Optimización de portafolios en renta variable, comparación Markowitz y Black Litterman

Presentado por

Nataly Monroy López

Aida Constanza Pérez Cortes

Maestría en Finanzas Corporativas

Colegio de Estudios Superiores de Administración –CESA-

Bogotá

2021

Optimización de portafolios en renta variable, comparación Markowitz y Black Litterman

Presentado por

Nataly Monroy López

Aida Constanza Pérez Cortes

Director:

Bernardo León Camacho

Maestría en Finanzas Corporativas

Colegio de Estudios Superiores de Administración –CESA-

Bogotá

2021

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS EN RENTA VARIABLE, COMPARACIÓN MARKOWITZ Y BLACK LITTERMAN

"Quantitative asset allocation models have not played the important role they should in global port- folio management. A good part of the problem is that such models are difficult to use and tend to result in portfolios that are badly behaved."

Fischer Black and Robert Litterman.

RESUMEN

La teoría clásica de portafolios de Harry Markowitz es un referente de la teoría básica para la construcción de portafolios. Sin embargo, en el trascurso del tiempo ha tenido críticas por los supuestos que plantea la metodología, lo cual ha generado el desarrollo de diversos modelos que permiten la selección de portafolios óptimos; entre estos, Fischer Black y Robert Litterman desarrollaron un modelo que parte del modelo clásico de Markowitz e incluye las opiniones del mercado.

En este trabajo aplicaremos ambas teorías a una canasta de acciones seleccionadas del índice Russell 3000, compararemos e identificaremos cuál de las dos metodologías ofrece una mayor flexibilidad para que el administrador del portafolio tome la mejor decisión.

Palabras Clave: Optimización de portafolios, Harry Markowitz, Black Litterman, estadística bayesiana, optimización inversa, views del mercado, precios históricos.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del Problema

Actualmente, los distintos inversores presentan inconvenientes al momento de seleccionar distintos instrumentos para la construcción de portafolios financieros, puesto que al realizar dicha elección de manera empírica se deja a un lado una infinidad de características dadas por su comportamiento en el mercado.

Generalmente, cuando se hace una elección de activos con las metodologías planteadas en los optimizadores de desempeño, estas asumen una distribución normal, cuando por lo general estos activos no se comportan de dicha manera en la práctica financiera. Por lo tanto, la aplicación de algunos modelos permite que se tengan en cuenta factores diferentes.

La implicación de no poder incorporar todos los sucesos, eventos y comportamientos de las industrias y demás factores endógenos como exógenos dados a las inversiones hace que se produzca una subvaloración del riesgo asumido en una inversión al momento de seleccionar distintos activos dentro de una canasta de renta variable.

Al aplicar modelos de optimización que permitan obtener mejores resultados y las decisiones no se basen solo en la experiencia, surge la teoría moderna de portafolios desarrollada inicialmente por Harry Markowitz. (1952)

La teoría de portafolios se ocupa principalmente de la construcción de portafolios óptimos con razonable aversión al riesgo y de sus implicaciones sobre los rendimientos y precios de los diferentes activos (Grajales, 2009). Esta teoría parte de supuestos que asumen que los mercados son completos, perfectos y eficientes; es decir, que no existen costos de transacción, que los inversionistas tienen libre acceso a la información y la interpretan de manera similar (Grajales, 2009). Sin embargo, diferentes estudios han mostrado que las personas al momento de invertir muchas veces lo hacen influenciados por sus emociones, la cultura o por un sentido de la moda. Es por esto que el modelo propuesto Markowitz no resulta confiable al momento de evaluar los resultados, por otra parte, también presenta poca practicidad en la estimación de los beneficios de la diversificación.

De acuerdo con Fisher Black y Robert Litterman el modelo de Markowitz indica que "cuando los inversionistas no imponen restricciones, el modelo arroja grandes posiciones cortas en varios activos. Cuando se imponen restricciones que impiden posiciones cortas, el modelo propone soluciones de esquina con peso nulo en varios activos como también pesos irracionalmente grandes en activos con poca capitalización de mercado". Así mismo para Grajales es un modelo de un solo periodo, que no se ajusta a problemas multiperiodo con largos horizontes, no plantea información acerca de cuándo comprar o vender un determinado activo y es considerada una herramienta más de selección de activos que de administración y monitoreo.

Por lo anterior, surgen diversos modelos que buscan portafolios más eficientes y ayudan a la toma de decisiones cuando se tiene una canasta de activos financieros, evaluando siempre la relación rentabilidad y riesgo. Al revisar otros modelos propuestos surge el modelo Black Litterman desarrollado por Fischer Black y Robert Litterman (1.992) en el cual proporcionan una solución a dos grandes problemas que presentan los modelos cuantitativos para la selección de activos. Primero, los retornos esperados son muy difíciles de estimar y los inversores optan por obtener *views* de supuestos auxiliares que toman rendimientos históricos que no son eficientes para calcular los futuros rendimientos.

Segundo, la cartera óptima generada por el modelo, dada la sensibilidad a los rendimientos esperados, no tiene ninguna relación con los *views* que el inversionista desea expresar (Black & Litterman, 1992).

Black & Litterman lograron establecer un modelo que estima los rendimientos de los activos incorporando conocimiento *a priori* en la estimación de los modelos, combinando la información histórica y las opiniones del mercado para obtener los rendimientos esperados de los activos ya que no se puede asegurar en el futuro que el portafolio se va a comportar como lo hizo en el pasado, los datos pretéritos no capturan eventos contemporáneos a nivel social, político, económico o algo más estructural como la pandemia actual.

Dado lo anterior, este trabajo implementa la metodología de Markowitz y Black Litterman (1992) para la selección de un portafolio óptimo, dada una canasta de acciones elegida del índice Rusell 3000, con el objetivo de identificar qué bondad ofrece aplicar una metodología sobre la otra.

2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿De qué manera se puede aplicar un modelo que ofrezca mejor bondad al administrador de portafolio, a la hora de tomar decisiones en la selección de activos, teniendo en cuenta las expectativas de los inversionistas sobre el futuro en el comportamiento de las acciones?

3. HIPÓTESIS

Esto se puede lograr mediante introducción de métodos bayesianos, que permiten obtener las probabilidades de hipótesis condicionadas a las evidencias que se conocen.

La principal ventaja del modelo Black Litterman frente al modelo de Markowitz es que permite incluir las opiniones del mercado, para unirlas con el conocimiento empírico y los datos históricos, permitiendo dar un mayor o menor peso al activo dentro del portafolio. Así se logra una mejor diversificación en el portafolio, se evitan las soluciones de esquina y se pueden incorporar eventos contemporáneos que se ven reflejados en los índices de desempeño.

4. OBJETIVOS

General:

Identificar cuál de las metodologías aplicadas en este trabajo brinda mejores indicadores que permitan una selección optima de portafolio.

Específicos:

1. Analizar las teorías de portafolio Markowitz y Black Litterman.
2. Aplicar las metodologías de Markowitz y Black Litterman (estadística bayesiana) al portafolio seleccionado de acuerdo con unos criterios de selección establecidos de análisis fundamental.
3. Comparar los índices de desempeño Sharpe, Treynor, Alfa de Jensen, Information Ratio y Sortino en cada una de las metodologías aplicadas (Markowitz y BL).
4. Definir cuál de las dos metodologías permite una mayor bondad al administrador de portafolios a la hora de seleccionar un portafolio de activos, de acuerdo con los resultados obtenidos.

5. ESTADO DEL ARTE

Hoy por hoy, las inversiones están enmarcadas bajo el avance de la teoría de portafolios con el único fin de conseguir una diversificación optima que permite relacionar los principales conceptos que sustentan cada una de estas teorías denominadas Riesgo y Retorno. En los últimos 79 años muchos economistas, financieros, estadistas, catedritas y matemáticos han contribuido con lo que en la actualidad se conoce como la teoría moderna de portafolio, representados inicialmente por: *Markowitz* con su artículo publicado en la década de los cincuenta ("Portfolio Selection", 1952), donde se asocia el riesgo con el rendimiento como un conjunto de combinaciones que genera portafolios eficientes y óptimos fundamentando su modelo en el cálculo del rendimiento y del riesgo (media – varianza), Fischer Black y Robert Litterman (1992) que parten del modelo de Markowitz e incluyen las perspectivas de las rentabilidades utilizando estadística bayesiana, *Matsumura y Kakinoki* (2014) los cuales determinan una combinación óptima de activos que constituyen un portafolio y calculan la tasa de inversión utilizando un algoritmo genético multi-objetivo que optimiza la estrategia comercial y hasta encontrar a Ruiz y Suarez en el año 2015 con los avances más actuales en los aspectos relacionados con la optimización del portafolio destacando algunas nuevas tendencias y exponiendo algunos trabajos de la literatura reciente sobre optimización.

En 1952 Harry Markowitz presenta una nueva manera de hacer portafolios, la cual denominó carteras eficientes, para lo cual se hace necesario combinar activos que optimicen la relación entre el riesgo y el rendimiento lo cual denominó frontera eficiente. Para lograr obtener un portafolio optimo se busca que la correlación de los activos que lo integran sea menor a cero y así compensar las pérdidas de uno con las ganancias del otro instrumento.

La diversificación de la cartera fue el mayor aporte realizado por Markowitz y ha logrado ser acogido en la teoría, pero en el transcurso del tiempo esta teoría ha tenido que enfrentar la evolución del mercado lo que ha permitido el desarrollo de diversos modelos que incluyen nuevas metodologías, tecnología y hallazgos que permiten mejores pronósticos sin llegar a predecir por completo el comportamiento de la cartera ya que el mercado de capitales es volátil y la realidad contemporánea en donde algunos supuestos planteados no pueden ser aplicados como: a) los inversionistas son razonables, los inversionistas están influenciados por factores como la cultura, las emociones y el entorno en el que se encuentra; también se considera que en los mercados financieros existen modas, b) los mercados son perfectamente eficientes, existen restricciones para la configuración de portafolios al no contar siempre con la posibilidad de comprar o vender los activos que libremente deseen. (Grajales, 2009)

Por otra parte, el modelo tiene desventajas como lo afirman Michaud, 1989 y Haugen, 1993, quienes consideran que al utilizar series de rentabilidades históricas en la estimación de los retornos esperados genera portafolios con baja diversificación y alto riesgo para lo cual proponen aplicar un límite porcentual en el momento de distribuir los recursos que se van a invertir en cada uno de los títulos.

Entre 1964 y 1966 se desarrolla el modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) por William Sharpe, John Lintner y Jan Mossin, el cual resuelve el problema de la estimación de los beneficios de la diversificación de Markowitz. El modelo permite maximizar cada uno de los activos que componen el portafolio generando un portafolio más rentable, para lo cual se incluye el parámetro β el cual es un índice de componente de riesgo de mercado.

Torres en su trabajo de investigación (Optimización de portafolios: Una aplicación del Modelo Black-Litterman para el mercado integrado latinoamericano 2009-2014, 2014) propone la aplicación del modelo para la optimización de portafolios óptimos aprovechando la integración de mercados de renta variable entre Chile, Perú y Colombia. Para esto toma como base diez acciones con mayor capitalización en el MILA. En la aplicación del modelo tomó como horizonte de tiempo cinco años partiendo del 9 de mayo de 2009 al 9 de mayo de 2014; primero realizó la optimización a partir del modelo Markowitz en el que se pudo ver que el portafolio estaba altamente concentrado en cinco acciones de las diez que se habían analizado inicialmente, lo que demostraba el mayor problema de esta teoría. A su vez aplicó el modelo CAPM mostrando rendimientos más bajos que los históricos, y las ponderaciones del portafolio fueron menos concentradas. Por último, aplicó el modelo BL mostrando que las ponderaciones arrojadas fueron iguales a las del mercado, lo que soporta la teoría en la que se explica que, al tener dos fuentes de información distintas, como son el equilibrio del mercado y las predicciones de los inversionistas, y se pondera el portafolio tomando estos dos elementos, el inversionista analizará su estrategia tomando como base si las expectativas difieren o no a las del mercado. Al final concluyó que para mercados integrados como el MILA se debe tener en cuenta la estimación del tipo de cambio como parte de los views, ya que esto puede llevar a ser más rentable el portafolio o no; por otra parte, resaltó que la diversificación a través del vector de ponderación optimiza de mejor forma los portafolios sirviendo como una herramienta para la toma de decisiones en este tipo de mercados.

En el año 2014 Cruz Salazar (Aplicación del modelo Black-Litterman a la selección de portafolios internacionales) realiza un análisis a los portafolios internacionales, esta vez, desde el punto de vista de un inversionista que desea invertir en mercados extranjeros, pero teniendo en cuenta el tipo de cambio al que se ve expuesto, el cual se incluye como parte del riesgo. Tomó como modelo los mercados de Alemania, Brasil, España, Inglaterra y Estados Unidos. En estos se sitúa principalmente teniendo en cuenta el nivel de aversión al riesgo y el posible rendimiento que pueda obtener aplicando el modelo Black-Litterman. Entre los principales hallazgos pudo determinar que, en España, aunque los rendimientos al momento del estudio fueran negativos, un inversionista con predisposición al riesgo hubiera obtenido menores pérdidas que uno con aversión al riesgo, lo cual se presenta de la misma forma para el caso inglés y americano. Al final concluye que el modelo Black-Litterman permite identificar elementos que afectan al portafolio de inversión, a su vez permite enfrentar los problemas tradicionales de inversión de una manera sistemática y transparente, y permite al administrador de portafolio usar el modelo de manera iterativa hasta obtener resultados coherentes con sus expectativas.

Bernal en su trabajo de investigación (Black-Litterman vs. Markowitz: un ejercicio de optimización de portafolios de inversión en Colombia) selecciona datos y activos representativos colombianos en los que un fondo de pensiones obligatorias con riesgo moderado podría invertir, realiza optimizaciones mensuales tomando un periodo desde enero de 2010 hasta junio de 2012 bajo las metodologías de Markowitz y Black Litterman, este último con tres diferentes sets de views.

Para realizar la comparación de las metodologías utilizó los índices de Sharpe, Treynor y Alfa Jensen, también modelo los resultados bajo una función de utilidad que representara el perfil de un inversor de la cartera seleccionada. Dado que los resultados del modelo Black Litterman depende de los views construyó un índice de calidad de estos para realizar una comparación con la metodología de Markowitz.

Los resultados de su investigación, realizando un trabajo empírico para el mercado colombiano comprobaron su hipótesis de que el modelo Black Litterman predice portafolios más eficientes.

Es así como esta investigación permitirá la aplicación de un aporte realizado a la teoría de portafolios que no solo contará con información histórica si no que incluirá la experiencia y conocimiento de los inversionistas arrojando información mucho más precisa y estructurada que permita la toma de decisiones más acertada por parte del administrador de portafolios acercándose y siendo coherente con la coyuntura económica, política y social que se presenta en el momento.

Después de casi 7 décadas del gran aporte realizado por Markowitz en la teoría moderna de portafolios, hoy, gracias a la globalización y al avance de la tecnología se ha permitido realizar mejoras en el acceso de la información, en la inclusión de nuevas herramientas que permiten desarrollar modelos oportunos y eficaces.

6. MARCO TEÓRICO

6.1 Teoría de Portafolios de Harry Markowitz

Tiene como función la construcción de portafolios óptimos con razonable aversión al riesgo determinando la frontera eficiente que permite la selección de un portafolio con altos retornos a un riesgo dado y a una tasa de rendimiento específica, el riesgo puede medirse y reducirse al seleccionar adecuadamente un conjunto de activos que en conjunto presentan un riesgo bajo en comparación a la inversión en cualquier activo individual. Uno de los principales aportes de este modelo es la diversificación del portafolio y se basa directamente en la frase convencional “no poner todos los huevos en una sola canasta”.

Los principales supuestos de esta teoría son (Mangram, 2013):

1. Los inversionistas son razonables al tratar de maximizar sus rendimientos minimizando el riesgo
2. Los inversionistas están dispuestos a asumir un mayor riesgo si son compensados con mayores rendimientos.
3. Los inversionistas tienen la información pertinente y oportunamente al momento de tomar su decisión de inversión.
4. Los inversionistas pueden pedir prestado o prestar capital ilimitado a una tasa libre de riesgo.
5. Los mercados son perfectamente eficientes.
6. Los mercados no incluyen costos de transacción ni impuestos.
7. Es posible seleccionar acciones cuyo rendimiento individual es independiente de otras carteras.

Los conceptos "rendimiento" y "riesgo" aparecen con frecuencia en los escritos de finanzas. Por lo general, si el término "rendimiento" fuera reemplazado por "rendimiento esperado” o “rendimiento esperado” y “riesgo” por “variación del rendimiento ", poco se produciría un cambio de significado aparente. La varianza es una medida conocida de dispersión sobre lo esperado. (Portafolio Selection, 2007, pág. 89)

En resumen, en este modelo para encontrar el portafolio óptimo, se verifica por medio de los índices mencionados la mejor relación entre dos parámetros: Riesgo y rendimiento, en este punto se puede observar las acciones y el valor de la inversión:

$$\sigma_p^2 = W_A^2\sigma_A^2 + W_B^2\sigma_B^2 + W_C^2\sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_{A,B}$$

σ_p^2: Varianza del portafolio

$W_{A,B,C}$: Porcentaje del activo

$\sigma_{A,B,C}$: Varianza del activo

Siendo A, B, C los activos o carteras a evaluar para crear el portafolio óptimo.

Dentro de esta teoría se habla de dos tipos de riesgo: a) Riesgo Sistemático: Es externo a nivel macro y constante, es decir es una situación que puede pasar pero que el inversionista no tiene el control sobre ello, sin embargo, con impacto en casi todos los valores, ejemplo: cambio en las tasas de interés, niveles de desempleo, PIB. b) Riesgo no sistemático: Es específico para un activo o un grupo de activos a nivel micro y se debe reducir ejemplos: Calificación de una empresa, noticias negativas sobre la misma. Aunque no se puede desaparecer si "puede reducirse significativamente mediante la diversificación de valores dentro de una cartera. Dado que, en la práctica, los rendimientos de diferentes activos están correlacionados al menos en cierto grado, el riesgo no sistemático nunca se puede eliminar por completo, independientemente de cuántos tipos de activos se encuentren agregado en una cartera". (Mangram, 2013, pág. 62).

6.2 Teoría Moderna de portafolios

La teoría moderna de portafolios se ha venido desarrollando desde comienzos del siglo XX empezando por John Burr Williams (1938) el cual aseguraba que al invertir en varios títulos financieros se puede eliminar virtualmente el riesgo. Su modelo de descuento de dividendos estima las medias de los títulos financieros que son usados para un análisis de media y varianza.

Jacob Marschak (1938) expresó las preferencias por inversiones mediante curvas de indiferencia sobre el espacio de media y varianza, trató de construir una teoría ordinal de la elección bajo incertidumbre.

John Hicks (1935 – 1962) Introdujo en el análisis de portafolios el factor de riesgo y señaló que éste afectaba al periodo de inversión y al rendimiento neto esperado.

A pesar de incluir el riesgo en su análisis, no designó a la desviación estándar como una medida de su cuantificación.

D.H. Leavens (1945) ilustraba los beneficios de la diversificación en el supuesto de que los riesgos son independientes. Señaló que la diversificación entre compañías de una industria no puede proteger contra factores desfavorables que afectan a toda la industria; para ese propósito es necesaria una diversificación adicional.

Andrew Roy (1952) Propone que la elección de portafolio esté sujeto a la media y la varianza, pero acepta inversiones negativas y determina un portafolio óptimo.

James Tobin (1958) suponía que el inversionista busca una combinación de activos monetarios eficiente en media y varianza. Justificaba el uso del rendimiento y la desviación estándar como criterio sobre cualquiera de dos bases: las funciones de utilidad son cuadráticas o las distribuciones de probabilidades son de alguna familia biparamétrica de distribuciones de rendimientos. Su propósito primario era proporcionar una teoría mejorada de la tenencia de dinero.

William Sharpe (1964) en un equilibrio tipo CAPM, el rendimiento esperado de cada valor está relacionado linealmente con, y solo, con su beta.

6.3 Modelo CAPM

El modelo CAPM (Capital Asset Prising Model) es un modelo de valoración de activos de capital que permite conocer cuál es la rentabilidad esperada de un activo, cuando conocen su afectación por el riesgo sistemático (beta) Sharpe, Lintner y Mossin en 1964 formalizan y examinan el modelo de valuación de activos de capital o CAPM. A partir de entonces, si bien existe evidencia empírica y argumentos favorables y contrarios a la presente teoría, su utilización se encuentra ampliamente difundida en las finanzas". (Gastón Milanesi, 2004)

Supuestos teóricos

- ✓ Eficiencia en el mercado
- ✓ Mismo horizonte temporal de las operaciones de inversión
- ✓ Competencia perfecta ya que no incluye en los precios
- ✓ Los inversionistas se comportan de acuerdo con el modelo de media-varianza propuesto por Markowitz

Se estima la rentabilidad de cada activo en función de su riesgo para así obtener un estimado eficiente.

Rentabilidad Libre De Riesgo

Es la inversión hecha en un activo que se cataloga como riesgo igual a cero ($\beta = 0$), asegurando la rentabilidad como la devolución de la inversión principal. Ejemplo: Tasa que ofrecen los bonos del tesoro americano o los bonos alemanes.

Rentabilidad de mercado

Es una combinación de activos cotizados en el mercado y genera un poco más de riesgo que el anterior ($\beta = 1$),en finanzas el riesgo se conoce como la beta del activo.

Beta

Dentro del modelo el único riesgo que puede ser compensado es el "riesgo sistemático" por lo que se utiliza la beta como medida de la unidad de riesgo que se asume se espere como retribución. Entonces cuando:

($\beta = 1$) indica que el activo es igual de riesgoso al mercado,

($\beta > 1$) indica que el activo es mayor el riesgo que el mercado.

($\beta < 1$) indica que el activo es menos riesgoso que el mercado.

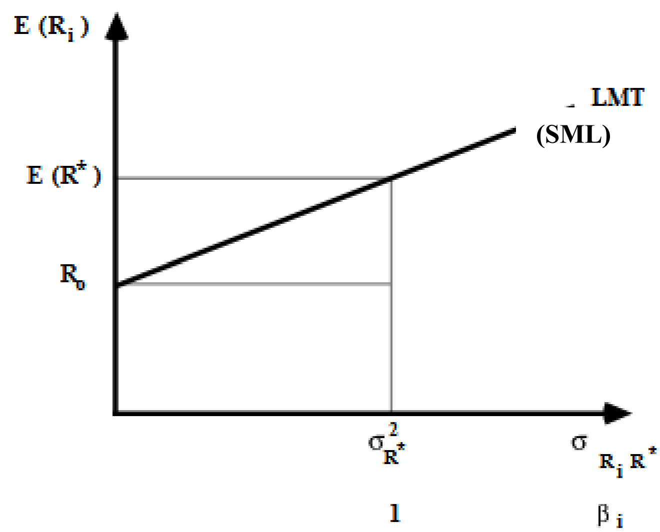
.

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R^*)}{VAR\ (R^*)}$$

"Es decir, como cociente entre la covarianza de la rentabilidad del título con el mercado y la varianza de rentabilidad de este último. Esta medida puede obtenerse en el llamado "Modelo de mercado", que propone un ajuste de regresión entre la rentabilidad del título y la correspondiente al mercado, en el que la pendiente del ajuste coincidiría con la mencionada beta". (Fernando Gómez -Bezares, 2004).

Línea del mercado de títulos

Es aquella cuyas coordenadas representan la rentabilidad esperada y el riesgo sistemático (coordenadas horizontales), en esta imagen se observa la línea que une la tasa de interés libre de riesgo, el riesgo sistemático de la cartera de mercado tocando el punto representativo de rendimiento. Por lo que esta grafica es la demostración fundamental de este Modelo.



Fuente: (Fernando Gómez -Bezares, 2004)

"Pero, en la medida en que el CAPM no se cumpliera exactamente en la realidad, los títulos aparecerían alrededor de la recta propuesta. Ello podría deberse a multitud de motivos, entre ellos el hecho de que la verdadera cartera de mercado es imposible de conocer, y trabajamos siempre con estimaciones de esta. Pero también podemos suponer que el mercado está equivocado, y no actúa eficientemente. Esto provocaría la existencia de títulos que quedan por encima de la recta (que, al rendir más de lo que cabría exigírseles en función de su riesgo sistemático, estarían infravalorados), y títulos que se sitúan por debajo de la recta (que estarían sobre valorados). Si aceptamos la lógica del modelo, y suponemos que esta situación se va a mantener en el futuro, deberíamos comprar los primeros y deshacernos de los segundos, constituyendo el CAPM una herramienta para la toma de decisiones en bolsa". (Fernando Gómez -Bezares, 2004).

La recta indica un equilibrio en el que los inversores se ubican por inferencia de la optimización de portafolios de activos libres de riesgo en el mercado.

"Partiendo del equilibrio general de mercado tenemos que el precio del riesgo, para el mercado en equilibrio es" (Gastón Milanesi, 2004):

$$R_p = \underbrace{R_f + \left(\frac{R_a - R_f}{\sigma(R_a)}\right)\sigma\left(R_p\right)}$$

Precio del riesgo para los activos eficientes.

"Los inversores al disponer de la posibilidad de diversificar sin incidencias significativas en costos de transacción, pueden eliminar fácilmente el riesgo único de cada activo. Entonces el rendimiento exigido a los activos, sean carteras eficientes o ineficientes, está determinado por el precio del riesgo en el mercado, amplificado o morigerado por la proporción de riesgo no diversificable contenida por el bien bajo examen". (Gastón Milanesi, 2004).

Según lo anterior, este modelo se puede utilizar como una herramienta de decisión a largo plazo ya que el porcentaje es creciente a medida que pasa el tiempo, aunque no sea muy alto en la actualidad y se puede interpretar como una mayor eficiencia del mercado.

"Probablemente la conclusión más notable que Sharpe sacó de sus premisas fue que en el modelo CAPM, el rendimiento esperado de cada valor es relacionado linealmente con su beta y solo su beta." (Markowitz, 1600–1960).

Es importante obtener información de las desventajas de este modelo, una de estas "es suponer que los inversionistas toman sus decisiones en un único período; en otras palabras, que la demanda por cualquier activo riesgoso i sólo dependa de su comportamiento, así como de la correlación con los otros activos. En la práctica se puede observar que los inversionistas, a veces, están más preocupados por el estado futuro del mercado financiero que por el mismo presente. Los agentes generan expectativas sobre los valores futuros de los retornos y con base en ellas programan una estrategia en la cual puedan arbitrar entre dos períodos". (MOLANO, 2006)

6.4 Estadística Bayesiana

Es un conjunto de técnicas estadísticas que se fundamenta en tener ideas relativas de la probabilidad que puede existir, la atención de las variables iniciales como variables aleatorias y la utilización del teorema de Bayes como método de actualización de la incertidumbre y la toma de decisiones.

El proceso de inferencia bayesiana consiste en analizar cómo la información inicial de muestra existente modifica dicha distribución de la probabilidad y del parámetro en el que se está interesado; la probabilidad no se entiende exclusivamente como la frecuencia relativa de un suceso a largo plazo, sino como el grado de creencia personal acerca de que el suceso se presente o pueda llegar a presentarse.

El teorema de Bayes fue desarrollado por Thomas Bayes en 1763 y se utiliza para calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, teniendo cierta información de antemano sobre este mismo suceso.

Se puede calcular la probabilidad de un suceso A, sabiendo además que ese A cumple cierta característica que condiciona su probabilidad. El teorema de Bayes entiende la probabilidad de forma inversa al teorema de la probabilidad total, el cual hace inferencia sobre un suceso B, a partir de los resultados de los sucesos A. Por su parte, Bayes calcula la probabilidad de A condicionado a B.

$$P\,(A_n/B) = \frac{P(B/A_n) * P(A_n)}{P(B)}$$

Donde,

$P(A_n/B)$: Probabilidad a posteriori

$P(B)$: Probabilidad total

$P(A_n)$: Probabilidad a priori

$P(B/A_n)$: Probabilidad condicional

Esta metodología a diferencia de la estadística frecuentista, en donde la probabilidad se interpreta como un límite de frecuencias relativas, tiene como finalidad actualizar el conocimiento combinando el conocimiento previo que se tiene sobre el tema de estudio e información empírica.

6.5 Modelo Black-Litterman

El modelo Black-Litterman propone una manera más eficiente de escoger los portafolios de inversión puesto que incorpora expectativas futuras las cuales deben ser tenidas en cuenta para la selección de portafolios, este surge debido a que el modelo anterior, según las criticas presentaba inconvenientes puesto que asume la estabilidad del mercado teniendo en cuenta solo riesgos y rendimientos “Los pesos de la cartera a menudo no son estables durante el tiempo pero cambia significativamente cada vez que la cartera se optimiza, lo que lleva a innecesaria rotación y aumento de los costos de transacción. “Estas carteras suelen presentar extrema participaciones ("soluciones de esquina") en algunas acciones mientras que otros valores tienden a llegar a cero”. (Frank Fabozzi, 2006).

Este modelo tiene como ventaja mitigar errores de estimación en el marco de la media varianza, por lo que se propone hacer una revisión comprensiva acerca del mercado para generar estrategias, se crea una ponderación entre la expectativa y el nivel de confianza del inversionista respecto a los activos, logrando así, un equilibrio en los portafolios relativamente estables en el tiempo.

Se representa como un modelo de asignación de activos pero es esencialmente un modelo para pronosticar los rendimientos esperados y una vez se conocen los rendimientos esperados se pueden utilizar técnicas de optimización estándar para llegar a la cartera esperada, determinando la optimización inversa para llegar a una estimación implícita de equilibrio, este también permite incorporar el punto de vista del inversor acerca de diversas acciones o activos que comprenden el portafolio seleccionado y construyendo confianza a partir de las opiniones del inversor para generar lo esperado en el vector de retorno.

“El modelo de Black-Litterman como versión mejorada del modelo Markowitz considera los siguientes aspectos: en el mercado existen *n* activos, con capitalizaciones $M = M_{1,} M_2 \ldots \ldots \ldots \ldots M_n$ y donde la capitalización de mercado es igual al número de títulos o unidades del activo disponibles en el mercado por su respectivo precio. Las ponderaciones de mercado de los n activos están dadas por el vector $W = W_{1,} W_2 \ldots \ldots W_n$ en donde la ponderación del activo i es” (Laura Giraldo Cardenas, 2015, pág. 7):

$$W_i = \frac{M_i}{\sum_{i=I}^{n} M_i}$$

$$Coeficiente\ de\ aversión\ al\ riesgo\ del\ inversionista = \delta$$

$$\delta = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M^2}$$

$$R_M = Retorno\ esperado\ del\ mercado$$

$$R_f = Tasa\ libre\ de\ riesgo$$

$$\sigma_M^2 = Varianza\ del\ retorno\ del\ mercado$$

$$Retornos\ implicitos\ de\ equilibrio = \prod$$

$$\prod = \delta \Sigma W$$

"Retornos Implícitos de Equilibrio, debido a que si los precios de los activos se ajustan hasta los retornos esperados, estos serán iguales a lo que creen los inversionistas, haciendo la suposición de que en general se tiene la misma expectativa de mercado; dichos ajustes hacen que la demanda iguale la oferta." (Laura Giraldo Cardenas, 2015, pág. 7).

La característica más importante del modelo es utilizar el proceso de "estimación mixta para ajustar todo el vector de rentabilidad esperada implícita de equilibrio del mercado con las opiniones de un inversor. Dado que los rendimientos de los valores están correlacionados, las opiniones sobre unos pocos activos implicarán, debido a estas correlaciones, cambios en los rendimientos esperados de todos los activos" (Frank Fabozzi, 2006, pág. 5)

Soluciones de Esquina: la diferencia entre la rentabilidad esperada y las previsiones de un inversor serán interpretadas como una oportunidad de arbitraje por parte de un optimizador de media – varianza, y dará lugar a carteras concentradas en unos pocos activos.

"Intuitivamente, cualquier error de estimación se extiende entre todos los activos, lo que hace que el vector de rentabilidad esperada de Black-Litterman sea menos sensible a los errores en vistas individuales. Este efecto contribuye a mitigar el riesgo de estimación y la maximización del error en el proceso de optimización". (Frank Fabozzi, 2006, pág. 5)

Modelo factorial

Este modelo permite simplificar la información a partir de una matriz de correlación, empleando diferentes tipos de varianzas realizando las diferencias entre un activo y otro, otra de sus características es fácil establecer una estimación de la varianza residual, por ejemplo, se muestra el siguiente ejemplo de modelo factorial.

$$R_i = \alpha_i + F\beta_i + \varepsilon_i, \;\; i \epsilon I$$

Donde $I \subset \{1,2 \ldots., N\}, F = (F_1, \ldots.., F_{K)}, \beta_i, \ldots, \beta_{iK}),$ y $K < N$.

Se establece que:

$$q_i = \begin{cases} \alpha + F\beta_i, & i \in I \\ 0, por\ otro\ lado \end{cases}$$

Y la confianza correspondiente

$$\omega_{ii}^2 = \begin{cases} var(\varepsilon_i), & i \in I \\ 0, por\ otro\ lado \end{cases}$$

La **P** matriz es definida por

$$p_{ii} = \begin{cases} 1, & i \epsilon I \\ 0, por\ otro\ lado \end{cases}$$

$$P_{ij} = 0, i \neq j$$

Dentro de la práctica se deben omitir todas filas de solo ceros, o anterior para obtener un rendimiento esperado en un portafolio largo y corto “La confianza de la opinión puede decidirse a partir de backtests, como describimos a continuación. Además, aquí la matriz P es una matriz 1 × N de unos y menos unos. El componente de columna correspondiente se fija en uno si el valor pertenece al grupo de los mejores resultados, o menos uno si pertenece al grupo de los que obtienen peores resultados”. (Frank Fabozzi, 2006).

El modelo de Black-Litterman se distribuye como una $N\left(\overline{\mu_{BL}}, \bar{M}^{-1}\right)$ normal

$$\overline{\mu_{BL}} = Media$$

$$\overline{\mu_{BL}} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\prod + P'\Omega^{-1}Q$$

$$\bar{M}^{-1} = Matriz\ de\ covarianza$$

$$\bar{M}^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

Ω = Matriz de covarianza diagonal

$$\Omega\ se\ distribuye\ de\ la\ siguiente\ manera\ = P\mu \sim N(Q, \Omega)$$

$Q = Vector\ de\ opiniones\ sobre\ retornos$

$$Q' = (q_1, q_2, .\ .\ .\ q_k)$$

$\tau = Escala\ de\ Incertidumbre\ del\ portafolio\ Inicial$

$P = Matriz\ de\ seleccion\ intrumentos\ de\ portafolio$

$$P' = (p_1, p_2, .\ .\ .\ p_k)$$

“A partir de la creación de un portafolio inicial de mercado y mediante el modelo de BL que se acaba de describir es posible construir un portafolio óptimo que considere las visiones y expectativas que se tienen sobre el desempeño futuro de los activos que lo conformarían; la selección de los pesos posteriores del portafolio se obtiene como” (Laura Giraldo Cardenas, 2015)

$$W_{BL} = (\delta \sum P)^{-1}\, \mu_{BL}$$

“Una vez se definen los pesos relativos de cada uno de los activos se obtiene la asignación óptima de recursos, de acuerdo con las expectativas del inversionista, determinando así el portafolio óptimo de acuerdo con el modelo BL”. (Laura Giraldo Cardenas, 2015)

El modelo es eficiente, sin embargo, no se tiene en cuenta el efecto de los impuestos y los costos de transacción, por otro lado “Se supone que el mercado es eficiente y que los precios reflejan toda la información disponible en cada momento y se ajustan rápidamente a todas las variables que podrían afectar el valor de los activos; además de considerar que los inversionistas son racionales" (Laura Giraldo Cardenas, 2015).

6.6 Indicadores de Desempeño de Portafolio

Índice de Sharpe.

Este indicador muestra por cada unidad de riesgo en la que se incurrió, cuál es el rendimiento promedio del portafolio, para lo cual, utiliza la desviación estándar de los rendimientos del portafolio.

$$S = (rp - rf)/\ \sigma p \quad , \text{ donde}$$

S: Índice de Sharpe.

rf: Rendimiento del activo libre de riesgo.

rp: Rendimiento del portafolio seleccionado.

σp: Desviación estándar del portafolio (Volatilidad).

Índice Treynor

Es un indicador que determina por cada unidad de riesgo en la que se incurrió cuál es el rendimiento del portafolio, y lo realiza tomando como medida de riesgo el Beta del modelo CAPM.

$$T = (rp - rf)/\beta \quad , \text{ donde}$$

T: Índice de Treynor.

rf: Rendimiento del activo libre de riesgo.

rp: Rendimiento del portafolio evaluado.

β: Beta del modelo CAPM (Riesgo de Mercado).

Índice de Alfa de Jensen

Este índice mide el exceso de rentabilidad, superior o inferior al obtenido por el modelo CAPM. Si el indicador alfa es positivo, se concluye que el administrador del portafolio tiene una rentabilidad por encima de su portafolio.

$$(rpt - rft) = \alpha p + \beta(rmt - rft) + \varepsilon t \text{ , donde}$$

rpt: Rendimiento del portafolio.

rft: Rendimiento del activo libre de riesgo.

rmt: Rendimiento del mercado.

β: Sensibilidad del portafolio a las fluctuaciones del mercado (Riesgo Sistémico).

εt: Termino del error, que se comporta como ruido blanco.

αp: Índice de Jensen.

Índice de Information Ratio

Este indicador mide la relación entre los rendimientos de la cartera y los rendimientos de su benchmark sobre la volatilidad de esos rendimientos. Refleja la capacidad del gestor para generar una rentabilidad por encima de su índice de referencia y además la intensidad con la cual ha generado el plus en un mes o en varios meses.

$$IR = (RP - RB) / TE \quad \text{, donde}$$

RP: Rendimiento del portafolio.

RB: Rendimiento del benchmark o índice.

TE: Tracking error (desviación estándar de la diferencia entre los rendimientos de la cartera y la rentabilidad del índice)

Un alto IR se puede lograr por tener un alto rendimiento en la cartera, la mínima rentabilidad del índice y un bajo Tracking Error.

Índice de Sortino

A raíz del Sharpe Ratio, Sortino y Price en 1994 propusieron un nuevo indicador que incorpora el nivel de riesgo del fondo evaluado para generar un ranking que no solamente tenga en cuenta el desempeño actual sino la capacidad del administrador del fondo de mantener un perfil de riesgo adecuado que le asegurará una alta probabilidad de rendimientos futuros positivos.

Según Ashraf Chaudhry y Helen Johnson en su paper “The efficacy of the Sortino Ratio and Other Benchmarked Performance Measures under skewed return distribution”, Sortino y Price plantearon que la evaluación del desempeño de los fondos debe tener en cuenta un “mínimo retorno aceptado (MAR)” el cual es un benchmark del mercado. Por lo cual “cualquier retorno por debajo del MAR producirá retornos desfavorables mientras que retornos por encima de MAR producirán buenos retornos. El riesgo está asociado únicamente con los malos retornos, por lo tanto, solo los retornos por debajo de MAR están asociados con el riesgo.” (Caudhry & Johnson, 2008).

Este indicador se popularizó como una medida de evaluación para los administradores de portafolio, los cuales son compensados por presentar aceptables niveles del Sortino Ratio ya que presentan altos niveles de retornos con una distribución de los excesos de los retornos sesgada positivamente.

Sortino ratio es entonces una medida para calificar la posibilidad de bajo desempeño de los fondos y está definido así:

$$\text{Sortino Ratio} = \frac{\bar{\propto}}{DD}$$

Donde $\bar{\propto} = r_{promedio} / r_{benchmark}$ y DD es:

$$DD^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(r_t - MAR)^2\, I(r_t \leq MAR)$$

7. METODOLOGÍA

Para el desarrollo de este trabajo elegimos el índice Russell 3000 ya que representa el 98% del mercado de acciones para inversión de Estados Unidos y se compone de 3.000 grandes empresas estadounidenses según lo determinado por capitalización de mercado (Bloomberg), se seleccionaron los siguientes criterios para elegir la canasta de acciones a las cuales se les aplicaran los modelos de Markowitz y Black Litterman.

El portafolio fue seleccionado de acuerdo con las siguientes características, tomando los indicadores en el periodo de un año:

- Los sectores menos afectados por la pandemia: Consumer staples, Health care y Technology.
- Market Cap > US 2000 millones
- Retorno de capital invertido > 1
- Deuda neta/EBITDA entre 0 y 2, indica la capacidad de contraer deuda adicional y de refinanciar la deuda que vence.
- ROE > 37.23, mide la rentabilidad que obtienen los propietarios de una empresa.
- P/E > 27.49, indica cuantas veces se está pagando el beneficio neto anual de una empresa al comprar una acción de esta.

Al seleccionar este stock picking arrojó como resultado 10 empresas de las cuales obtuvimos información de sus precios en el periodo de marzo del 2008 a agosto del 2020. En una primera etapa se calculan las rentabilidades en proceso continuo, después se determinan los promedios y la desviación estándar de estas, se construye la matriz de excesos en la que se visualiza la diferencia entre las rentabilidades observadas y los promedios. Enseguida desarrollamos la matriz de varianza-covarianza tomada de los resultados de la matriz de excesos y construimos el correlograma. Luego se establecen los pesos óptimos dentro del portafolio con acciones que presentan distribuciones gaussianas y que capturan las correlaciones de las mismas en un mundo de media varianza utilizando Solver, de ahí, hacemos uso del modelo CAPM y se calcula el rendimiento del portafolio utilizando el coeficiente de Sharpe y para mejor optimización al seleccionar el portafolio más eficiente para distintos niveles de riesgo, se puede construir una frontera de portafolios eficientes dentro del plano riesgo-retorno con Crystal Ball.

Posteriormente para contrastar el portafolio anterior y probar nuestra hipótesis vamos a utilizar el enfoque bayesiano para incorporar los views del mercado, concibiendo estos views como la creencia de los inversionistas sobre el comportamiento futuro de las acciones y realizar una optimización inversa teniendo en cuenta el tamaño de las compañías, el coeficiente de aversión al riesgo □□y la construcción de los retornos en exceso de equilibrio y haciendo uso del CAPM.

7.1 Datos

Generamos varios stock picking en donde algunos nos dieron solución de esquina, la cual se define como una solución en donde el dinero a invertir se concentra en un activo, llegando finalmente a un portafolio óptimo que presentamos a continuación.

Tabla 1.

Descripción de las acciones que componen el portafolio

S&P Global Inc.	Proporciona a los clientes servicios de información financiera. La empresa ofrece información sobre los ratings, benchmarks y análisis en mercados de materias primas y capital global. Opera en todo el mundo	SPGI US
VMware, Inc.	Ofrece soluciones de virtualización desde el escritorio hasta el centro de datos. Sus productos abordan una serie de problemas de TI, que incluye ineficacias de coste y operaciones, continuidad de negocios, gestión del ciclo de vida del software y gestión informática.	VMW US
Moody's Corporation	Es una empresa de Ratings, estudios y análisis de riesgo. Provee Ratings y estudios relacionados, datos y herramientas de análisis, medidas cuantitativas de riesgo de crédito, Software de estimaciones de riesgo, soluciones de gestión de cartera de crédito, Software de precios de valores y modelos de valuación.	MCO US

Brown-Forman Corporation	Fabrica, embotella, importa, exporta y comercializa una amplia variedad de marcas de bebidas alcohólicas. Sus productos incluyen whiskey, vodka, vino, tequila, burbon y gin.	BF/B US
The Clorox Company	Produce y comercializa productos de consumo principalmente a través de tiendas de abarrotes y otros minoristas. Ofrece artículos para limpieza del hogar, blanqueadores, carbón vegetal, piedras sanitarias para gatos, aderezos y salsas, cuidado personal natural y bolsas de residuos. Comercializa la mayoría de sus productos en Norteamérica y Latinoamérica.	CLX US
Mettler-Toledo International Inc.	Fabrica y comercializa instrumentos de pesar para uso en aplicaciones minoristas de laboratorio, industriales y alimentos. También suministra varias tecnologías relacionadas de análisis y mediciones. Presta servicios a clientes en todo el mundo.	MTD US
Broadridge Financial Solutions, Inc.	Brinda soluciones tecnológicas de terciarización para los sectores de servicios financieros. Ofrece una amplia gama de soluciones que ayudan a clientes a atender a sus clientes minoristas e institucionales durante todo el ciclo de vida de inversión, incluido el procesamiento antes, durante y después de las transacciones.	BR US
Citrix Systems, Inc.	Diseña, desarrolla y comercializa soluciones tecnológicas que permiten la distribución, compatibilidad e intercambio a solicitud de las aplicaciones. Desarrolla y comercializa soluciones integrales en todas las dimensiones de la virtualización de aplicaciones, servidores y escritorios, además de la optimización de aplicaciones y redes.	CTXS US
FactSet Research Systems Inc.	Entrega datos financieros y económicos de nivel mundial a analistas, ejecutivos bancarios de inversiones y a otros profesionales financieros. Combina bases de datos de múltiples proveedores en una sola fuente de información y análisis en línea, como datos fundamentales.	FDS US
Aspen Technology, Inc.	Suministra productos y servicios de software de optimización de procesos. Sus clientes se centran en energía, productos químicos, ingeniería y construcción, así como otras industrias que fabrican y crean productos de un proceso químico. Usan los productos para diseñar y operar sus plantas y gestionar sus cadenas de suministro.	AZPN US

Nota: Elaboración propia

Dando desarrollo al modelo de Markowitz, inicialmente calculamos las rentabilidades de todas las acciones con la siguiente formula:

$$LN\,\frac{precio\ actual}{precio\ anterior}$$

Después generamos una tabla con los promedios, desviación estándar (volatilidad) y beta de las 10 acciones, lo cual nos permitía evaluar desde un primer momento si el portafolio presentara una distribución poco óptima para el inversionista. El siguiente paso fue realizar una matriz de excesos, la cual calculamos tomando las rentabilidades observadas menos los promedios, esto será un puente hacia la matriz var-covar. Posteriormente generamos la matriz var –covar necesaria para calcular la volatilidad del portafolio y el índice de Sharpe, el cual nos indicará la relación entre la rentabilidad y la volatilidad del portafolio, por lo cual entre mayor sea Sharpe mejor será la relación riesgo-retorno.

Tabla 2.

Matriz de varianza - covarianza

	MATRIZ VAR-COVAR									
	SPGI US	VMW US	MCO US	BF/B US	CLX US	MTD US	BR US	CTXS US	FDS US	AZPN US
SPGI US	0,006385	0,003024	0,005854	0,001449	0,000657	0,002499	0,002998	0,002285	0,002133	0,002929
VMW US	0,003024	0,014772	0,003377	0,001582	-0,000032	0,001871	0,002398	0,005175	0,002832	0,003295
MCO US	0,005854	0,003377	0,008108	0,001682	0,000750	0,003021	0,003042	0,002700	0,002753	0,003460
BF/A US	0,001449	0,001582	0,001682	0,003519	0,000634	0,001599	0,001543	0,001369	0,001434	0,002369
CLX US	0,000657	-0,000032	0,000750	0,000634	0,002275	0,000913	0,000610	0,000805	0,000890	0,000339
MTD US	0,002499	0,001871	0,003021	0,001599	0,000913	0,005890	0,001428	0,002667	0,002046	0,003053
BR US	0,002998	0,002398	0,003042	0,001543	0,000610	0,001428	0,005184	0,001632	0,002524	0,002696
CTXS US	0,002285	0,005175	0,002700	0,001369	0,000805	0,002667	0,001632	0,008194	0,002342	0,002054
FDS US	0,002133	0,002832	0,002753	0,001434	0,000890	0,002046	0,002524	0,002342	0,005054	0,002770
AZPN US	0,002929	0,003295	0,003460	0,002369	0,000339	0,003053	0,002696	0,002054	0,002770	0,007888

Nota: Elaboración propia

En esta matriz la diagonal principal nos indica la varianza y los otros datos nos indica cómo se comporta una acción frente a la otra, entre mayor sea la covarianza, el portafolio será más riesgoso, ya que los inversionistas buscan acciones que no se relacionen para apalancarse en caso de que una de las acciones caiga.

En seguida tomamos los rendimientos como los promedios que inicialmente calculamos y las participaciones las distribuimos proporcionalmente en cada una de las acciones completando el 100% en el portafolio.

Tabla 3.

Ponderaciones sin optimización

PARTICIPACIONES	
ACCIÓN	**% DE PARTICIPACIÓN**
CLX US	10%
MTD US	10%
BR US	10%
SPGI US	10%
AZPN US	10%
FDS US	10%
CTXS US	10%
BF/B US	10%
VMW US	10%
MCO US	10%
Total	**100%**

Nota: Elaboración propia

Para obtener el índice de Sharpe utilizamos el modelo CAPM para lo cual necesitaremos la siguiente información:

[1]RF (Tasa libre de riesgo anual) = 0.12

RF (Tasa libre de riesgo mensual) = 0.00010

RP (Rentabilidad del portafolio)

$$R_p = R_f + \left(\frac{R_a - R_f}{\sigma(R_a)}\right)\sigma(R_p)$$

RP= 0.015

σ^2 (Varianza del portafolio) = 0.0019

σ (Volatilidad del portafolio) = $\sqrt{\sigma^2}$

$$\sigma = 0.044$$

[1] Tasa libre de riesgo tomada de la página web del tesoro americano https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/pages/textview.aspx?data=yield

β (Riesgo del portafolio)

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R^*)}{VAR\ (R^*)}$$

$$\beta = 0.76$$

Coeficiente de Sharpe

$$S = (rp - rf)/\ \sigma p$$

Con participaciones del 10% en cada una de las acciones el coeficiente Sharpe nos arrojó un valor de 0.30.

En relación con los rendimientos y su caracterización en las distribuciones de probabilidad utilizamos crystal ball, calculamos las participaciones de manera estocástica, distribuyendo el 100% en 8 acciones de las 10 seleccionadas al principio permitiendo obtener un portafolio diversificado con un nivel de Sharpe óptimo.

Tabla 4.
Ponderaciones optimizadas

PARTICIPACIONES	
ACCIÓN	% DE PARTICIPACIÓN
CLX US	31.56%
MTD US	17.66%
BR US	16.57%
SPGI US	15.37%
AZPN US	8.57%
FDS US	4.95%
CTXS US	3.03%
BF/B US	2.27%
VMW US	0.02%
MCO US	0.00%
Total	100%

Nota: Elaboración propia

El coeficiente de Sharpe aumenta a 0.34 y los rendimientos calculados son los siguientes para cada una de las acciones.

Tabla 5.

Rendimientos

RENDIMIENTOS	
ACCIÓN	RENDIMIENTO
AZPN US	2.1%
SPGI US	2.0%
MTD US	1.9%
BR US	1.6%
VMW US	1.6%
FDS US	1.5%
MCO US	1.4%
CTXS US	1.3%
BF/B US	1.2%
CLX US	0.9%

Nota: Elaboración propia

7.2 Aplicación Modelo Black Litterman

Para la aplicación del modelo Black Litterman, tenemos los siguientes views del mercado, los cuales se obtuvieron promediando los targets de precio dado por analistas estadounidenses.

Tabla 6.

Views del mercado

ACCIÓN	VIEWS DEL MERCADO
SPGI	4,9%
VMW	7,8%
MCO	9,0%
BF/B	20,2%
CLX	22,4%
MTD	-9,4%
BR	5,5%
CTXS	0,0%
FDS	4,1%
AZPN	-13,3%

Nota: Elaboración propia

$$\overline{\mu_{BL}} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\prod + P'\Omega^{-1}Q$$

$$Q = Vector\ de\ opiniones\ sobre\ retorno$$

Para el cálculo del vector de retorno de equilibrio $\prod$ de acuerdo con Trujillo "pueden derivarse también asumiendo que el mercado está en equilibrio y utilizando un método de optimización inversa en la que el vector de retornos en exceso implícitos es extraído de información conocida."

En la aplicación de nuestro portafolio el vector de retornos se calculó tomando la matriz de varianza – covarianza ya calculada para el modelo de Markowitz, que de acuerdo con Black Litterman se asume que la matriz de covarianza de la distribución de equilibrio es proporcional a la matriz de covarianza de los retornos históricos con el fin de simplificar los cálculos necesarios. A su vez tomamos el vector de pesos de capitalización de mercado y el coeficiente de aversión al riesgo para el cálculo del vector

Tabla 7.

Vector de retornos de equilibrio

Activo	Retorno de equilibrio
SPGI US	1.00%
VMW US	1.22%
MCO US	1.11%
BF/A US	0.45%
CLX US	0.18%
MTD US	0.63%
BR US	0.63%
CTXS US	0.76%
FDS US	0.60%
AZPN US	0.74%

Nota: Elaboración propia

Para la determinación del parámetro de confianza Tau, de acuerdo con Idzorek (2002) señala que para la aplicación del modelo de Black Litterman se centra entre 0.01 y 0.05, sin embargo, recomienda que el parámetro debería ser 1 debido a que es una constante que no importa el valor que asignemos no afecta el nuevo vector de retorno, de acuerdo con esto se determinó dejar este parámetro para la aplicación igual a 1.

Teniendo en cuenta los views mostrados anteriormente, tomamos un promedio de los retornos esperados separados por sectores para el cálculo de la matriz P, la cual selecciona los activos que hacen parte de un view.

Tabla 8.

Vector de opiniones Q

Sector	Acción	Promedio del potencial de retorno
Financiero	SPGI	7.23%
	MCO	
	BR	
Tecnologia	CTXS	9.68%
	VMW	
	FDS	
	AZPN	
Consumo	BF/B	4.10%
	CLX	
Manufactura	MTD	-13.30%

Nota: Elaboración propia

Tabla 9.

Matriz P

Views	SPGI	VMW	MCO	BF/B	CLX	MTD	BR	CTXS	FDS	AZPN
1	0.33	0.00	0.33	0.00	0.00	0.00	0.33	0	0	0
2	0	0.25	0	0	0	0	0	0.25	0.25	0.25
3	0	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Nota: Elaboración propia

Continuando con la aplicación del modelo, se procede con el cálculo de la matriz de confianza de las opiniones, en la que podemos observar de acuerdo con los resultados que existe una mayor confianza en los retornos esperados:

Tabla 10.

Matriz de confianza Ω

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.004829505 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.004552712 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001794837 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.005889814 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Nota: Elaboración propia

Teniendo la matriz de confianza y los demás insumos ya explicados, se puede calcular la nueva matriz de covarianzas:

Tabla 11.

Matriz de varianza - covarianza

	SPGI US	VMW US	MCO US	BF/A US	CLX US	MTD US	BR US	CTXS US	FDS US	AZPN US
SPGI US	0.003700915	0.001644775	0.002864353	0.000785234	0.000345876	0.001249533	0.001053274	0.001226126	0.000904217	0.001409987
VMW US	0.001644775	0.009687869	0.001730094	0.000716874	-2.44973E-05	0.000935317	0.001024349	0.002012363	0.000659424	0.000676979
MCO US	0.002864353	0.001730094	0.00476778	0.000986949	0.000369056	0.001510386	0.000869909	0.001415463	0.001319504	0.001679815
BF/A US	0.000785234	0.000716874	0.000986949	0.002247165	-0.000146483	0.000912358	0.000764357	0.000523511	0.000623862	0.001459275
CLX US	0.000345876	-2.44973E-05	0.000369056	-0.000146483	0.001635476	0.000456545	0.000293104	0.000547863	0.000542979	-6.55887E-05
MTD US	0.001249533	0.000935317	0.001510386	0.000912358	0.000456545	0.002944907	0.000714042	0.001333523	0.001023165	0.001526292
BR US	0.001053274	0.001024349	0.000869909	0.000764357	0.000293104	0.000714042	0.003689004	0.000666672	0.00148109	0.001452291
CTXS US	0.001226126	0.002012363	0.001415463	0.000523511	0.000547863	0.001333523	0.000666672	0.005983979	0.000780434	0.000105626
FDS US	0.000904217	0.000659424	0.001319504	0.000623862	0.000542979	0.001023165	0.00148109	0.000780434	0.00381374	0.001245516
AZPN US	0.001409987	0.000676979	0.001679815	0.001459275	-6.55887E-05	0.001526292	0.001452291	0.000105626	0.001245516	0.005975423

Nota: Elaboración propia

Posteriormente encontramos los siguientes resultados, en donde realizamos una comparación entre los modelos CAPM, Markowitz y Black Litterman .

Tabla 12.

Comparativo rentabilidades

	Histórico Promedio de rentabilidades	CAPM	Markowitz	Modelo BL
SPGI US	1,54%	0,68%	2,00%	3,68%
VMW US	0,82%	0,73%	1,58%	9,48%
MCO US	1,43%	0,80%	1,43%	3,97%
BF/A US	1,01%	0,47%	1,21%	2,91%
CLX US	0,92%	0,20%	0,92%	1,50%
MTD US	1,55%	0,66%	1,86%	-6,33%
BR US	1,38%	0,55%	1,65%	4,57%
CTXS US	1,23%	0,55%	1,31%	4,11%
FDS US	1,26%	0,63%	1,47%	3,93%
AZPN US	1,54%	0,78%	2,06%	3,48%

Nota: Elaboración propia

A continuación, presentamos los resultados por índices obtenidos en cada uno de los modelos

Tabla 13.

Comparativo modelos

INDICE	RESULTADO	
	MARKOWITZ	BLACK LITTERMAN
Sharpe	33,95%	92,79%
Traynor	1,97%	6,18%
Alfa de Jensen	1,00%	4,31%
Information Ratio	-2,31%	10,85%
Sortino	48,83%	145,8%

Nota: Elaboración propia

Analizando el índice de Sharpe arrojado con el modelo de Markowitz el cual nos dio un valor de 34% y el arrojado por el modelo Black Litterman que fue igual 93% podemos decir que con la implementación de las perspectivas obtenemos un ratio mayor de rentabilidad comparado con el riesgo que asumimos en la inversión.

Por otro lado, al medir Sortino, que tiene como denominador la semivarianza y la rentabilidad obtenida está en función de la dispersión de las caídas, lo cual lo hace diferente ya que toma la varianza y la desviación total, generando resultados de 48.83% con el modelo de Markowitz y de 145.8% con el modelo Black Litterman.

Observando los resultados obtenidos en el índice de Traynor identificamos que con Black Litterman se tiene un mejor grado de diversificación en el portafolio, comparando 1.97% que obtuvimos con Markowitz frente a 6.18% obtenido con Black Litterman, es decir que el portafolio está mejor gestionado.

Para el índice de Information Ratio confirmamos que el riesgo asumido en la inversión aporta una rentabilidad extra sobre la del índice aplicando el modelo Black Litterman, el cual arroja un valor de 10.85% en comparación a un Information Ratio de -2.31% que proyecta el modelo de Markowitz.

Al calcular el Alfa de Jensen con Black Litterman logramos obtener una rentabilidad mayor a la del mercado comparado con Markowitz en donde tenemos un indicador (Alfa de Jensen) del 1% y en Black Litterman de 4.31%, es decir, realizamos una buena gestión de administración del portafolio.

8. CONCLUSIONES

1. El modelo de Markowitz en la teoría de portafolios de inversión es un referente que desde el año 1952 revolucionó los mercados ya que introduce la medición del riesgo y rendimiento como parte fundamental para la creación de portafolios óptimos buscando diversificar la inversión, pero para desarrollar este modelo se utiliza información histórica a lo cual varios académicos señalaron que no era confiable ya que diferentes estudios muestran que las personas son influenciadas por sus emociones, cultura y coyuntura económica y social. Para resarcir esta situación, en 1992 Fischer Black y Robert Litterman crean su modelo a partir del modelo de Markowitz e incluyen las expectativas para lo cual utilizan el teorema de Bayes logrando, según para ellos, una manera más eficiente para la optimización y selección de portafolios.

2. Al realizar la comparación de los resultados de ambos modelos podemos concluir que el modelo Black Litterman al partir de un histórico de datos e incluir en su metodología los views (apoyados en la herramienta Bloomberg) del mercado presenta mejores resultados para el administrador de portafolios ya que le permite diversificar su portafolio obteniendo mayor rentabilidad al asumir un riesgo de 5.2%, el cual nos indica que está por debajo del riesgo del mercado.

3. La bondad que aporta Black Litterman en el estudio es que evita en un momento dado las soluciones de esquina que presentábamos con Markowitz al inicio de este trabajo.

9. REFERENCIAS

Balder, S. y Schweizer, N. (2016, December 25). Risk aversion vs. the Omega ratio: Consistency results. Finance Research Letters (21), 78 - 84.

Bernal, C. (2013). Black- Colombia. Litterman vs. Markowitz: un ejercicio de optimizacion de portafolios de inversión en Pontificia Universidad Javeriana.

Caporin, M., Costola, M., Jannin, G., & Maillet, B. (2016). On the (Ab)Use of Omega? Ca' Foscari University of Venice.

Cheung, W. (2009). The Black-Litterman model explained. Journal of Asset Management. Vol. 11.

Correa Morales, J. C. y Barrera Causil, C. J. (2018). Introducción a la estadística Bayesiana, Medellín, Colombia, Fondo Editorial ITM.

Drobetz, W. (2001). How To Avoid The Pitfalls In Portfolio Optmization? Putting The Black-Litterman Aproach At Work. FINANCIAL MARKETS AND PORTFOLIO MANAGEMENT, 59-75.

Fabozzi, F., Focardi, S. y Kolm, P. (2006). Incorporating trading strategiesin the Balck-Litterman Framework. The Journal of Trading.

Fishburn, P. C. (1977, Marzo). Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. The American Economic Review, 67(2), 116-126.

Hischer, B. y Litterman R. (1992). Global portfolio optimization. Financial Analysts Journal. Vol. 48.

Garay, U. (2010). La teoria moderna. Nuevos desafíos y oportunidades. Debates IESA. Vol. 15.

Grajales, D. (2009). Gestion de portafolios. Una mirada crítica más allá de Markowitz. Universidad EAFIT.

Gylfason, T. (2000). Natural Resources, education and conomic development. Centre for Economic Policy Research, 1-14.

Keating, C., y Shadwick, W. (2002). A Universal Performance Measure. THE FINANCE DEVELOPMENT CENTRE.

Keating, C., y Shadwick, W. (2002). An Introduction to Omega. THE FINANCE DEVELOPMENT CENTRE LIMITED.

Kraus, A., y Litzenberger, R. (1976). Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets. The Journal of Finance, 31(4), 1085 - 1100.

Le Sourd, V. (2007, January). Performance Measurement for Traditional Investments. EDHEC RISK AND ASSET MANAGEMENT RESEARCH CENTRE.

Leland, H. E. (2003). Beyond Mean - Variance: Performance Measurement in a Nonsymmetrical World. Financial Analysts Journal, 27 - 36.

López, R. (1994). The environment as a factor of production: The effects of economic growth and trade liberalization. Journal of Environmental economics and management.

Litterman, R. (2003). Modern Investment Management An Equilibrium Approach. Wiley Finance Series.

Mangram, M. (2013). A simplified perspective of the Markowitz portfolio theory. Suiza. SMC University.

Markowitz, H. (1952, Marzo). Portfolio Selection. The Journal of Finance, 7(1), 77 - 91.

Markowitz, H. M. (2010). Portfolio Theory: As I Still See It. Annual Review of Financial Economics, Vol. 2, 1-23.

Melnikoff, M. (1998). Investment Performance Analysis for Investors. The Journal of Portfolio Managemen, 25(1), 95 - 107.

Roy, A. (1952, July). Safety First and the Holding of Assets. ECONOMETRICA, 20, 431 - 449.

Seiler, C. M. (2012). Behavioral Finance and its Implication in the use of the Black-Litterman Model. The Journal of Real Estate Portfolio Management, 99-122.

Sinha, R. L. (2012). Modelling in the spirit of Markowitz portfolio theory in a non-Gaussian world. CURRENT SCIENCE, VOL. 103, 666-672.

Sortino, F., & Price, L. (1994). Performance Measurement in a Downside Risk Framework. The Journal of Investing, 3(3), 59 - 64.

Ziemann, L. M. (2007). Extending Black-Litterman Analysis Beyond the Mean-Variance Framework An Application to Hedge Fund Style Active Allocation Decisions. EDHEC RISK AND ASSET MANAGEMENT RESEARCH CENTRE, 3-15.

10. ANEXOS

PORTAFOLIO CON SOLUCIÓN DE ESQUINA

Tabla 14

Acciones que componen el portafolio

ORACLE CORP	ORCL US
LOCKHEED MARTIN CORP	LMT US
CATERPILLAR INC	CAT US
EBAY INC	EBAY US
CUMMINS INC	CMI US
BEST BUY CO INC	BBY US
AMERIPRISE FINANCIAL INC	AMP US
KLA CORP	KLAC US
OMNICOM GROUP	OMC US
HUNTINGTON INGALLS INDUSTRIES	HII US
SPIRIT AEROSYSTEMS HOLDINGS	SPR US
ROBERT HALF INTL INC	RHI US
CABOT OIL & GAS CORP	COG US
WILLIAMS -SONOMA INC	WSM US

Nota: Elaboración propia

Tabla 15

Matriz var-covar

	ORCL US	LMT US	CAT US	EBAY US	CMI US	BBY US	AMP US	KLAC US	OMC US	HII US	SPR US	RHI US	COG US	WSM US
ORCL US	0,00319592	0,001171089	0,00242846	0,00175117	0,00285004	0,00238739	0,00242031	0,00190531	0,0012826	0,00183139	0,001846	0,00185236	0,00108676	0,00156974
LMT US	0,00117109	0,002679861	0,0012345	0,00125204	0,00160549	0,00202967	0,00245132	0,00141433	0,00095859	0,00238695	0,00261626	0,00146135	-8,5959E-05	0,00187324
CAT US	0,00242846	0,0012345	0,00596663	0,00222233	0,00414741	0,00292657	0,0036188	0,00286405	0,00159877	0,00269987	0,00283575	0,00262346	0,00170405	0,0018422
EBAY US	0,00175117	0,001252036	0,00222233	0,00573806	0,00268903	0,0028932	0,00312973	0,00238768	0,00176888	0,00139343	0,00202801	0,00222611	0,00041386	0,00317599
CMI US	0,00285004	0,001605493	0,00414741	0,00268903	0,00584313	0,00431842	0,00392229	0,00234634	0,0020494	0,00263266	0,00269811	0,00317862	0,00183109	0,0029135
BBY US	0,00238739	0,002029672	0,00292657	0,0028932	0,00431842	0,01333407	0,00501238	0,00293371	0,00271416	0,00245575	0,00394129	0,00361281	0,00087655	0,00467442
AMP US	0,00242031	0,002451315	0,0036188	0,00312973	0,00392229	0,00501238	0,00727073	0,00301428	0,00285112	0,00382478	0,00554131	0,00465644	0,0008727	0,00484214
KLAC US	0,00190531	0,00141433	0,00286405	0,00238768	0,00234634	0,00293371	0,00301428	0,00625306	0,00159467	0,00226235	0,00223418	0,00304252	-0,00021523	0,00195469
OMC US	0,0012826	0,000958588	0,00159877	0,00176888	0,0020494	0,00271416	0,00285112	0,00159467	0,00325687	0,00187713	0,0033319	0,00229554	0,00080807	0,00228232
HII US	0,00183139	0,002386952	0,00269987	0,00139343	0,00263266	0,00245575	0,00382478	0,00226235	0,00187713	0,00598079	0,00365343	0,00277208	0,00059555	0,00216612
SPR US	0,001846	0,002616256	0,00283575	0,00202801	0,00269811	0,00394129	0,00554131	0,00223418	0,0033319	0,00365343	0,01416009	0,00446831	-0,00163341	0,00403908
RHI US	0,00185236	0,001461353	0,00262346	0,00222611	0,00317862	0,00361281	0,00465644	0,00304252	0,00229554	0,00277208	0,00446831	0,00655155	0,00138887	0,00385454
COG US	0,00108676	-8,59592E-05	0,00170405	0,00041386	0,00183109	0,00087655	0,0008727	-0,00021523	0,00080807	0,00059555	-0,00163341	0,00138887	0,00904532	0,0010331
WSM US	0,00156974	0,001873237	0,0018422	0,00317599	0,0029135	0,00467442	0,00484214	0,00195469	0,00228232	0,00216612	0,00403908	0,00385454	0,0010331	0,00851292

Nota: Elaboración propia

Inicialmente se distribuyeron las participaciones en proporciones iguales para completar el 100% en el portafolio, así:

Tabla 16

Participaciones

ACCIÓN	% DE PARTICIPACIÓN
LMT US	7.14%
ORCL US	7.14%
CAT US	7.14%
EBAY US	7.14%
CMI US	7.14%
BBY US	7.14%
AMP US	7.14%
KLAC US	7.14%
OMC US	7.14%
HII US	7.14%
SPR US	7.14%
RHI US	7.14%
COG US	7.14%
WSM US	7.14%
Total	**100%**

Nota: Elaboración propia

Con un coeficiente de Sharpe de 0.15, después se realizó la optimización y arrojó los siguientes resultados:

Tabla 17

Rendimientos

ACCIÓN	RENDIMIENTO
LMT US	1.62%
BBY US	1.53%
KLAC US	1.30%
AMP US	1.18%
HII US	1.15%
EBAY US	1.04%
SPR US	0.80%
RHI US	0.67%
CMI US	0.61%
ORCL US	0.48%
WSM US	0.44%
CAT US	0.43%
COG US	0.32%
OMC US	0.24%

Nota: Elaboración propia

Tabla 18

Participaciones después de optimización

ACCIÓN	% DE PARTICIPACIÓN
LMT US	100%
ORCL US	0%
CAT US	0%
EBAY US	0%
CMI US	0%
BBY US	0%
AMP US	0%
KLAC US	0%
OMC US	0%
HII US	0%
SPR US	0%
RHI US	0%
COG US	0%
WSM US	0%
Total	**100%**

Nota: Elaboración propia

Con esto evidenciamos el problema del modelo de Markowitz de soluciones de esquina, en donde todo el dinero se concentra en un activo.