan viene dada por el valor de la cosecha, Y (25 ó 16), menos el salario que le paga a Pedro, w , es decir $Y - w$. El beneficio de Pedro, que es adverso al riesgo porque su nivel de riqueza es significativamente menor a la de Juan, viene dado por $\sqrt{w} - e$ donde, como dijimos, e es el nivel de esfuerzo de Pedro (1 si trabaja duro y 0 si descansa).

Juan lo contrata a usted para que le ayude a diseñar un acuerdo mediante el cual le paga a Pedro una cantidad igual a $s(r=25)$ si la cosecha es exitosa (\$25 millones) o $s(r=16)$ si la cosecha es mala (\$16 millones) y, además, que cumpla dos objetivos: a. Que sea suficientemente atractivo para que Pedro lo acepte, es decir, que el pago esperado que reciba sea mayor a su beneficio de reserva de 1,5 millones, y b. Que una vez aceptado el contrato, Pedro tenga incentivos para trabajar duro, es decir, que su pago esperado trabajando duro sea mayor que descansando, y así Juan no tendrá necesidad de vigilarlo.

Con base en esta información responda las siguientes preguntas:

1. *Represente este juego de forma dinámica donde Juan ofrece o no ofrece el contrato, luego Pedro acepta o no los términos, y si Pedro acepta debe decidir entre trabajar duro o descansar. Recuerde que los pagos finales del esfuerzo (o descanso) son dependientes de la naturaleza por lo que habría que incluirla dentro de la interacción estratégica.*
2. *Indique cuál es la condición de participación para que Pedro acepte el contrato.*

3. *Indique cuál es la condición de alineación de incentivos que motiva a Pedro a trabajar duro.*
4. *Indique cuál sería el contrato óptimo que Juan debería ofrecer a Pedro, y Pedro aceptar. Recuerde verificar que cumple con las restricciones de participación y alineación de incentivos. ¿Ese contrato es único?*
5. *¿Funcionaría un contrato donde el pago sea fijo, digamos un pago de \$11 millones?*

CASO DE ESTUDIO 10.

Políticas de desarrollo como un juego de coordinación

Una idea central de las políticas de desarrollo es la interdependencia estratégica entre las industrias que potencian el crecimiento económico, por lo que la inversión y el crecimiento en una industria particular dependen de la inversión y el crecimiento de otros sectores de la economía, y viceversa, creando un círculo virtuoso de bienestar.

En este tipo de interacciones estratégicas (juegos) las complementariedades, la coordinación y la confianza son elementos fundamentales para la generación de expectativas positivas entre los “jugadores”. Es claro que a mayores complementariedades entre las industrias el impacto positivo de una de ellas generará un efecto positivo en las otras. Sin embargo, para que ello ocurra se requiere coordinación

y confianza, que son los otros dos elementos para que se genere el círculo virtuoso del bienestar.

Considere tres industrias importantes de principios del siglo XX⁶⁹: ferrocarril, carbón y acero. Es claro que la industria del acero utiliza el carbón como insumo principal y el acero es requerido para hacer las rutas de los ferrocarriles. Igualmente, los ferrocarriles utilizan el carbón para operar.

Entonces, una industria ferrocarrilera en crecimiento producirá una alta demanda para la industria del carbón y del acero, pero más y mejores vías generarán también más y mejor acceso a minas de carbón, mineral demandado por las acerías, las cuales requieren producir más acero para atender la demanda de más vías ferroviarias, y así sucesivamente... Sin embargo, ¿se genera siempre un círculo virtuoso cuando existen interdependencias como las mencionadas?

Suponga, para simplificar la situación, que cada una de las industrias debe asumir un costo fijo de operación igual a 100, y que cada industria está en capacidad de producir 150 unidades de producto a un costo variable de 1 por producto. Además, suponga que cada industria fija un precio de 2 por unidad de producto.

Suponga, además, que cada industria tiene dos estrategias: invertir o no invertir. Por ejemplo, si todas las industrias invierten, la ganancia para cada una será de 50, pues cada una asume el costo fijo de 100, vende su producto a 2 generando 300 (supongamos que si las dos industrias compran se vende a 75 cada uno, ya que 150 es la capacidad máxima de cada industria) y como tuvo que asumir un costo variable de 1, su costo variable total sería de 150. Así, cada industria obtendría un beneficio de 300 (venta) -150 (costo variable) -100 (costo fijo) = 50 (utilidad).

Claramente, si ninguna invierte el beneficio será de 0 para cada una. Por último, supongamos que el nivel de interdependencia es

69 Este caso está basado en Wydick (2010)

tan alto que si alguna de las industrias no invierte toda la economía colapsa y la(s) industria(s) que sí invirtieron tendrían que asumir una pérdida igual al costo fijo de 100. Este sería un ejemplo de un *coordination failure*.

Con la información presentada en el caso, responda:

1. ¿Cuál es la tensión del juego? ¿Qué rol juegan la confianza y la coordinación en este contexto?
2. Represente este juego donde la industria del carbón es el jugador “fila”, la industria del acero es el jugador “columna” y el jugador ferrocarriles es el jugador “matriz”.
3. ¿Cuál es o son los equilibrios de Nash de este juego?
4. ¿Cuál sería la probabilidad de que una industria en particular invirtiera? ¿Cómo se puede interpretar esa probabilidad? (ayuda: como las industrias son simétricas, si no invierten su pago es cero, pero si lo hacen hay una probabilidad de que la otras dos industrias sí inviertan (p) y su complemento, $(1-p)$, que ninguna o alguna no invierta.
5. Desde el punto de vista de política pública, ¿cómo se podría elevar el valor de p ?

CASO DE ESTUDIO 11.

Empresa petrolera y sus opciones reales (parte A)

Global Resources, una empresa petrolera canadiense, adquirió el derecho de explotación petrolera en una región en Casanare donde se sabe que existen reservas petroleras. Ese derecho tiene una duración de un año.

Inicialmente la empresa debe realizar los desembolsos necesarios para cubrir los costos de exploración, de la construcción de caminos y de la creación de toda la infraestructura necesaria para operar. Estimados preliminares indican que la inversión total sería de US\$104 millones.

Los cálculos iniciales indican que el valor presente de los flujos de caja libres esperados llegan a US\$100 millones con una volatilidad de 58,8%. La tasa libre de riesgo es 5%.

Este VPN negativo de -4 millones hizo que el proyecto fuera rechazado en la primera reunión del comité de inversiones de Global Resources y se sugirió simplemente abandonar el terreno y enfocarse en otros proyectos...

Sin embargo, al finalizar la reunión una de las jóvenes analistas indicó que en el cálculo del VPN no se estaban tomando adecuadamente las potenciales opciones reales que el proyecto podía brindar a la compañía.

Es claro que la posesión temporal del derecho a explotar el terreno le da a la empresa la posibilidad de diferir el proyecto durante un año con el objeto de reducir la incertidumbre que presenta el comportamiento de los precios del crudo; si el nivel de precios sube lo suficiente el próximo año puede ser rentable invertir en la explotación, o, por el contrario, si los precios continúan en los niveles actuales la rentabilidad del proyecto no alcanza a cubrir la inversión y así la “opción” que brinda el terreno expira “out-of-the-money”.

Usted se pregunta: *¿Cuánto vale la opción de diferir este proyecto un año? ¿Cómo se puede explicar al comité de Global Resources la existencia de esa opción real?*

CASO DE ESTUDIO 12.

Empresa petrolera y sus opciones reales (parte B)

Siguiendo con la situación anterior de Global Resources... usted sabe que si los precios internacionales del crudo resultan ser mucho más altos de los inicialmente esperados, la empresa no solo podría invertir los US\$104 millones, sino que podría hacer inversiones adicionales y aumentar la capacidad de producción.

Supongamos que la empresa tiene la oportunidad de aumentar la tasa de producción 50% incurriendo en un desembolso adicional de US\$40 millones (si las condiciones del mercado son favorables).

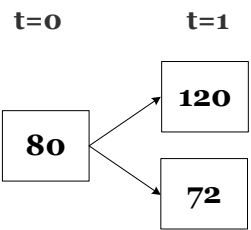
¿Cuánto vale esa opción real de expandir la producción? ¿Cómo se podría explicar el valor de esa opción al comité de inversiones?

CASO DE ESTUDIO 13.

Empresa petrolera y sus opciones reales (parte C)

Global Resources no tendrá que seguir incurriendo en costos fijos si no vislumbra una mejora significativa en las condiciones del mercado (o cualquier otra causa que sugiera el abandono definitivo del proyecto).

Suponga que el valor residual que se obtiene si se decide abandonar el proyecto se distribuye según un esquema temporal donde los precios del petróleo pueden ser altos y generar un flujo de caja de 120 dentro de un año, o bajos generando un flujo de caja de solo 72:



Note que el valor residual actual (80) es inferior al valor actual del proyecto (100), por lo que no vale la pena abandonar el proyecto inmediatamente.

¿Cuál es el valor de la opción de abandonar el proyecto y cómo se podría explicar a la gerencia de Global Resources? En definitiva, a partir de los resultados de la parte A, B y C de este mini caso señale el valor total del proyecto considerando las opciones reales de espera, expansión y abandono.

Bibliografía

- Amran y Kulatilaka (1999). *Real Options: Managing Strategic Investments in an uncertain world*, Harvard Business School Press.
- Aumann, R. y Hart, S. (eds.) (1992). *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol. 1, Amsterdam: Elsevier.
- Aumann, R. y Hart, S. (eds.) (1994). *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol. 2, Amsterdam: Elsevier.
- Aumann, R. y Hart, S. (eds.) (2002). *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol. 3, Amsterdam: Elsevier.
- Berk, Jonathan y Peter DeMarzo (2014). *Corporate Finance*, Third Ed. Pearson-Addison Wesley.
- Binmore, K. (1994). *Teoría de Juegos*, Madrid: McGraw-Hill e Interamericana de España.
- Bodily, S. (2009). *"Airbus and Boeing: Superjumbo Decisions"*. Darden Case No. UVA-QA-0720.

- Breadly, R., S. Myers y F. Allen (2010). *Principios de Finanzas Corporativas*, Novena. ed.: McGraw Hill: New York.
- Copeland, T.; Weston, J. y Shastri, K. (2010). *Financial Theory and Corporate Policy*. Boston, Mass.: Pearson: Addison-Wesley.
- Dixit, A. y Nalebuff, B. (2010). *El arte de la estrategia*, Barcelona, España: Bosch editor.
- Dutta, P. (1999). *Strategies and games: theory and practice*, Cambridge, Mass.; London: MIT Press.
- Edleson, M. (1994). *Real Options: Valuing Managerial Flexibility*, Harvard Business School, Case: 9-294-109.
- Fudenberg, D. (1991). *Game Theory*. Cambridge, Mass. London: The MIT Press.
- Gibbons, R. (1992). *Game theory for applied economists*, Nueva Jersey: Princeton University Press.
- Grossman, S. y Hart, O. (1980). "Takeover Bids, The Free-Rider Problem, and the Theory of the Corporation", *The Bell Journal of Economics* 11(1), 42-64.
- Khandker, S. (1998). *Using Microcredit to advance women*. PREM Notes, No. 8, New York: The World Bank.
- Loomis, C. (1990). "The biggest looniest deal ever", *Fortune*, 121(14), 48.
- Luce, D. y Raiffa, H. (1989). *Games and decisions: Introduction and critical surveys*, Mineola, N.Y.: Dover.
- Luehrman, T. (2009). *Real options exercises*, Harvard Business School, Technical Note: 9-208-045.

- Monsalve, S. y Arevalo, J. (eds.) (2005). *Un curso de teoría de juegos clásica*, Bogotá: Universidad Externado de Colombia.
- Myers, S. y Majluf, N. (1984). "Corporate financing and investment decisions when firms have information that investors do not have", *Journal of Financial Economics* 13(2), 187-221.
- Osborne, Martin J. (2004). *An introduction to game theory*, New York; Oxford: Oxford University Press.
- Özak, O. (2006). *Comportamiento asintótico y selección de equilibrios en juegos evolutivos*, Bogotá: Universidad Externado de Colombia.
- Palacios-Huertas, I. (2003). "Professionals Play Minimax", *The Review of Economic Studies* 70(2), 395-415.
- Peldschus, F. (2008). *Experience of the game theory application in construction management*. *Technological and Economic Development of Economy*, 14(4), 531-545.
- Pérez, J.; Jimeno, J. y Cerdá, E. (2004). *Teoría de juegos*, Madrid: Pearson Educación.
- Pulido, M., Sánchez-Soriano, J., & Llorca, N. (2002). *Game theory techniques for university management: an extended bankruptcy model*. *Annals of Operations Research*, 109(1-4), 129-142.
- Rasmussen, E. (2007). *Games and information: an introduction to game theory*, Malden, MA; Oxford: Blackwell Pub.
- Ross, S., R. Westerfield y J. Jaffe, (2008): *Corporate Finance*. Octava ed. Irwin: New York.
- Saloner, G. (1991). *Modeling, game theory, and strategic management*. *Strategic Management Journal*, 12(S2), 119-136.

- Shubik, M. (1955). *The uses of game theory in management science*. Management Science, 2(1), 40-54.
- Smith y Trigeorgis (2004). *Strategic investments, real options and games*, Princeton University Press.
- Szewczyk, S. y Tsetsekos, G. (1992). "State intervention in the market for corporate control: The case of Pennsylvania Senate Bill 1310", Journal of Financial Economics 31(1), 3-23.
- Tirole, J. (2006). *The Theory of Corporate Finance*, Nueva Jersey: Princeton University Press.
- Vega-Redondo, F. (2003). *Economics and the theory of games*, New York: Cambridge University Press.
- Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior*, Nueva Jersey: Princeton University Press.
- Wydick, B. (2010). *Games in Economic Development*, Cambridge University Press.

CESA - Colegio de Estudios Superiores de Administración.
Este libro se terminó de imprimir en junio de 2017 en Bogotá D.C.

Se compuso en caracteres
Adobe Caslon Pro y Cambria Math a 12 puntos.

Y se imprimió sobre papel bond de 70 gr.