



**COLEGIO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ADMINISTRACIÓN, CESA
MAESTRÍA EN FINANZAS CORPORATIVAS**

Modelo estructural de crédito de consumo para banco colombiano

Presentado por:
Mauricio Posse Isaza

Trabajo de grado dirigido por:
Bernardo León

17 de enero del 2013

Tabla de Contenido

1. Marco teórico	13
2. Desarrollo del modelo	18
2.1. Los datos	18
2.2. Diseño	20
3. Resultados	25
4. Conclusiones	28
5. Apéndices	30
Apéndice 1. Gráficas de K vs. KS de modelos alternos	30
Apéndice 2. Código de programación del modelo en Matlab®.....	33
Apéndice 3. Código de programación de la función ks en Matlab®	38
6. Bibliografía	40

Indice de Tablas

Tabla 1. Resultados obtenidos con 25 observaciones históricas para los modelos evaluados.....	25
Tabla 2. Resultados obtenidos con 13 observaciones históricas para los modelos evaluados.....	26

Indice de Gráficas

Gráfica 1. Caminata de comportamiento crediticio	16
Gráfica 2. Distribución de los datos por comportamiento crediticio	18
Gráfica 3. Probabilidad de incumplimiento y varianza promedio por número de productos	19
Gráfica 4. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 13 observaciones, varianza EWMA y sin media	27
Gráfica A1. 1. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 25 observaciones, varianza EWMA y con media	30
Gráfica A1. 2. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 25 observaciones, varianza simple y con media	30
Gráfica A1. 3. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 25 observaciones, varianza EWMA y sin media	31
Gráfica A1. 4. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 25 observaciones, varianza simple y sin media	31
Gráfica A1. 5. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 13 observaciones, varianza simple y sin media	32
Gráfica A1. 6. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 13 observaciones, varianza EWMA y con media	32
Gráfica A1. 7. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 13 observaciones, varianza simple y con media	33

Modelo estructural de crédito de consumo para banco colombiano

Resumen

En este trabajo se desarrolla la aplicación del modelo estructural de crédito de consumo planteado por de Andrade y Thomas (2007) en el cálculo de las probabilidades de incumplimiento en un banco en Colombia. El modelo está soportado en la teoría de opciones y el concepto de la reputación de cada individuo. Utiliza como base el modelo definido por Merton (1974) y utiliza un puntaje de crédito como variable *proxy* para la reputación del cliente. El modelo definido se compara con los modelos de redes neuronales actualmente utilizados por el banco.

Palabras clave:

Riesgo de crédito, Crédito de consumo, Merton.

Una de las principales áreas que forma parte de la estructura organizacional de las entidades financieras y juega un papel esencial en los procesos de la entidad es el área de riesgo. Existe un porcentaje significativo de clientes con productos de crédito que dejan de pagar las cuotas de dichos productos previamente acordadas con el banco al momento de obtenerlos. Por ello, tanto las entidades financieras alrededor del mundo como la academia han trabajado a lo largo de la historia en el diseño de diferentes tipos de modelos que permitan identificar si un cliente potencial, empresa o persona, tiene alta probabilidad de incumplir la obligación a adquirir. Así, buscan modelos que les sirvan como herramienta para decidir si dicha empresa o persona es mercado objetivo del banco a la hora otorgar un crédito. Dentro de los modelos diseñados para la medición del riesgo de crédito se encuentran los modelos estructurales y los modelos de forma reducida.

Los modelos estructurales para la evaluación del riesgo de crédito fueron introducidos por Black y Scholes y Merton (Jarrow y Protter, 2004). Estos modelos suponen que se conoce el valor de mercado de los activos y de la deuda de todas las compañías. Es decir, los modelos estructurales asumen un completo conocimiento de información detallada de la compañía, información a la cual tiene acceso la administración de la misma (Jarrow y Plotter, 2004). En ellos, se parte de modelar el comportamiento estocástico del valor de los activos de la compañía y supone que si este valor está por debajo de un umbral determinado, definido como el valor de la deuda de la compañía, ésta incumplirá con dicha obligación. El modelo Merton supone que el comportamiento estocástico del valor de los activos sigue un proceso de difusión.

A partir de este modelo se han desarrollado una serie de variaciones. Algunas de ellas son Black y Cox (1976), Longstaff y Schwartz y Zhou (1997). Black y Cox (1976)

trabajan sobre el plazo que transcurre antes que el incumplimiento ocurra. Longstaff y Schwartz plantean un modelo en el cual el valor de mercado de la empresa y de los bonos corporativos que la misma emite siguen un comportamiento estocástico. La idea detrás de él, está fundamentada en la valoración de opciones con barreras (Venegas, 2007). Zhou (1997) plantea una variación a la propuesta de Merton mediante un esquema de valoración del incumplimiento modelando la evolución del valor de la firma mediante un proceso de difusión con saltos.

Por otro lado, los modelos de forma reducida asumen un conocimiento de información menos detallada y a la cual tiene acceso el mercado general. En estos modelos no se considera ningún tipo de relación entre el incumplimiento de una obligación y el valor de la compañía. Estos modelos consideran el incumplimiento como un evento aleatorio e impredecible. Así, el evento implica una pérdida repentina en el valor de mercado.

Duffie y Singleton suponen que el incumplimiento ocurre con una tasa de riesgo neutral, y que su probabilidad condicional neutral al riesgo de incumplir en un intervalo pequeño de tiempo, dado que no ha incumplido hasta el momento, se define como la tasa de riesgo neutral multiplicada por el intervalo de tiempo (Zhou, 1997)

Jarrow y Turnbull (1995) proponen una alternativa mediante la cual se parte de la estructura estocástica de las tasas de interés de la tasa libre de riesgo de crédito y el diferencial de tasa estocástico de un activo con riesgo de crédito. Teniendo esto, asumiendo un escenario sin posibilidad de arbitraje, se valora la opción mediante cálculos de martingala.

Particularmente enfocados en crédito de consumo, los modelos utilizados para determinar si una persona es objeto de préstamo por parte de una entidad financiera se conocen como modelos de calificación de riesgo (*credit scoring*). La clasificación de riesgo corresponde al conjunto de modelos y técnicas que ayudan a los prestamistas en el otorgamiento de crédito (Thomas, Edelman, & Crook, 2002).

El objetivo principal de estos modelos es identificar el riesgo específico de que un aspirante a un crédito incumpla durante los doce meses siguientes al otorgamiento del mismo. La metodología de la calificación de crédito está basada en técnicas de clasificación (Thomas, 2006). A pesar de que el crédito es parte de la humanidad desde que los seres humanos se comunican y que la primera prueba de existencia de riesgo viene de la antigua Babilonia, la historia de la clasificación de riesgo o *credit scoring* es de alrededor de 60 años (Thomas, Edelman, & Crook, 2002). Como mencionan Thomas, Edelman y Crook (2002), el objetivo de la clasificación de riesgo es predecir el riesgo, no explicarlo.

Los métodos utilizados a lo largo del desarrollo de los modelos de clasificación de riesgo son en su mayoría métodos estadísticos. Durante los años cincuenta y sesenta los únicos métodos utilizados fueron los métodos estadísticos de discriminación y clasificación (Thomas, Edelman, & Crook, 2002). El análisis discriminante en la clasificación de riesgo en crédito de consumo se basa en que el proceso de decisión de otorgamiento de crédito lleva a tomar una decisión considerando dos opciones: otorgar crédito a la persona que lo busca o no otorgarlo. De esta forma se clasifican las dos opciones (otorgar o no) en dos clases de clientes: buenos y malos. Si se están considerando una serie de atributos en las aplicaciones tales como estado civil, estrato de la vivienda, tipo de vivienda (propia, arrendada o familiar), entre otros, el objetivo es encontrar una regla que permita partir en

las dos clases mencionadas, buenos y malos, a todo el espectro de posibles combinaciones de valores de todos los atributos considerados de los potenciales clientes. Esto llevó al uso de la función de discriminación lineal, sin embargo, como mencionan Thomas, Edelman y Crook (2002), los supuestos necesarios para garantizar una buena discriminación entre “*buenos*” y “*malos*” eran bastante restrictivos, razón por la cual se llegó a utilizar la regresión lineal en el análisis discriminante.

Posteriormente se estudiaron otras formas de regresión lineal con el fin de reducir las restricciones de los supuestos. La más exitosa y utilizada de estas regresiones fue la regresión logística. Se basa en el planteamiento de que el logaritmo natural de la división de la probabilidad a estimar sobre uno menos dicha probabilidad, es una combinación lineal de las variables características. De esta forma, no hay restricciones sobre los valores que tomen los estimadores ni el logaritmo, y lleva a valores de probabilidad entre 0 y 1. Otros métodos planteados en los últimos 30 años son los árboles de clasificación o métodos de partición recursiva.

Hasta 1980, los únicos métodos utilizados en el diseño de modelos de clasificación de riesgo eran los métodos estadísticos. Sin embargo, en 1981, Freed y Glover plantean la posibilidad de encontrar la función lineal de las características que mejor discrimina en grupos mediante la programación lineal (Thomas, Edelman, & Crook, 2002). Bajo este método se mide la bondad de ajuste como la suma de los errores absolutos introducidos. También se analiza la idea de medir el número de casos en los cuales la clasificación es incorrecta con lo cual se introduce la programación entera.

En otras áreas de investigación se venía trabajando en sistemas inteligentes y programas computacionales que tuvieran habilidades características de la raza humana. Una de las áreas de investigación que más avanzaba en sistemas de clasificación era la medicina, en la cual interesaba identificar las características que llevaban a los pacientes a tener la enfermedad. En 1980 surge otro método dentro de la inteligencia artificial conocido como redes neuronales. Las redes neuronales fueron desarrolladas inicialmente como un intento de modelar la comunicación y procesamiento de información en el cerebro humano (Thomas, Edelman, & Crook, 2002). En el cerebro, las dendritas son prolongaciones ramificadas de la neurona y son encargadas de recibir las señales eléctricas provenientes de otra neurona y llevarlas hasta el soma de la neurona, y ésta a su vez convierte esta señal en un impulso eléctrico y lo transporta a través de sinapsis, las cuales enviarán la información a dendritas de otras neuronas. Como Thomas, Edelman y Crook (2002) explican, de manera análoga una red neuronal consiste en una serie de variables de entrada, cada una multiplicada por un peso ponderado, equivalente a la dendrita. Se suman estos productos y se constituyen como una neurona, y este resultado es un valor de entrada de una nueva neurona.

Correa y González (2011) utilizan dos algoritmos para optimizar la arquitectura de un modelo de crédito de consumo construido mediante la metodología de redes neuronales de perceptrón multicapa, algoritmos genéricos (GA) y optimización de un enjambre de partículas binarias (BPS). Los resultados fueron comparados con un modelo de regresión logística en datos de un banco local y concluyen que la implementación de ambos algoritmos mejora la predicción del incumplimiento del modelo. También que los resultados obtenidos son mejores a los resultados hallados mediante los modelos de

regresión logística. Así mismo concluyen que el uso de BPS es más eficiente en términos de tiempo que el modelo GA.

El diseño de modelos estructurales en la estimación de probabilidades de incumplimiento en créditos de consumo no ha sido trabajado ampliamente y su desarrollo es reciente. Respecto a la modelación específica de la probabilidad de incumplimiento en crédito de consumo, según de Andrade y Thomas (2007), Perli y Nevada proponen un modelo para estimar el incumplimiento en créditos rotativos, bajo el supuesto de que el individuo incumplirá el pago de su obligación si el valor de los activos es inferior al valor del crédito; es decir, siguiendo el mismo planteamiento del modelo corporativo. Vasicek (1991) plantea un modelo que genera una solución analítica para la función acumulada de pérdidas dentro de un portafolio de créditos.

De Andrade y Thomas (2007) proponen un modelo estructural en crédito de consumo en el cual el cliente tiene una opción de compra sobre su reputación y la cual tiene un precio de ejercicio equivalente al valor de su deuda. Si el valor de su reputación es inferior al valor de su deuda, el cliente incumplirá con el pago de su obligación.

Adicionalmente, se han diseñado otros modelos estructurales que no están enfocados al riesgo individual ni al riesgo de portafolio, como los modelos de Longhofer y Peters (2004) quienes estudian la discriminación de préstamos y selección propia, y Athreya (2004), quien analiza la importancia del estigma de quiebra y las tasas de quiebra.

El objetivo central de este trabajo es replicar el modelo estructural planteado por de Andrade y Thomas (2007) en el cálculo de las probabilidades de incumplimiento para una entidad financiera nacional. En la primera sección de este trabajo se desarrolla el marco

teórico sobre el cual está soportado el modelo y se explica la metodología a aplicar para su desarrollo. En la segunda sección, se describen los datos que sirven como materia prima para el desarrollo del modelo y se analizan algunas de las principales características. Así mismo se describe el diseño del modelo desarrollado. En la tercera parte se presentan los resultados obtenidos mediante la implementación del modelo planteado y se comparan los resultados obtenidos con los resultados obtenidos mediante el uso de uno de los modelos actualmente empleados y el más recientemente desarrollado. En la cuarta sección, se establecen las conclusiones acerca del modelo desarrollado y los resultados obtenidos a partir de su uso.

1. Marco teórico

Como mencionan Jarrow y Protter (2004), Merton es pionero, junto con Black y Scholes, en el desarrollo de los modelos estructurales de riesgo de crédito. Merton modela el valor de los activos de la firma y si dicho valor es inferior al valor de la deuda de la firma la compañía incumplirá el pago de su obligación. Para modelar el comportamiento estocástico de los activos utiliza un proceso de difusión.

El modelo de Merton supone que los accionistas de una compañía tienen una opción de compra sobre los activos de la compañía con un precio de ejercicio igual al valor de la deuda de la compañía. De esta forma, si el valor de la compañía está por debajo del valor de la deuda, no hay razón para ejercer dicha opción y la compañía incumplirá con dicha obligación.

Cuando se busca utilizar el modelo estructural en crédito de consumo se debe considerar que en primer lugar es difícil establecer cuál es el valor de los activos de quien está tomando el crédito, y en segundo lugar, bajo este tipo de mercado no necesariamente el cliente incumplirá cuando el valor de su deuda está por encima del valor de sus activos.

Considerando los aspectos anteriores, de Andrade y Thomas (2007) plantean un modelo estructural para evaluar el crédito de consumo basado en los modelos de valoración de opciones bajo el cual, el consumidor tiene una posición larga en una opción de compra sobre su reputación con un precio de ejercicio igual al valor de su deuda. Si el valor de su reputación es menor que el valor de su deuda, entonces esta persona incumplirá con el pago de la obligación. En el caso de que esto ocurra, la entidad prestamista informará el incumplimiento a las agencias calificadoras de riesgo, quienes enviarán el reporte a sus

centrales y harán pública esta situación para todo el mercado. Dado esto, el deudor perderá el valor de reputación que tenía y por ende el acceso a nueva deuda. En caso de que el deudor tenga un valor de su reputación mayor a la deuda, el deudor cumplirá con sus obligaciones y mantendrá el valor de la reputación (de Andrade & Thomas, 2007).

El modelo anteriormente planteado está basado en las siguientes premisas. En primer lugar, existe una cantidad estocástica inobservable, Q_i , la solvencia del consumidor i que contiene toda la información relevante para el acceso a crédito acerca del consumidor i . En segundo lugar, a pesar de que dicha cantidad no es observable, las instituciones de crédito utilizan información disponible tanto a nivel interno como externo basadas en el comportamiento histórico del consumidor i , las condiciones financieras del mismo y reportes de crédito. En tercer lugar, la probabilidad de que el consumidor sea aceptado como cliente de la institución financiera, P_{ai} , es una función creciente de su solvencia, Q_i . En cuarto lugar, existen agencias calificadoras de crédito, burós de crédito y otros mecanismos para obtener información sobre el comportamiento de la persona en cuanto al pago de sus obligaciones. Si un deudor incumple cualquiera de sus obligaciones, todas las instituciones de crédito lo sabrán y esta persona perderá su reputación y por tanto, no tendrá acceso al crédito en un futuro inmediato. En último lugar, el acceso al crédito tiene un valor para el consumidor y es llamado el valor de su reputación, el cual es una función creciente de la probabilidad de ser aceptado como cliente por una institución financiera.

Si la probabilidad de que el consumidor sea aceptado como cliente de la institución financiera es una función creciente de su solvencia y la reputación es una función creciente de la probabilidad de ser aceptado, entonces la reputación es una función creciente de la solvencia. Así, los valores de la reputación pueden ser asignados como los valores de

solvencia y el precio de ejercicio, K_{Ri} , puede ser asignado como el umbral de cada solvencia, K_{Qi} . (de Andrade & Thomas, 2007)

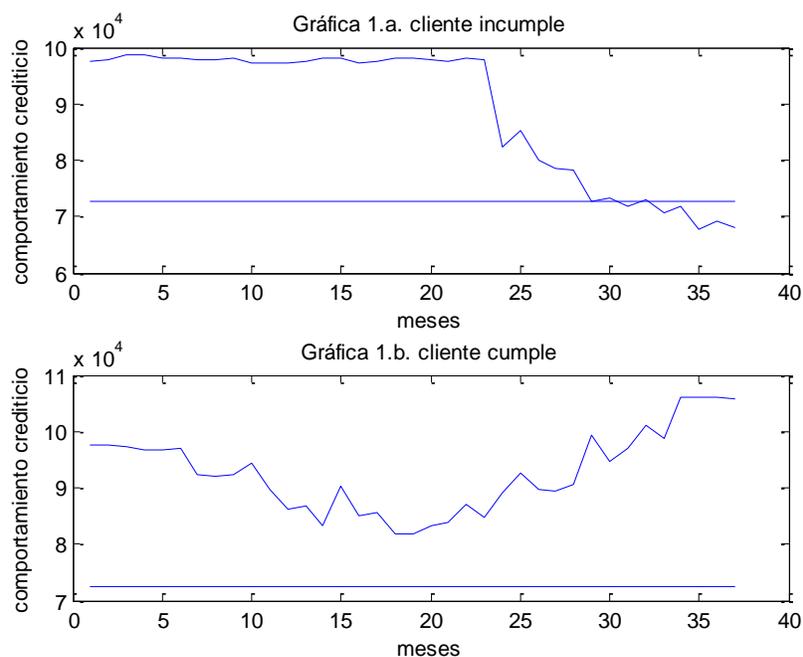
Para el planteamiento del modelo de incumplimiento, se describe el comportamiento estocástico de la reputación del cliente como un proceso de difusión. De esta forma, se plantea un modelo de difusión tal y como se especifica en la ecuación presentada a continuación:

$$dQ_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

El componente de tendencia, μ , está relacionado o es atribuible al incremento en edad o estabilidad del individuo en el tiempo, ya que mientras más tiempo permanece una persona en un trabajo, la probabilidad de que pierda dicho trabajo es menor y adicionalmente una persona con mayor experiencia profesional tiende a ser más responsable en su comportamiento crediticio. El componente de volatilidad se atribuye al cambio que puede tener un individuo en su comportamiento crediticio debido a cambios repentinos o momentáneos en su condición financiera.

El modelo pronostica la serie estocástica de la reputación de cada uno de los clientes para los 12 meses siguientes mediante 100 caminatas posibles. Después de haber pronosticado para cada cliente 100 caminos posibles para la reputación durante los 12 meses siguientes al periodo de estudio, se define un umbral tal que si la caminata del valor de la reputación proyectada alcanza, se considera que el cliente incumplirá. Una vez realizadas las 100 simulaciones, se calcula la probabilidad de incumplimiento para cada cliente como el número de veces que el valor de la reputación fue igual o inferior al umbral definido sobre el número de simulaciones realizado, en nuestro caso 100.

Gráfica 1. Caminata de comportamiento crediticio



Fuente: Cálculos propios.

Se debe aclarar que a pesar de que el umbral es específico para cada cliente, al igual que lo hacen de Andrade y Thomas (2007), se define un umbral para todo el portafolio de clientes con el fin de hacer el modelo más simple y fácil de implementar.

Una vez se tienen las probabilidades de incumplimiento, y teniendo la información real de del comportamiento de pagos del cliente durante los doce meses siguientes, se calcula el indicador *Kolmogorv-Smirnov* (KS). La medida de *Kolmogorv-Smirnov* (KS) es una medida popular entre los analistas de crédito para evaluar el desempeño de los modelos de *credit scoring* y se calcula la distancia máxima que existe entre la distribución acumulada de los grupos de clientes buenos (que cumplen) y de los clientes malos (que incumplen) (Laredo, Pedroso, & Okaze, 2012).

Una vez hallado el KS del modelo para un umbral definido K , se simula el cálculo para diferentes niveles de K y se toma el K tal que hace mayor el KS. Se compara el KS hallado con el KS obtenido mediante el modelo actualmente utilizado. Se busca determinar si hay evidencia para definir cuál es el mejor modelo en términos de clasificación y predicción.

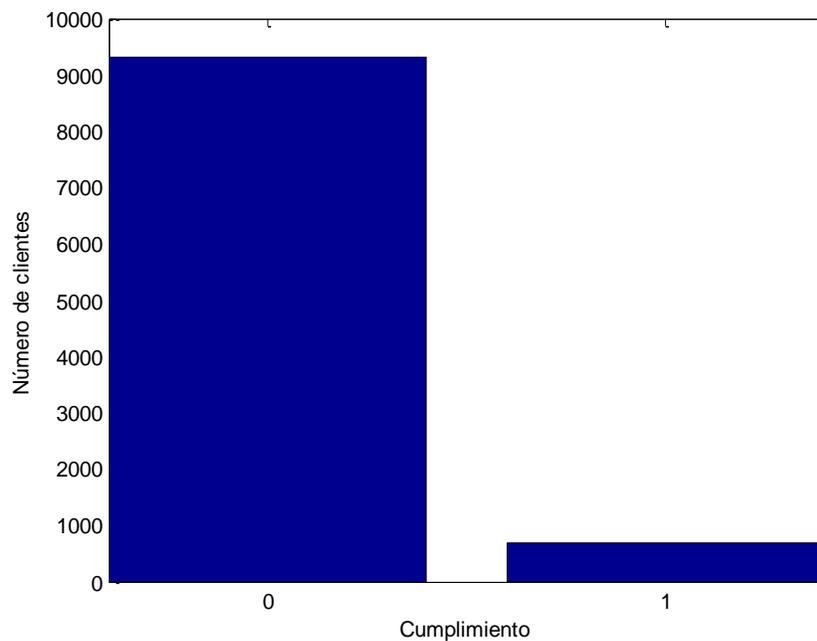
Para el manejo de los datos, su procesamiento estadístico y la simulación, se utiliza MATLAB® como programa de trabajo. MATLAB® es un entorno computacional interactivo fácil de usar, potente y con la flexibilidad necesaria para el desarrollo del modelo planteado.

2. Desarrollo del modelo

2.1. Los datos

Como se mencionó anteriormente, para el desarrollo del modelo se cuenta con una base de 10.000 clientes del banco. En la base de datos se cuenta con el puntaje otorgado por un modelo de *credit scoring* del banco para 25 meses consecutivos. La base de datos está compuesta por 689 que realmente incumplen dentro de los 12 meses siguientes a la última observación y 9311 clientes que cumplen con las obligaciones adquiridas al momento de tomar el respectivo producto de crédito con la entidad.

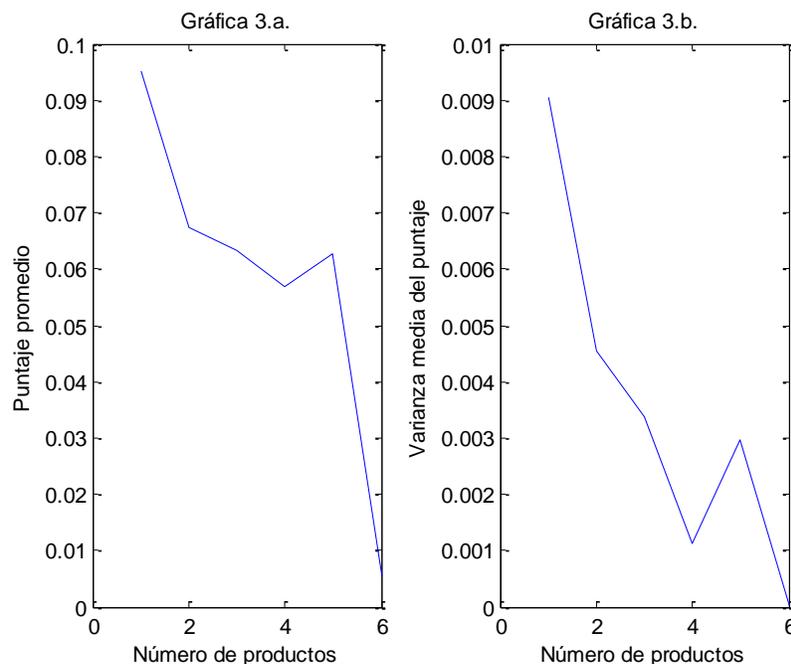
Gráfica 2. Distribución de los datos por comportamiento crediticio



Fuente: Resultados tomados a partir de la base de datos de un banco colombiano, correspondientes a una muestra aleatoria del comportamiento de 10.000 clientes entre marzo de 2011 y febrero de 2012.

Además, se tiene información sobre el número de productos de crédito que tiene el cliente con la entidad. Si se observa la gráfica 3.a. tiene que la probabilidad de incumplimiento promedio por cliente es mayor entre menor sea el número de productos de crédito que tenga. Esto tiene sentido si se considera que los clientes que tienen acceso a los productos ofrecidos por entidades financieras y que cuentan con más de un producto de crédito tienen una buena reputación crediticia, ya que de otra manera no hubiesen accedido al portafolio de productos ofrecido por el sistema financiero. Adicionalmente, en el momento en que uno de ellos incumple con alguna entidad financiera, su reputación se pierde y las entidades financieras buscan recoger dichas obligaciones y cierran sus puertas a este individuo. Así mismo, en la gráfica 3.b. se observa que la varianza de la probabilidad de incumplimiento es mayor entre menos productos tenga el individuo con la entidad.

Gráfica 3. Probabilidad de incumplimiento y varianza promedio por número de productos



Fuente: Cálculos propios realizados a partir de la base de datos de un banco colombiano, correspondientes a una muestra aleatoria del comportamiento de 10.000 clientes entre febrero de 2009 y febrero de 2011.

2.2. Diseño

Es importante mencionar que para el desarrollo de este modelo es indispensable contar con una serie histórica de puntajes de calificación de riesgo del cliente potencial que solicita el crédito provenientes ya sea de un modelo de crédito desarrollado a nivel interno por la entidad que otorga el crédito, o de un puntaje obtenido a partir de un buró de crédito. El hecho de que sea un puntaje otorgado a nivel interno implica que ya tenga una relación con la entidad que otorga el crédito. En Colombia, existen dos burós de crédito, Datacrédito y Cifin. El modelo a plantear está diseñado con un puntaje de cada cliente otorgado a nivel interno por el banco. Sin embargo, a través de los buró de créditos mencionados se puede tener una serie histórica de los puntajes dados por ellos de tal forma que sea útil para clientes potenciales que aún no tienen vínculo con la entidad. En el caso de Datacrédito el puntaje es conocido como *acierta* y en Cifin como *clear*.

Se cuenta con 25 puntajes, que como se mencionó anteriormente, serán utilizados como variable *proxy* para la reputación. Sin embargo, ¿es conveniente tomar todas las 25 observaciones? Es importante considerar que un cliente puede presentar un buen comportamiento durante un periodo largo de tiempo y luego su comportamiento se puede ver deteriorado por cualquier coyuntura particular posible. De esta forma, puede presentar un buen comportamiento durante 18 meses continuos y tener un periodo de 6 meses de incumplimiento. Al estimar la media y la viarianza, se estaría compensando el mal comportamiento con los meses históricos en los cuales el cliente presentaba un buen comportamiento crediticio.

Con el fin de mitigar este riesgo se calculan la media y la varianza de cada cliente con base en las series históricas de cada uno de ellos, tomando 25 y 13 observaciones.

Además, teniendo en cuenta que se quiere dar un mayor peso a las observaciones más recientes, se evalúa el modelo calculando la varianza EWMA para cada uno de los clientes.

Así, se calcularon los retornos de cada periodo mediante:

$$\ln \left(\frac{P_i}{P_{i-1}} \right)$$

y posteriormente los retornos medios de la variable proxy de la reputación.

Para el cálculo de la varianza, se utilizó la varianza común calculada como:

$$Var(R) = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}{n}$$

y la varianza EWMA (Promedio Móvil de Ponderación Exponencial, por sus siglas en inglés). La racionalidad detrás de la volatilidad EWMA es que la volatilidad reciente de los precios de un activo es mejor indicador de la volatilidad futura y por ello debe dárseles una mayor ponderación. De esta forma la varianza es calculada como:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$$

donde:

- λ es el coeficiente de ponderación exponencial
- r_t es el retorno del periodo t.

El factor de ponderación exponencial, λ , determina la ponderación de los retornos y debe ser un valor entre 0 y 1. Para este modelo se utilizó un λ igual a 0,94.

Así, una vez determinados los factores de dichas series se proyecta el valor de la reputación de cada individuo como un proceso de difusión:

$$Q_t = Q_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma\sqrt{dt}z}$$

donde $z \sim N(0,1)$

Paralelamente se define un nivel K tal que si el valor proyectado de la reputación, Q_t , es igual o inferior al valor definido de K, se tomará como incumplimiento. Para cada uno de los clientes se simulan 100 caminatas posibles del valor de la reputación. La probabilidad de incumplimiento para cada uno de los clientes se determina como el número de veces que la proyección de reputación del cliente estuvo por debajo del nivel K fijado en al menos un mes de los proyectados por caminata, sobre el número de caminatas proyectado por cliente.

Una vez definida la probabilidad de incumplimiento por cliente, se calcula el indicador KS de los resultados obtenidos con el fin de evaluar el ajuste del modelo y compararlo con los modelos existentes. Antes de calcular este indicador, es necesario convertir estas probabilidades en puntajes de evaluación crediticia para lo cual se realiza la transformación de la siguiente forma:

$$s_i = 1 - p_i$$

donde,

s_i corresponde al puntaje del cliente i.

p_i corresponde a la probabilidad de incumplimiento del cliente i.

Para calcular el indicador KS, la distancia máxima entre la distribución acumulada de los puntajes de los clientes que cumplen (clientes buenos) y los clientes que incumplen (clientes malos), se calcula la función de distribución acumulada de puntajes de cada grupo de la siguiente manera:

$$F_{CB}(s_0) = \frac{\text{Número de CB con } s \leq s_0}{\text{Número de CB}}$$

y

$$F_{CM}(s_0) = \frac{\text{Número de CM con } s \leq s_0}{\text{Número de CM}}$$

donde:

- $F_{CB}(s_0)$ es la función de distribución acumulada de los clientes buenos en el puntaje s_0
- CB se refiere a clientes buenos
- $F_{CM}(s_0)$ es la función de distribución acumulada de los clientes malos en el puntaje s_0
- CM se refiere a clientes malos
- s es el puntaje del modelo de crédito.

Así, se define el KS como la distancia máxima entre estas dos distribuciones. Es decir,

$$KS = \max|F_{CM} - F_{CB}| \text{ ó } KS (\%) = 100 KS$$

Definido esto, se pretende encontrar cual es el nivel K tal que maximiza el KS . Para ello, como mencionan de Andrade y Thomas (2007), se podrían emplear métodos numéricos como Newton-Raphson, o simplemente calcular el KS para diferentes niveles de K y escoger el máximo. A pesar de que el último método mencionado es quizás el menos preciso, al igual que de Andrade y Thomas (2007), en este trabajo se utiliza este método para encontrar el nivel K a utilizar.

3. Resultados

Como ya se mencionó, en este trabajo se evalúa el modelo planteado tomando para cada uno de los clientes una serie de 25 observaciones y posteriormente 13 observaciones. Así mismo, en cada uno de los casos se evalúa el modelo estimando las varianzas simples para cada uno de las series y la varianzas EWMA. También se evalúa el modelo de difusión normal y el modelo de difusión sin media.

$$(1) dQ_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (2) dQ_t = \sigma dW_t$$

Los resultados obtenidos para las series de 25 observaciones se presentan en la tabla 1. Los resultados obtenidos para las series de 13 observaciones se presentan en la tabla 2.

Tabla 1. Resultados obtenidos con 25 observaciones históricas para los modelos evaluados

Modelo	Varianza	KS
$dQ_t = \mu dt + \sigma dW_t$	Simple	0.5638
$dQ_t = \mu dt + \sigma dW_t$	EWMA	0.5690
$dQ_t = \sigma dW_t$	Simple	0.5612
$dQ_t = \sigma dW_t$	EWMA	0.5702

Fuente: Cálculos propios.

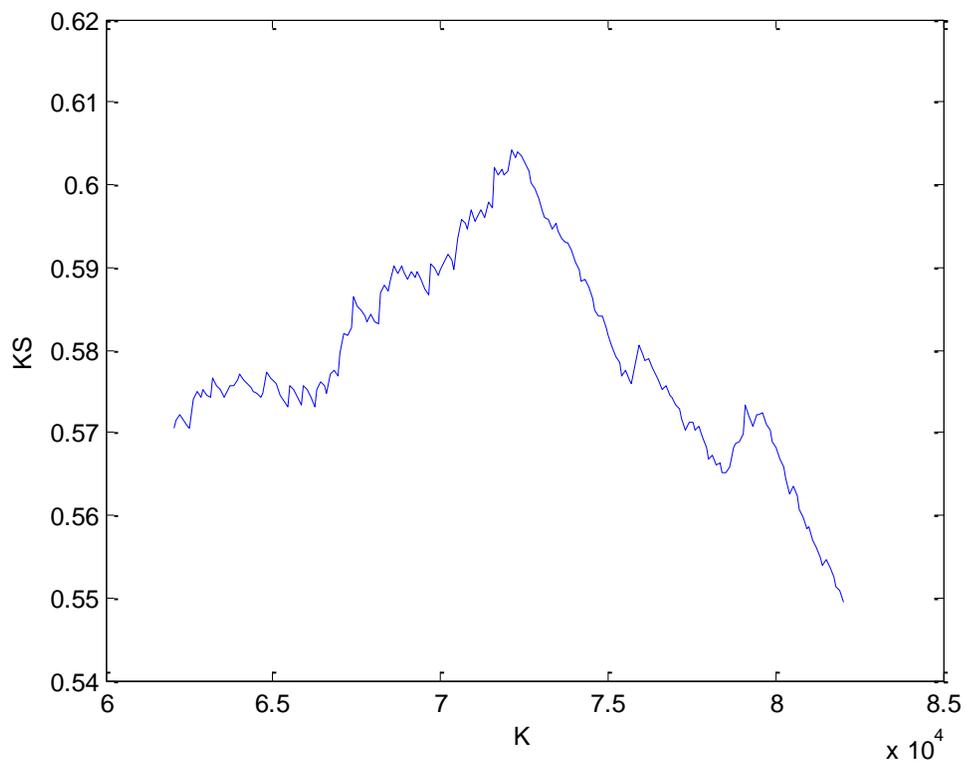
Tabla 2. Resultados obtenidos con 13 observaciones históricas para los modelos evaluados

Modelo	Varianza	KS
$dQ_t = \mu dt + \sigma dW_t$	Simple	0.5876
$dQ_t = \mu dt + \sigma dW_t$	EWMA	0.5801
$dQ_t = \sigma dW_t$	Simple	0.5850
$dQ_t = \sigma dW_t$	EWMA	0.6042

Fuente: Cálculos propios.

Para cada uno de los modelos anteriores, se consideró el KS resultante con el nivel K tal que maximiza dicho valor. El modelo que arrojó el mejor KS, de 0,6042, es el modelo calculado con varianza EWMA y sin media, considerando una serie histórica de 13 meses como base histórica para la simulación. Mediante el modelo de redes neuronales de perceptrón multicapa utilizado en la actualidad por el banco, para la misma serie de datos trabajada, se obtiene un indicador KS igual a 0,5929. En la gráfica 4 se muestran los resultados de KS obtenidos para los diferentes niveles de K definidos.

Gráfica 4. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 13 observaciones, varianza EWMA y sin media



Fuente: Cálculos propios.

4. Conclusiones

En este trabajo se evalúa el uso de un modelo estructural de riesgo de crédito para la toma de decisiones en créditos de consumo en una entidad financiera en Colombia. El modelo utilizado es planteado por de Andrade y Thomas (2007). En éste se aplican los modelos estructurales de créditos corporativos a créditos de consumo en Brasil mediante la sustitución del valor de los activos de la firma por un puntaje de comportamiento crediticio como variable proxy de la solvencia de cada individuo.

Se utilizan series históricas de puntajes de comportamiento crediticio para cada uno de los clientes de 25 meses y 13 meses anteriores al año de evaluación. Se encuentra que los mejores resultados se encuentran al utilizar la base de 13 meses. Con este resultado se concluye que para efectos de evaluar las probabilidades de incumplimiento de crédito en los próximos doce meses en créditos de consumo, es importante tomar historia reciente del comportamiento crediticio del individuo y que resulta mejor tomar el año anterior que dos años de historia.

Debido a la mayor importancia que tiene la historia más reciente, se evalúa la estimación de la varianza mediante el método de promedio móvil de ponderación exponencial. De nuevo se concluye que se obtiene mejor información sobre el comportamiento crediticio futuro de un cliente con la historia más reciente y que por ende es mejor calcular la varianza mediante el método de promedio móvil de ponderación exponencial para el uso del modelo estructural.

Los resultados obtenidos mediante el uso del modelo estructural sin media y calculando la varianza mediante promedios Móviles de ponderación exponencial, son

superiores a los resultados que los hallados mediante el modelo de redes neuronales utilizado. Mientras que en el modelo el KS es igual a 0,5929 el obtenido con el modelo estructural es igual a 0,6042, mostrando una diferencia de 0,0113 ó 1,13%. Sin embargo, es indispensable probar y validar el modelo planteado para diferentes muestras o portafolios de clientes ya que los resultados obtenidos son para un portafolio dado y por ende, los resultados obtenidos no pueden ser generalizados.

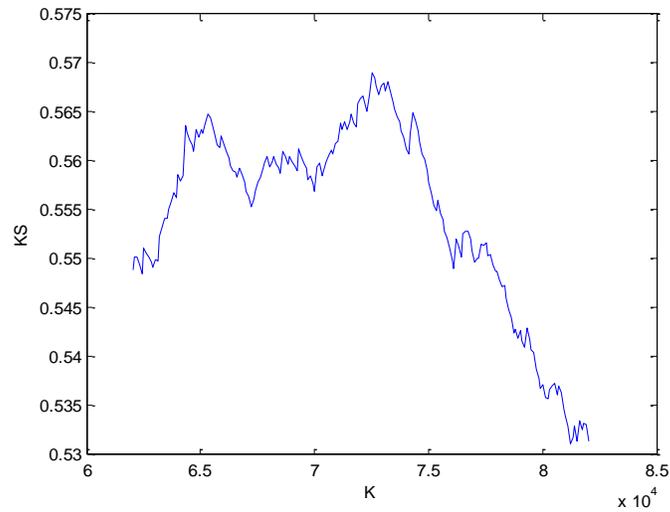
El trabajo realizado evalúa la simulación de la reputación como un proceso de difusión simple. Se abre el campo para la evaluación del modelo en Colombia proyectando la reputación de cada individuo como un proceso de difusión con saltos.

Por lo dicho anteriormente, este trabajo genera un aporte en el estudio y evaluación de modelos estructurales para créditos de consumo a través de la adaptación del modelo planteado por Merton (1974), y constituye un aporte importante en la investigación del uso de estos modelos mediante la evaluación del mismo para una serie de datos de un banco comercial en el mercado colombiano.

5. Apéndices

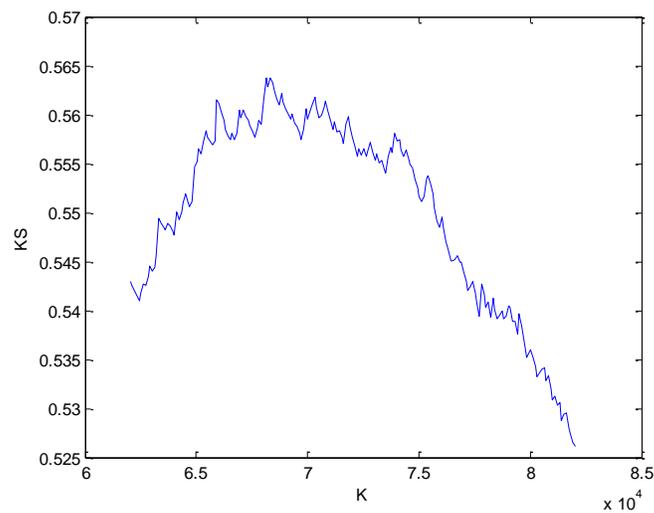
Apéndice 1. Gráficas de K vs. KS de modelos alternos

Gráfica A1. 1. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 25 observaciones, varianza EWMA y con media



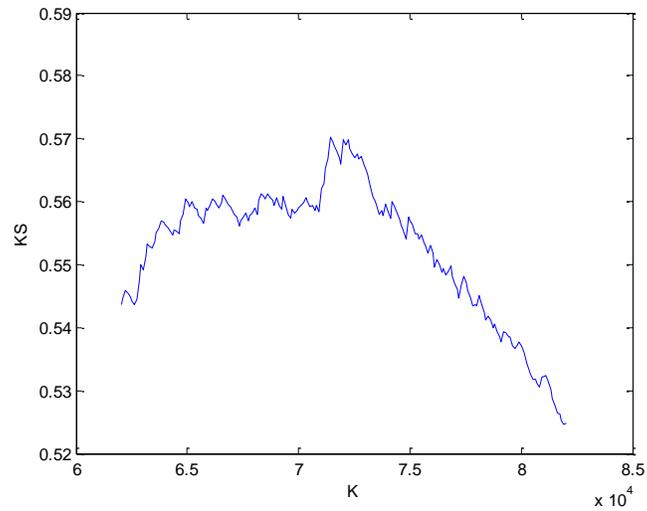
Fuente: Cálculos propios.

Gráfica A1. 2. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 25 observaciones, varianza simple y con media



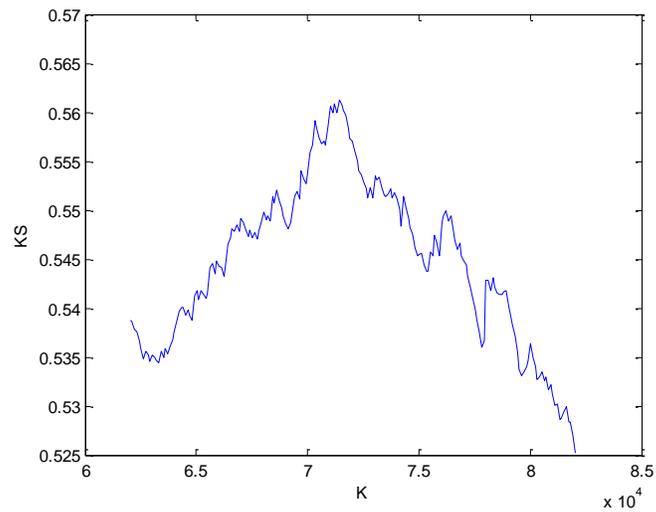
Fuente: Cálculos propios.

Gráfica A1. 3. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 25 observaciones, varianza EWMA y sin media



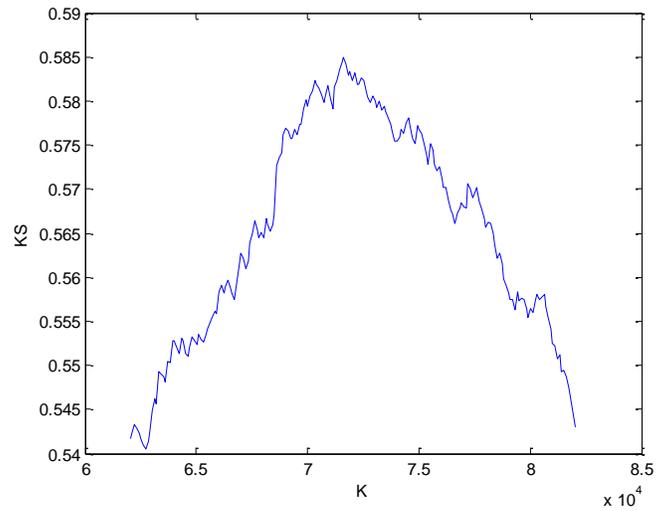
Fuente: Cálculos propios.

Gráfica A1. 4. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 25 observaciones, varianza simple y sin media



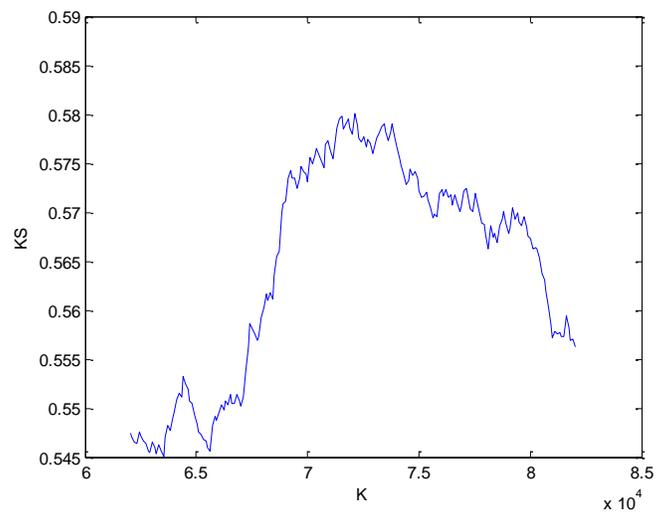
Fuente: Cálculos propios.

Gráfica A1. 5. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 13 observaciones, varianza simple y sin media



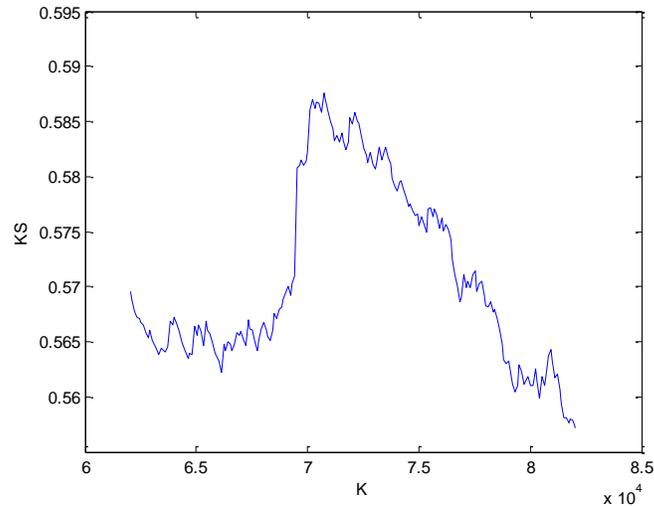
Fuente: Cálculos propios.

Gráfica A1. 6. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 13 observaciones, varianza EWMA y con media



Fuente: Cálculos propios.

Gráfica A1. 7. KS para cada nivel de K en el modelo calculado con 13 observaciones, varianza simple y con media



Fuente: Cálculos propios.

Apéndice 2. Código de programación del modelo en Matlab®

En la primera parte del código se extrae el vector de resultados en el cual se tiene el valor de 1 ó 0 para cada cliente, dependiendo de si incumplió o no en los doce meses siguientes a la fecha del último puntaje. Así mismo, se toman los puntajes de 13 (ó 25) meses anteriores para cada uno de los clientes. Este puntaje está expresado como una probabilidad de incumplimiento con lo cual se convierte a puntaje restando a la unidad dicha probabilidad y se multiplica este valor por 100.000 con el fin de tener los datos en una escala entre 1 y 100.000.

```

load data.mat;

clc;

resultado = data(:,27);
datascore = data(:,14:26);
matrizunos = ones(size(datascore,1),size(datascore,2));
datascore = matrizunos - datascore;
datascore = datascore.*100000;

```

Posteriormente se calculan los retornos, los retornos medios y las varianzas tanto simples como EWMA de cada uno de los clientes.

```

u=1;
v=1;
for u=1:size(datascore,1);
    for v=1:size(datascore,2)-1;

deltaXlog(u,v)=log(datascore(u,v+1)/datascore(u,v));
        end
    end

RetornosMedios=zeros(size(datascore,1),1);

u=1;
for u=1:size(deltaXlog,1);
    RetornosMedios(u,1)=
deltaXlog(u,:)*ones(size(deltaXlog,2),1);
end
RetornosMedios = RetornosMedios./size(deltaXlog,2);

%Cálculo de Varianza simple

u=1;
for u=1:size(deltaXlog,1);
    VarianzasSimples(u,1)= var(deltaXlog(u,:));
end
%Varianzas = VarianzasSimples; %Se abre cuando se usa
varianza simple

%Cálculo de Varianza EWMA

u=size(deltaXlog,2);
factorewma=zeros(size(deltaXlog,2)+1,1);
lambda = 0.94;
while u>0

```

```

        factorewma(size(deltaXlog,2)+1-u+1,1)=(1-
lambda)*lambda^(u-1);
        u = u-1;
    end
    factorewma(1,1)=lambda^(size(deltaXlog,2));

    retmed=zeros(size(ReturnosMedios,1),1);
    for a=1:size(deltaXlog,2);
        retmed=[retmed ReturnosMedios];
    end
    retmed=retmed(:,2:size(retmed,2));
    retm=deltaXlog-retmed;
    retcuad=retm.^2;
    ewma = [VarianzasSimples retcuad];
    Varianzas=ewma*factorewma;

```

Con el fin de proyectar los puntajes para los 12 meses siguientes de cada uno de los clientes se elabora una matriz XProy de $u \times v \times n$, donde u es igual a 10.000 y corresponde al número de clientes de la base de datos, v es igual a 12 y corresponde a las proyecciones de los puntajes evaluados y n corresponde al número de caminatas proyectadas para cada uno de los clientes, que en este caso es igual a 100. Así, se proyectan los puntajes mediante un proceso de difusión (con media o sin media).

%SIMULACIÓN DE LAS SERIES

```

n = 100;%número de iteraciones
for i=1:n;
    XProy = zeros(size(datascore,1),12,n);
    XProy1 = datascore(:,size(datascore,2));
    u=1;
    v=1;
    for u=1:size(datascore,1);
        for v=1:12;

            %XProy(u,v,n)=XProy1(u,1)*exp((ReturnosMedios(u,1)-
(1/2)*Varianzas(u,1))*(v)+Varianzas(u,1)^(1/2)*((v)^(1/
2))*normrnd(0,1));
            XProy(u,v,n)=XProy1(u,1)*exp((-
(1/2)*Varianzas(u,1))*(v)+Varianzas(u,1)^(1/2)*((v)^(1/
2))*normrnd(0,1));
        end
    end
end
end

```

Posteriormente se calcula la probabilidad de incumplimiento para cada uno de los clientes para diferentes niveles de K y se calcula el KS para cada nivel con el fin de encontrar el K tal que maximiza el KS. En este caso se evalúa el modelo para niveles de K entre 62.023 y 82.023, variando de 100 en 100 el nivel de K. Previamente se evaluó que los niveles inferiores a 62.000 y superiores a 83.000 arrojan resultados de KS que se encuentran lejos de los niveles encontrados entre el rango determinado.

```

%CALCULO DE PROBABILIDADES SEGÚN K

aviso = 2

e=62023;
f=100;
g=82023;
vectorKKS = zeros((g-e)/f,2);
h=e;
l=1;
ProbabilidadesK = zeros(size(XProy,1),1);

for K=h:f:g

Prob = zeros(size(XProy,1),1);
for d1=1:size(XProy,1)
    contador1=0;
    for d2=1:n
        if min(XProy(d1,:,d2))<K;
            contador1 = contador1 + 1;
        else
            contador1 = contador1;
        end
    end
    Prob(d1,1)= contador1;
end
Prob = Prob./n;

ProbabilidadesK = [ProbabilidadesK Prob];

```

Para el cálculo del KS se convierten las probabilidades de incumplimiento encontradas en puntaje mediante la diferencia entre uno y el valor de la probabilidad hallada. Así mismo, se construye la función ks, la cual se explica en el anexo 2. Se

construye el vector `vectorKKS` donde se almacenarán los niveles de `K` evaluados y su respectivo `KS`.

```

vectorunos = ones(size(Prob,1),size(Prob,2));
puntaje = vectorunos-Prob;
ks=KS(puntaje,resultado);

vectorKKS(1,1)=K;
vectorKKS(1,2)=ks;
l=l+1;
end

```

Una vez se tiene el vector `vectorKKS` se calcula encuentra el `KS` máximo y el nivel `K` mediante el cual se obtuvo este `KS`. Para análisis posteriores se construye la matriz `ProbabilidadesK`, la cual almacena los valores de `K` evaluados con su `KS` asociado y la probabilidad calculada para cada cliente con este nivel de `K`. Además, se grafica el `KS` para los diferentes niveles de `K`

```

MejorKS = max(vectorKKS(:,2))
b=vectorKKS(:,2);
[fila,col]=find(b==max(b));
MejorK = vectorKKS(fila,1)

ProbabilidadesK =
ProbabilidadesK(:,2:size(ProbabilidadesK,2));
ProbabilidadesKKS = vectorKKS';
ProbabilidadesK = [ProbabilidadesKKS;ProbabilidadesK];

plot(vectorKKS(:,1),vectorKKS(:,2))
xlabel('K');
ylabel('KS');

```

Apéndice 3. Código de programación de la función ks en Matlab®

La función pide como datos de entrada los puntajes dados para cada cliente por cualquier modelo de clasificación de riesgo y el resultado en cuanto a si cumplió o incumplió con la obligación durante los 12 meses siguientes al puntaje. Inicialmente se calcula el número de clientes malos, nm , y el número de clientes buenos, nb . En una matriz de 10.000×2 se almacenan en la primera columna los puntajes dados y en la segunda columna el resultado dado para cada cliente. Mediante una función ordenar, se ordena esta matriz de la menor a la mayor probabilidad dada y así se calculan las funciones de distribución acumulada de los puntajes de los clientes que cumplen (clientes buenos) y los clientes que incumplen (clientes malos). Así, se calcula la distancia entre ambas funciones y se identifica la distancia máxima encontrada.

```
function ks = KS(Prob,resultado)

nm=dot(resultado,resultado); %número de clientes malos
nb=size(Prob,1)-nm; %número de clientes buenos
w = [Prob resultado];
w = ordenar(w);
y=zeros(size(w,1),4);
w = [w y];
if w(1,2)==0
    w(1,3)=0;
    w(1,4)=w(1,3)/nm;
    w(1,5)=1;
    w(1,6)=w(1,5)/nb;
else %si w(1,2)=1
    w(1,5)=0;
    w(1,6)=w(1,5)/nb;
    w(1,3)=1;
    w(1,4)=w(1,3)/nm;
end

for i=2:size(w,1)
    if w(i,2)==0
        w(i,3)=w(i-1,3);
        w(i,4)=w(i,3)/nm;
```

```
        w(i,5)=w(i-1,5)+1;
        w(i,6)=w(i,5)/nb;
    else %si w(i,2)=1
        w(i,5)=w(i-1,5);
        w(i,6)=w(i,5)/nb;
        w(i,3)=w(i-1,3)+1;
        w(i,4)=w(i,3)/nm;
    end
end

w = [w zeros(size(w,1),1)];
for i = 1:size(w,1)
    w(i,7)=abs(w(i,6)-w(i,4));
end

fb=[w(:,1) w(:,6)];
fm=[w(:,1) w(:,4)];
dif=w(:,7);
ks = max(dif);
```

6. Bibliografía

Athreya, K. (2004). Shame as it ever was: stigma and personal Bankruptcy. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly Volume 90 (2)* .

Avery, R. B., Calem, P. S., & Canner, G. B. (2004). Consumer credit scoring: do situational circumstances matter? *BIS working paper* , Bank for International Settlements.

Caicedo, E., Claramunt, M. M., & Casanovas, M. (2011). Medición del riesgo de crédito mediante modelos estructurales: una aplicación al mercado colombiano. *Cuaderno de Administración Working paper* , 73-100.

Correa, A., & González, A. (2011). Evolutionary algorithms for selecting the architecture of a MLP neural network: a credit scoring case . *11th IEEE international conference on data mining workshops* , 725-732.

de Andrade, F. W., & Thomas, L. (2007). Structural models in consumer credit. *European journal of operational research 183* , 1569-1581.

Jarrow, R. A., & Protter, P. (2004). Structural versus reduced form models: a new information based perspective. *Journal of investment managment, Vol 2, No. 2* , 1-10.

Jarrow, R. A., & Turnbull, S. M. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *The journal of finance, Vol. 50, No. 1* , 53-85.

Laredo, A., Pedroso, A. C., & Okaze, S. M. (2012). Análisis empírico de los indicadores KS y ROC. *Tecnología de Crédito* , 80, 8-19.

Longhofer, S. D., & Peters, S. R. (2004). Self-selection and discrimination in credit markets. *working paper* .

Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of finance, 29* , 449-470.

Saunders, A., & Altman, E. I. (1998). Credit risk measurement: Developments over the last 20 years. *Journal of Banking & Finance 21* , 1721-1742.

Thomas, L. C., Edelman, D. B., & Crook, J. N. (2002). *Credit Scoring and Its Applications* (1 ed.). Philadelphia, PA, The United States of America: Society of Industrial and Applied Mathematics.

Thomas, L. (2006). Credit scoring: the state of the art. *Foresight* , 33-37.

Vasicek, O. A. (1991). Limiting loan loss probability Distribution. KMV Corporation.

Vasicek, O. A. (2002). The distribution of loan portfolio value. *Risk* , 1-10.

Venegas, F. (2008). Riesgo de Crédito y Derivados de Crédito. In F. Venegas, *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, Segunda edición* (pp. 751-783). México D.F.: Cenage Learning Editores S.A. de C.V.

Zhou, C. (1997). A jump-diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities . *Working paper* , Federal Reserve Board.